高等学校教材

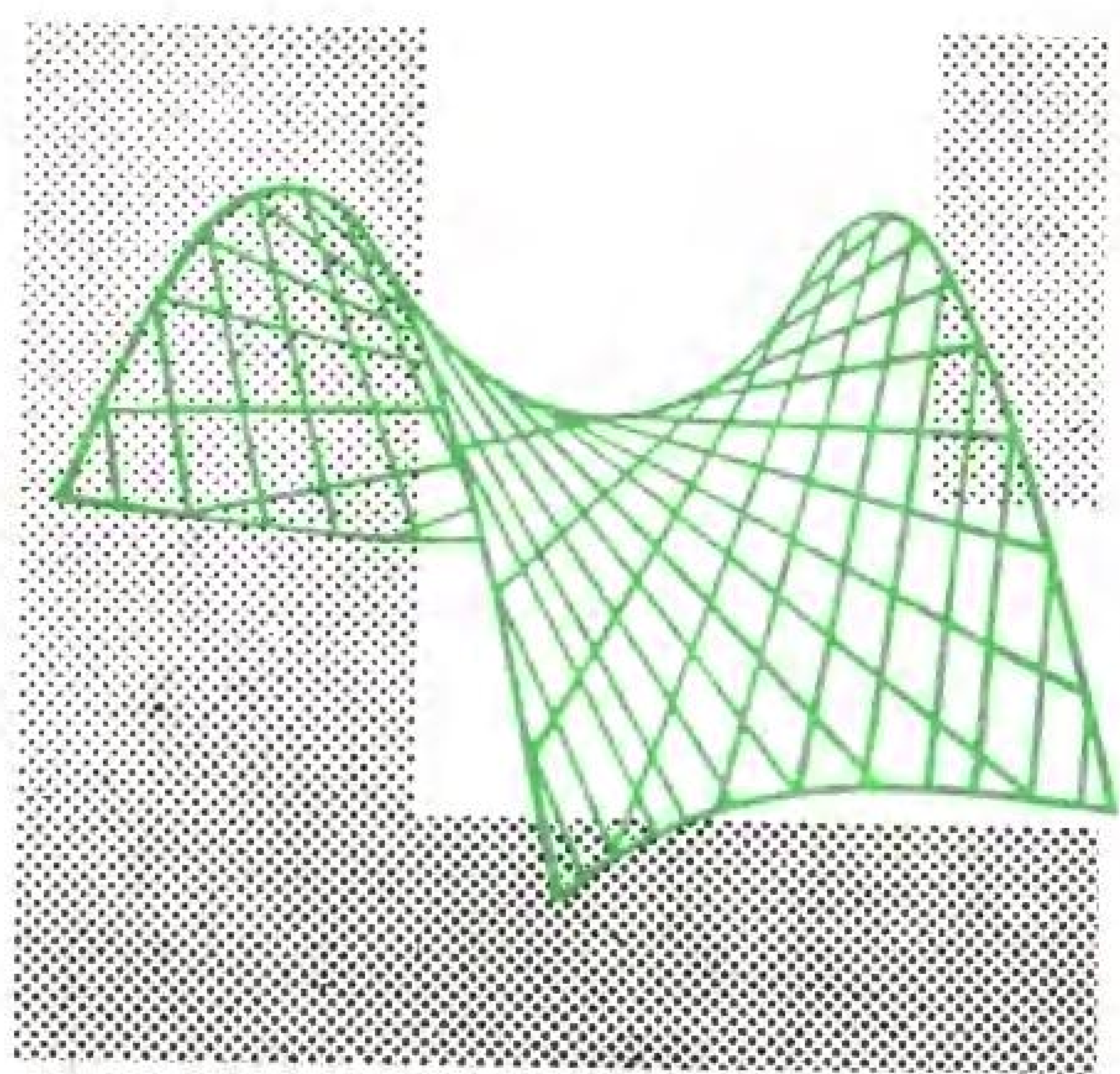
建设部"九五"
重点教材

流体力学泵与风机

(第四版)

蔡增基　龙天渝　主编

中国建筑工业出版社



建设部"九五"重点教材

流体力学泵与风机

（第四版）

蔡增基　龙天渝　主编

中国建筑工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

流体力学泵与风机/蔡增基主编．－4版．－北京：中国建筑工业出版社，1999
ISBN 7-112-03877-4

Ⅰ．流…　Ⅱ．蔡…　Ⅲ．①泵-高等学校-教材 ②鼓风机-高等学校-教材　Ⅳ．TH3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 63363 号

本书(四版)介绍流体静力学，一元流体动力学，不可压缩流体动力学，绕流运动，孔口和管路计算的基本理论，气体射流，相似性原理和因次分析以及常用泵与风机的原理和特性，并附录了常用泵与风机的运行和性能资料。每章均附有习题，书末有部分习题答案。

本次修订，基本保持了前三版的特色，对某些概念的表述进一步作了修正，对例题和习题作了必要的调整和补充，彻底重编了第七、八两章，改写了一元恒定流动量方程等，增添了“管道内压力分布”和可压缩流体的压缩机，对介绍的泵与风机类型作了更新。

建设部“九五”重点教材
流体力学泵与风机
(第四版)
蔡增基　龙天渝　主编
*
中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)
新华书店总店科技发行所发行
北京市兴顺印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米 1/16　印张：24½　字数：590千字
1999年12月第四版　1999年12月第十二次印刷
印数：138266—148265册　定价：**24.90**元
ISBN 7-112-03877-4
TU·3015(9242)

修　订　说　明

《流体力学泵与风机》自1979年首版至今已整整20年，在供热通风空调和燃气工程专业以及纺织、交通、冶金、陶瓷等专业中广泛使用，对于各专业的发展作出了积极贡献。目前正值世纪之交，又面临教育改革和高等院校专业调整的新形势，我们感到有必要对该书进行较全面的总结和修订。

考虑教材的延续性和目前的教学现状，第四版仍保留了第三版的基本内容，保持了前三版的特色：由浅入深、循序渐进、便于独立学习和从一元流动到三元流动，同时兼顾三元流动到一元流动的教学体系（体现在第七章的改编）。

本次修订主要变动：较彻底地改写第七、八两章。将流体力学基本方程集于第七章，增添初边值条件；势流理论和附面层理论归于第八章（绕流运动）；对流体受力（ξ1-1），液体相对平衡（ξ2-8）和动量方程（ξ3-13）等作了较大改动。

下篇泵与风机，为适应专业拓宽需要，增添了可压缩流体的压缩机；增加"管道内压力分布"，为今后网络分析奠定基础；附录中介绍的泵与风机类型作了调整和更新。

此外，进一步审查了各概念的定义与诠释，如质量力、控制体、随体导数、应力符号、气蚀分析等；对例题和习题中的不妥或错误之处进行了修改，并作了增删；第五章的习题顺序作了调整，使之与教材内容编排一致。

讲完本教材全部内容，授课时间约在120学时以上。因此，各院校在完成大纲基本要求的前提下，根据学时安排，可自行删节授课内容。部分可不讲的内容用"*"标注。在考核时，对统编题库也应作相应的取舍。

修订分工，上篇流体力学，第一、四、十章：重庆建筑大学蔡增基。第二、三、七、八章：重庆建筑大学龙天渝。第五、六、九章：西安建筑科技大学陈郁文。下篇泵与风机：重庆建筑大学田胜元。主编：重庆建筑大学蔡增基、龙天渝。主审：哈尔滨建筑大学屠大燕。

本书第一、二、三版主编周谟仁教授为本教材的编写和供热通风空调及燃气工程等专业的发展作出了重大贡献。我们深切缅怀周谟仁教授，学习他崇高的思想境界和科学的严谨的学术态度和工作作风。

目　录

上篇　流 体 力 学

下篇 泵 与 风 机

附 录

上篇　流　体　力　学

第一章　绪　　论

液体和气体，统称为流体。

流体力学是力学的一个分支，它研究流体静止和运动的力学规律，及其在工程技术中的应用。

流体在供热通风和燃气工程中应用得非常广泛。热的供应，空气的调节，燃气的输配，排毒排湿，除尘降温等等，都是以流体作为工作介质，通过流体的各种物理作用，对流体的流动有效地加以组织来实现的。学好流体力学，才能对专业范围内的流体力学现象作出合乎实际的定性判断，进行足够精确的定量估计，正确地解决专业范围内的流体力学的设计和计算问题。

学习流体力学，要注意基本理论、基本概念、基本方法的理解和掌握，要学会理论联系实际地分析和解决工程中的各种流体力学问题。

本书主要采用国际单位制，基本单位是：长度用米，代号为 m；时间用秒，代号为 s；质量用公斤，代号为 kg；力为导出单位，采用牛顿，代号为 N。$1N = 1kg \cdot m/s^2$。

由于我国长期采用工程单位，专业设备上某些量有时仍表为工程上习惯单位，学习者必须注意两种单位的换算。掌握换算的基本关系——$1kgf = 9.807N$。

第一节　作用在流体上的力

我们研究流体运动规律，首先必须分析作用于流体上的力，力是使流体运动状态发生变化的外因。根据力作用方式的不同，可以分为质量力和表面力。

一、质量力

质量力是作用在流体的每一个质点（或微团）上的力。

设在流体中 M 点附近取质量为 $\mathrm{d}m$ 的微团，其体积为 $\mathrm{d}v$，作用于该微团的质量力为 $\mathrm{d}F$，则称极限

$$\lim_{\mathrm{d}v \to M} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}m} = f$$

为作用于 M 点的单位质量的质量力，简称为单位质量力。用 f 或 (X, Y, Z) 表示。设 $\mathrm{d}F$ 在 x, y, z 坐标轴上的分量分别为 $\mathrm{d}F_x, \mathrm{d}F_y, \mathrm{d}F_z$，则单位质量力的轴向分力可表示为

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \lim_{dv \to M} \frac{dF_x}{dm} \\
Y &= \lim_{dv \to M} \frac{dF_y}{dm} \\
Z &= \lim_{dv \to M} \frac{dF_z}{dm}
\end{aligned}\right\} \tag{1-1-1}
$$

在国际单位制中,质量力的单位是牛顿,N。单位质量力的单位是N/kg,其因次与加速度的因次相同,是LT^{-2}。

流体力学中碰到的普遍情况是流体所受的质量力只有重力。由于重力G的大小与流体的质量m成正比,$G = mg$,所以流体所受的单位质量力的大小等于重力加速度,$G/m = g$。当采用惯用的直角坐标系时,Z轴铅垂向上为正,重力在各向的分力为G_x, G_y, G_z,单位质量重力的轴向分力为

$$
\left.\begin{aligned}
X &= G_x/m = 0 \\
Y &= G_y/m = 0 \\
Z &= G_z/m = -g
\end{aligned}\right\} \tag{1-1-2}
$$

即$(X, Y, Z) = (0, 0, -g)$。

在研究流体的相对平衡时,例如盛装液体的容器作直线加速运动或旋转运动等,也将流体运动的惯性力看成是作用在流体上的质量力。

二、表面力

表面力是作用在所考虑的流体(或称分离体)表面上的力。尽管流体内部任一对相互接触的表面上,这部分和那部分流体之间的表面力是大小相等,方向相反,相互抵消的,但在流体力学里分析问题时,常常从流体内部取出一个分离体,研究其受力状态,这时与分离体相接触的周围流体对分离体的作用的内力又变成了作用在分离体表面上的外力。总之,表面力是就所研究的流体系统而言的。它可能是周围同种流体对分离体的作用,也可能是另一种相邻流体对其作用,或是相邻固壁的作用。例如,敞开容器内的液体,如把整个液体作为研究系统,则它仅受到自由面上的大气和相接触的容器壁面的作用;若把和固壁接触的自由面附近的部分液体取作分离体,则上述三种表面力都存在。

流体力学中研究流体的运动时,正确地分析作用在所考虑的流体系统上的表面力是极其重要的。

质量力的表达形式常用单位质量力的坐标分量来表示,类似地,表面力常采用单位表面力的切向分力和法向分力来表示。

设在流体分离体的表面上,围绕任意点A取一面积ΔA,一般地,可将作用在该面上的表面力分解为表面法线方向的分力ΔP和切线方向的分力ΔT。因为流体内部不能承受拉力,所以,表面法线方向的力只有沿内法线方向的压力。因此,表面应力可分解为

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{p} &= \frac{\Delta P}{\Delta A} \\
\bar{\tau} &= \frac{\Delta T}{\Delta A}
\end{aligned}\right\} \tag{1-1-3}
$$

$\bar{p}$称为面积ΔA上的平均正应力或平均压强,$\bar{\tau}$称为面积ΔA上的平均切应力。如果令面积ΔA无限缩小至A点,则

$$\left.\begin{aligned} p &= \lim_{\Delta A \to A} \frac{\Delta P}{\Delta A} \\ \tau &= \lim_{\Delta A \to A} \frac{\Delta T}{\Delta A} \end{aligned}\right\} \tag{1-1-4}$$

p 称为 A 点的压强或法向应力或正应力，τ 称为 A 点的切应力。正应力和切应力的因次均为 $ML^{-1}T^{-2}$。在国际单位制中，单位是帕斯卡，以 Pa 表示。$1Pa = 1N/m^2$，工程单位制为 kgf/m^2 或 kgf/cm^2。

(1-1-1)式中的单位质量力 f 是空间坐标 x,y,z 和时间 t 的函数

$$f = f(x,y,z,t)$$

是质量力在空间中的分布密度；而(1-1-4)式中的压强 p 和切应力 τ 不仅有赖于空间位置和时间，同时也与作用面的方位有关，因此被称为是作用面上的分布密度。中学物理讲述的往往是分布密度“均匀”的情况。

第二节　流体的主要力学性质

在生产和生活中，有许多流体流动现象，如水在河中流动，风从门窗流入，燃气从喷孔喷出等等。这些现象表明了流体不同于固体的基本特征，就是它的流动性。

和固体比较，固体存在着抗拉、抗压和抗切三方面的能力。如果要将某一固体拉裂、压碎或切断，或使其产生很大变形，必须加以足够的外力，否则是拉不裂、压不碎、切不断的。但是，流体则不相同，如要分裂、切断水体，几乎不需什么气力。流体的抗拉能力极弱，抗切能力也很微小，静止时不能承受切力，只要受到切力作用，不管此切力怎样微小，流体都要发生不断变形，各质点间发生不断的相对运动。流体的这个性质，称为流动性，这是它便于用管道、渠道进行输送，适宜作供热、供冷等工作介质的主要原因。流体的抗压能力较强，这个特性和流动性相结合，使我们能够利用水压推动水力发电机，利用蒸汽压力推动汽轮发电机，利用液压、气压传动各种机械。

现在阐述与流体运动有关的几个物理性质。

一、惯性

惯性是物体维持原有运动状态的能力的性质。表征某一流体的惯性大小可用该流体的密度。对于均质流体，单位体积的质量称为密度，以 ρ 表示：

$$\rho = m/V \tag{1-2-1}$$

式中　ρ——流体的密度，kg/m^3；

m——流体的质量，kg；

V——该质量流体的体积，m^3。

各点密度不完全相同的流体，称为非均质流体。非均质流体中某点的密度为：

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \tag{1-2-2}$$

式中　ρ——某点流体的密度；

ΔM——为微小体积 ΔV 内的流体质量；

ΔV——为包含该点在内的流体体积。

二、重力特性

流体受地球引力作用的特性，称重力特性，常用容重来表征。对于均质流体，作用于单位体积流体的重力称容重。以 γ 表示：

$$\gamma = G/V \tag{1-2-3}$$

式中　γ——流体的容重，N/m^3；

G——体积为 V 的流体所受的重力，N；

V——重力为 G 的流体体积，m^3。

和一点的密度相同，对于非均质流体，任一点的容重为：

$$\gamma = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} \tag{1-2-4}$$

式中　γ——为某点流体的容重；

ΔG——为微小体积 ΔV 的流体重力；

ΔV——为包含该点在内的流体体积。

重量是质量和重力加速度的乘积，即

$$G = mg$$

两端同除以体积 V，则得容重和密度的常用重要关系：

$$\gamma = \rho g \tag{1-2-5}$$

在计算中常用的流体密度和容重如下：

水的密度和容重：$\rho = 1000 kg/m^3$

$\gamma = 9807 N/m^3$

汞的密度和容重：$\rho_{Hg} = 13595 kg/m^3$

$\gamma_{Hg} = 133326 N/m^3$

干空气在温度为 290K，压强为 760mmHg 时的密度和容重：$\rho_a = 1.2 kg/m^3$

$\gamma_a = 11.77 N/m^3$

三、粘滞性

流体内部质点间或流层间因相对运动而产生内摩擦力（内力）以反抗相对运动的性质，叫做粘滞性。此内摩擦力称为粘滞力。在流体力学研究中，流体粘滞性十分重要。

为了说明流体的粘滞性，现以流体在管中流动为例，如图 1-1。当流体在管中缓缓流动时，紧贴管壁的流体质点，粘附在管壁上，流速为零。位于管轴上的流体质点，离管壁的距离最远，受管壁的影响最小，因而流速最大。介于管壁和管轴之间的流体质点，将以不同的速度向右移动，它们的速度将从管壁至管轴线，由零增加至最大的轴心速度。图 1-1（a）就是粘性流体在管

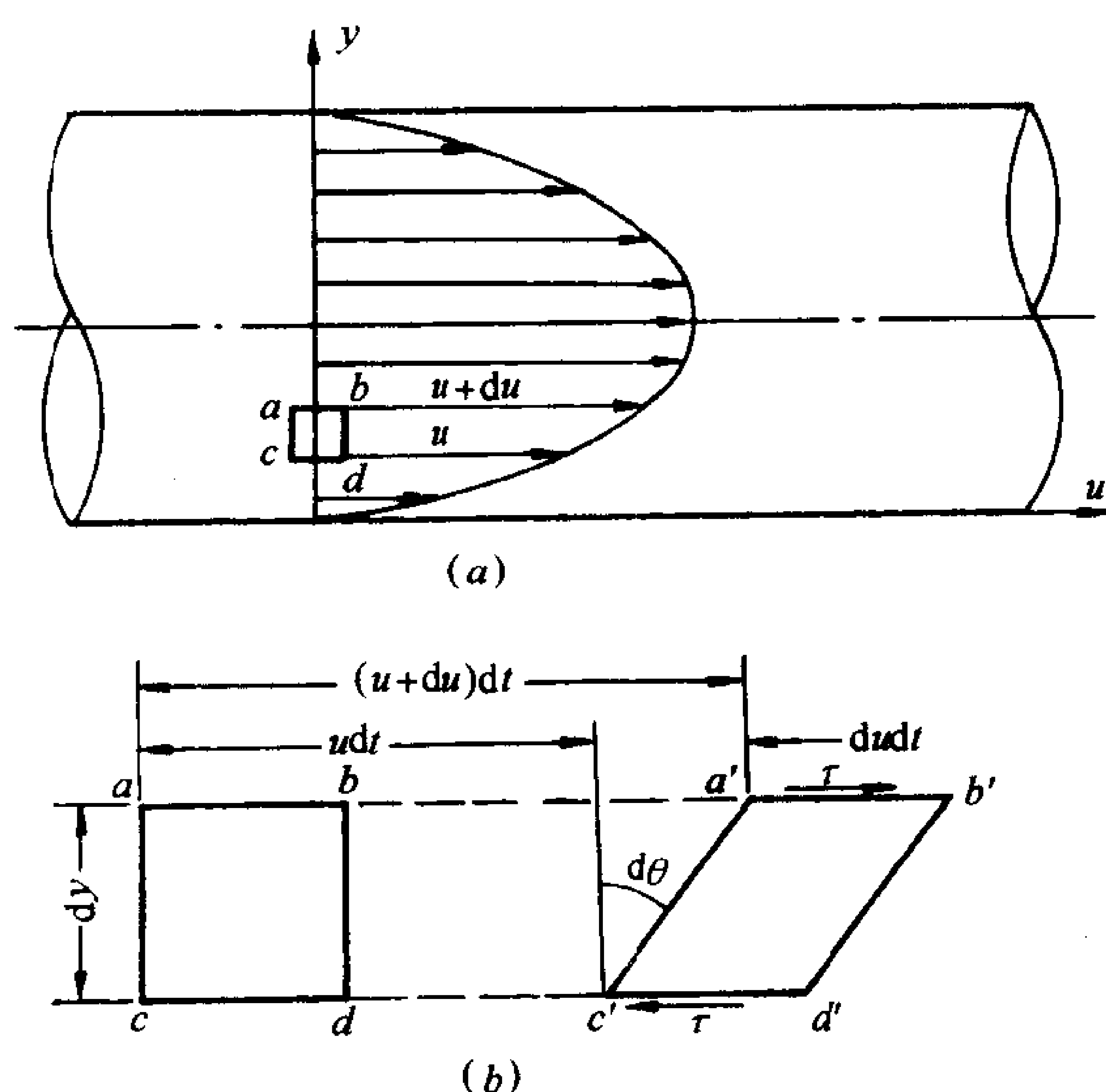


图 1-1　流体质点的直角变形速度

中缓慢流动时,流速 u 随垂直于流速方向 y 而变化的函数关系图,即 $u=f(y)$ 的函数关系曲线,称为流速分布图。由于各流层的速度不相同,因而各质点间便产生了相对运动,从而产生内摩擦力以抗拒相对运动。在流体作层流(层流和紊流的概念,将在第四章讲述)剪切流动时,内摩擦力(或切力)T 的大小,经过无数的试验证明:

1. 与两流层间的速度差(即相对速度)du 成正比,和流层间距离 dy 成反比;
2. 与流层的接触面积 A 的大小成正比;
3. 与流体的种类有关;
4. 与流体的压力大小无关。

内摩擦力的数学表达形式可写作:

$$T \propto A\frac{du}{dy}$$

或

$$T=\mu A\frac{du}{dy} \tag{1-2-6}$$

这就是牛顿内摩擦定律。若以 τ 代表单位面积上的内摩擦力,称切应力。则

$$\tau=\frac{T}{A}=\mu\frac{du}{dy} \tag{1-2-7}$$

式(1-2-7)就是常用的粘滞力的计算公式。现对各项阐述如下:

(1) $\frac{du}{dy}$——称速度梯度。表示速度沿垂直于速度方向 y 的变化率,单位为 s^{-1}。为了理解速度梯度的意义,我们在图 1-1(a)中垂直于速度方向的 y 轴上,任取一边长为 dy 的流体小方块 $abcd$。为清楚起见,我们将它放大成图 1-1(b)。由于小方块下表面的速度 u 小于上表面的速度($u+du$)。经过 dt 时间后,下表面所移动的距离 udt,小于上表面所移动的距离 $(u+du)dt$。因而小方块 $abcd$ 变形为 $a'b'c'd'$。也就是说,两流层间的垂直连接线 ac 及 bd,在 dt 时间中变化了角度 $d\theta$。由于 dt 很小,因此,$d\theta$ 也很小。所以

$$d\theta \approx \tan d\theta=\frac{du\,dt}{dy}$$

故

$$\frac{du}{dy}=\frac{d\theta}{dt} \tag{1-2-8}$$

可见,速度梯度就是直角变形速度。这个直角变形速度是在切应力的作用下发生的,所以,也称剪切变形速度。因为流体的基本特征是具有流动性。在切应力的作用下,只要有充分的时间让它变形,它就有无限变形的可能性。因而只能用直角变形速度来描述它的剪切变形的快慢。所以,牛顿的内摩擦定律也可以理解为切应力与剪切变形速度成正比。

(2) τ——称切应力,因次为力/面积。常用的单位为 N/m^2,简称 Pa。切应力 τ 不仅有大小,还有方向。现以图 1-1(b)小方块变形后的 $a'b'c'd'$ 来说明它的方向的确定:上表面 $a'b'$ 上面的流层运动较快,有带动较慢的 $a'b'$ 流层前进的趋势,故作用于 $a'b'$ 面上的切应力 τ 的方向与运动方向相同。下表面 $c'd'$ 下面的流层运动较慢,有阻碍较快的 $c'd'$ 流层前进的趋势,故作用于 $c'd'$ 面上的切应力 τ 的方向与运动方向相反。对于相接触的两个流层来讲,作用在不同流层上的切应力,必然是大小相等,方向相反的。这里顺便指出:内摩擦力虽是流体抗拒相对运动的性质,但它不能从根本上制止流动的发生。因此,流体的流动性,不因有内摩擦力的存在而消失。当然,在流体质点间没有相对运动(在静止或相对静止状态)时,也就没有内摩擦力表现出来。

(3) μ——称粘滞系数,单位为 $N/(m^2 \cdot s)$,以符号 Pa·s 表示。不同流体有不同的 μ 值,同一流体的 μ 值愈大,粘滞性愈强。μ 的物理意义可以这样来理解:当取 $\frac{du}{dy}=1$ 时,则 $\tau=\mu$,即 μ 表征单位速度梯度作用下的切应力,所以它反映了粘滞性的动力性质,因此也称 μ 为动力粘滞系数。

在流体力学中,经常出现 μ/ρ 的比值,用 ν 表示。即

$$\nu=\mu/\rho \tag{1-2-9}$$

式中,ρ 为流体的密度;ν 的因次为 L^2T^{-1},常用单位为 cm^2/s(称斯托克斯,简写 St)。如果考虑密度就是单位体积质量,则 ν 的物理意义,也可以这样来理解:ν 是单位速度梯度作用下的切应力对单位体积质量作用产生的阻力加速度。这样,由于在 ν 的因次中没有力的因次,只具有运动学要素,故称 ν 为运动粘滞系数。流体流动性是运动学的概念,所以,衡量流体流动性应用 ν 而不用 μ。

表 1-1 中,列举了在不同温度时水的粘滞系数。

在表 1-2 中,列举了一个大气压下(压强为 $98.07kN/m^2$)不同温度时空气的粘滞系数。

水的粘滞系数 **表 1-1**

t (℃)	μ (10^{-3}Pa·s)	ν ($10^{-6}m^2/s$)	t (℃)	μ (10^{-3}Pa·s)	ν ($10^{-6}m^2/s$)
0	1.792	1.792	40	0.656	0.661
5	1.519	1.519	45	0.599	0.605
10	1.308	1.308	50	0.549	0.556
15	1.140	1.140	60	0.469	0.477
20	1.005	1.007	70	0.406	0.415
25	0.894	0.897	80	0.357	0.367
30	0.801	0.804	90	0.317	0.328
35	0.723	0.727	100	0.284	0.296

一个大气压下的空气的粘滞系数 **表 1-2**

t (℃)	μ (10^{-3}Pa·s)	ν ($10^{-6}m^2/s$)	t (℃)	μ (10^{-3}Pa·s)	ν ($10^{-6}m^2/s$)
0	0.0172	13.7	90	0.0216	22.9
10	0.0178	14.7	100	0.0218	23.6
20	0.0183	15.7	120	0.0228	26.2
30	0.0187	16.6	140	0.0236	28.5
40	0.0192	17.6	160	0.0242	30.6
50	0.0196	18.6	180	0.0251	33.2
60	0.0201	19.6	200	0.0259	35.8
70	0.0204	20.5	250	0.0280	42.8
80	0.0210	21.7	300	0.0298	49.9

从表 1-1 及表 1-2 中还可看出:水和空气的粘滞系数随温度变化的规律是不同的,水的粘滞性随温度升高而减小,空气的粘滞性随温度升高而增大。这是因为粘滞性是分子间的吸引力和分子不规则的热运动产生动量交换的结果。温度升高,分子间吸引力降低,动量增

大;反之,温度降低,分子间吸引力增大,动量减小。对于液体,分子间的吸引力是决定性因素,所以液体的粘滞性随温度升高而减小;对于气体,分子间的热运动产生动量交换是决定性的因素,所以气体的粘滞性随温度升高而增大。

通常的压强对流体的粘滞性影响不大,可以认为,流体的动力粘滞系数 μ 只随温度而变化。例如,气体在小于几个大气压的压强作用下,就可以认为它们的动力粘滞系数 μ 与压强无关。但是,在高压作用下,气体和液体的动力粘滞系数都将随压强的升高而增大。

牛顿内摩擦定律只适用于一般流体,它对某些特殊流体是不适用的。为此,将在作纯剪切流动时满足牛顿内摩擦定律的流体称为牛顿流体。如水和空气等,均为牛顿流体。而将不满足该定律的称为非牛顿流体。如泥浆、污水、油漆和高分子溶液等。本书仅限于研究牛顿流体。对非牛顿流体,可参阅有关的专门著作。

最后,还需指出,如果流体的流动是非纯剪切流动,那末,即使是牛顿流体,一般地也不满足(1-2-6)式或(1-2-7)式。对于在一般的三元流动情况下,是否是牛顿流体的判别式则是广义牛顿公式,将在第七章第五节讲述。

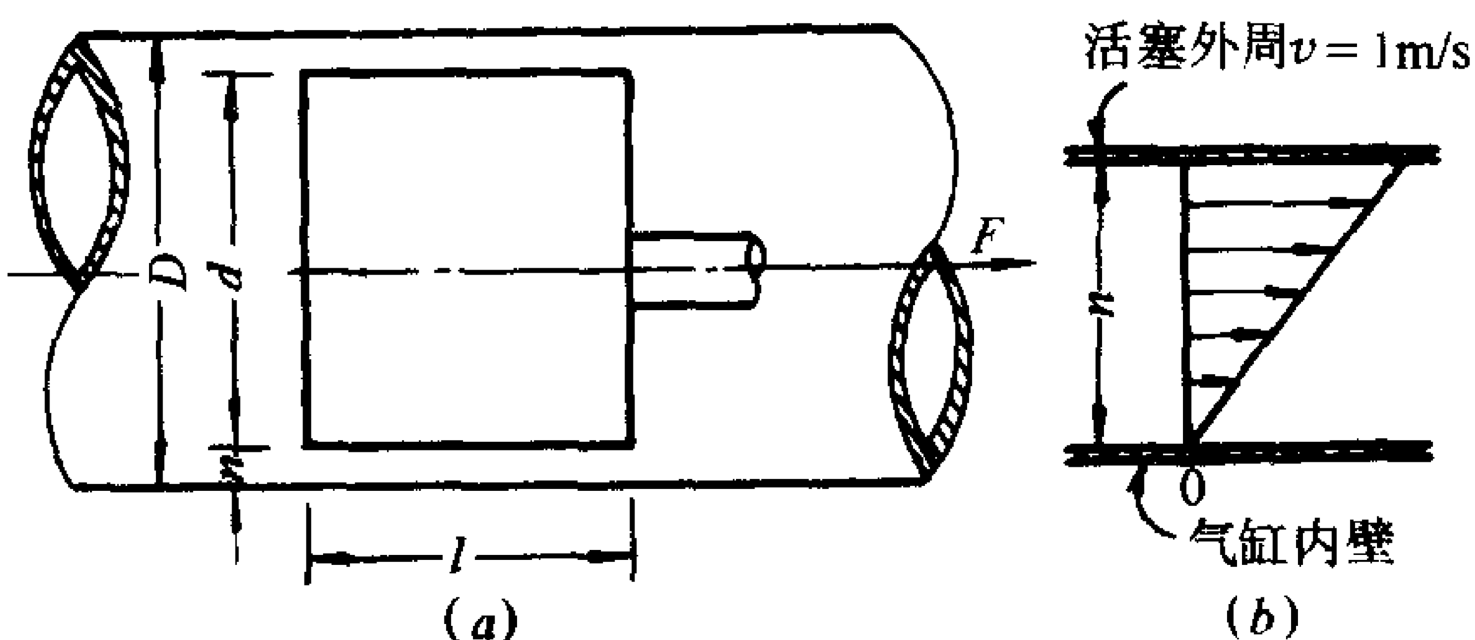


图 1-2 活塞运动的粘性阻力

【例 1-1】 在图 1-2(a)中,气缸内壁的直径 $D=12$cm、活塞的直径 $d=11.96$cm,活塞的长度 $l=14$cm,活塞往复运动的速度为 1m/s,润滑油液的 $\mu=1P(1P=0.1\text{Pa}\cdot\text{s})$,试问作用在活塞上的粘滞力为多少?

【解】 因粘性作用,粘附在气缸内壁的润滑油层速度为零,粘附在活塞外沿的润滑油层与活塞速度相同,即 $v=1$m/s。因此,润滑油层的速度由零增至 1m/s,油层间因相对运动产生切应力,故用 $\tau=\mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$计算。该切应力乘以活塞面积,就是作用于活塞上的粘滞力 T。

我们将间隙 n 放大,绘出该间隙中的速度分布图 1-2(b)。由于活塞与气缸的间隙 n 很小,速度分布图近似认为是直线分布。故

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{v}{n}=\frac{100}{\frac{1}{2}\times(12-11.96)}=5\times10^3\quad 1/\text{s}$$

将以上数值代入公式,

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0.1\times5\times10^3=5\times10^2\text{N/m}^2$$

接触面积 $A=\pi\mathrm{d}l=\pi\times0.1196\times0.14=0.053\text{m}^2$

所以

$$T=A\tau=0.053\times5\times10^2=26.5\text{N}$$

四、压缩性和热胀性

流体受压,体积缩小,密度增大的性质,称为流体的压缩性。流体受热,体积膨胀,密度减小的性质,称为流体的热胀性。

1. 液体的压缩性和热胀性

液体的压缩性,一般用压缩系数 β 来表示。设某一体积 V 的流体,密度为 ρ,当压强增

加 dp 时,体积减小,密度增大 $d\rho$,密度增加率为 $d\rho/\rho$,则 $d\rho/\rho$ 与 dp 的比值,称为流体的压缩系数 β。即

$$\beta=\frac{\frac{d\rho}{\rho}}{dp} \tag{1-2-10}$$

β 值愈大,则流体的压缩性也愈大。β 的单位为 m^2/N。

流体被压缩时,其质量并不改变,即

$$dm = d(\rho V) = \rho dV + V d\rho = 0$$

所以 $$d\rho/\rho=-dV/V$$

故体积压缩系数又可以表示为:

$$\beta=-\frac{dV}{V}/dp \tag{1-2-11}$$

压缩系数 β 的倒数为 $1/\beta$,称为流体的弹性模量,以 E 表示。即

$$E=\frac{1}{\beta}=\frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}}=\rho\frac{dp}{d\rho} \tag{1-2-12}$$

式中,E 的单位为 N/m^2。

表 1-3 列举了水在温度为 0℃时,不同压强下的压缩系数。

水的压缩系数(℃时)m^2/N **表 1-3**

压强 (at)	5	10	20	40	80
β	0.538×10^{-9}	0.536×10^{-9}	0.531×10^{-9}	0.528×10^{-9}	0.515×10^{-9}

液体的热胀性,一般用热胀系数 α 来表示,与压缩系数相反,当温度增加 dT 时,液体的密度减小率为 $-d\rho/\rho$,则热胀系数 α 为:

$$\alpha=-\frac{\frac{d\rho}{\rho}}{dT} \tag{1-2-13}$$

α 值愈大,则液体的热胀性也愈大。α 的单位为 T^{-1}。

同理,热胀系数亦可表示为:

$$\alpha=dV/V/dT \tag{1-2-14}$$

表 1-4 列举了水在一个大气压下,不同温度时的容重及密度。

一个大气压下水的容重及密度 **表 1-4**

温度 (℃)	容重 (kN/m^3)①	密度 (kg/m^3)	温度 (℃)	容重 (kN/m^3)①	密度 (kg/m^3)	温度 (℃)	容重 (kN/m^3)①	密度 (kg/m^3)
0	9.806	999.9	3	9.807	1000.0	6	9.807	1000.0
1	9.806	999.9	4	9.807	1000.0	8	9.806	999.9
2	9.807	1000.0	5	9.807	1000.0	10	9.805	999.7

续表

温度 (℃)	容重 (kN/m³)①	密度 (kg/m³)	温度 (℃)	容重 (kN/m³)①	密度 (kg/m³)	温度 (℃)	容重 (kN/m³)①	密度 (kg/m³)
15	9.799	999.1	45	9.710	990.2	75	9.561	974.9
20	9.790	998.2	50	9.690	988.1	80	9.529	971.8
25	9.778	997.1	55	9.657	985.7	85	9.500	968.7
30	9.755	995.7	60	9.645	983.2	90	9.467	965.3
35	9.749	994.1	65	9.617	980.6	95	9.433	961.9
40	9.731	992.2	70	9.590	977.8	100	9.399	958.4

① 在国际单位制中常将因数 10^3 写成千，以符号 k 表示，10^6 写成兆，以符号 M 表示。

从表 1-3 及表 1-4 看出：压强每升高一个大气压，水的密度约增加二万分之一。在温度较低时(10～20℃)，温度每增加 1℃，水的密度减小约为万分之一点五；在温度较高时(90～100℃)，水的密度减小也只有万分之七，这说明水的热胀性和压缩性是很小的，一般情况下可忽略不计。只有在某些特殊情况下，例如水击、热水采暖等问题时，才需要考虑水的压缩性及热胀性。

2. 气体的压缩性及热胀性

气体与液体不同，具有显著的压缩性和热胀性。温度与压强的变化对气体容重的影响很大。在温度不过低，压强不过高时，气体密度、压强和温度三者之间的关系，服从理想气体状态方程式。即

$$\frac{p}{\rho}=RT \tag{1-2-15}$$

式中 p——气体的绝对压强，N/m^2；

T——气体的热力学温度，K；

ρ——气体的密度，kg/m^3；

R——气体常数，单位为 J/(kg·K)。对于空气，$R=287$；对于其它气体，在标准状态下，$R=8314/n$，式中 n 为气体的分子量。

在温度不变的等温情况下，$T=C_1$(常数)。所以 $RT=$ 常数。因此，状态方程简化为 $p/\rho=$ 常数。写成常用形式：

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_1}{\rho_1} \tag{1-2-16}$$

式中，p_1、ρ_1 为原来的压强及密度；p、ρ 是其它情况下的压强及密度。式(1-2-16)表示在等温情况下压强与密度成正比。也就是说，压强增加，体积缩小，密度增大。根据这个关系，如果把一定量的气体压缩到它的密度增大一倍，则压强也要增加一倍。相反，如果密度减小一倍，则压强也要减小一倍。这一关系与实际气体的压强和密度的变化关系几乎是一致的。但是，如果把气体压缩，压强增加到极大时，气体的密度则应该变得很大。并且根据公式的关系，似乎可以计算出在某个压强下，气体可以达到水、汞等的密度。这是不可能的，因为气体有一个极限密度，对应的压强称极限压强。若压强超过这个极限压强时，不管这压强有多大，气体再不能压缩得比这个极限密度更大了。所以只有当密度远小于极限密度时，式(1-2-16)与实际气体的情况才是一致的。

在压强不变的定压情况下，$p=C_2$(常数)。所以$\frac{p}{R}=$常数。因此，状态方程简化为 ρT = 常数。写成常用的形式：

$$\rho_0 T_0=\rho T \tag{1-2-17}$$

式中，ρ_0 是热力学温度 $T_0=273.16\text{K}\approx 273\text{K}$ 时的密度；ρ、T 是其他某一情况下的密度和温度。式(1-2-17)表示在定压情况下，温度与密度成反比。即温度增加，体积增大，密度减小；反之，温度降低，体积缩小，密度增大。这一规律对各种不同温度下的一切气体都是适用的。特别是在中等压强范围内，对于空气及其它不易液化的气体相当准确。只有在温度降低到气体液化的程度，才有比较明显的误差。

表 1-5 中，列举了在标准大气压(为海平面上 0℃时的大气压强，即等于 760mmHg)下，不同温度时的空气容重及密度。

在标准大气压时的空气容重及密度 **表 1-5**

温度 (℃)	容重 (N/m³)	密度 (kg/m³)	温度 (℃)	容重 (N/m³)	密度 (kg/m³)	温度 (℃)	容重 (N/m³)	密度 (kg/m³)
0	12.70	1.293	25	11.62	1.185	60	10.40	1.060
5	12.47	1.270	30	11.43	1.165	70	10.10	1.029
10	12.24	1.248	35	11.23	1.146	80	9.81	1.000
15	12.02	1.226	40	11.05	1.128	90	9.55	0.973
20	11.80	1.205	50	10.72	1.093	100	9.30	0.947

【例 1-2】 已知压强为 1at(98.07kN/m²)，0℃时的烟气容重为 13.13N/m³，求 200℃时的烟气容重及密度。

【解】 因压强不变，故为定压情况。用 $\rho T=\rho_0 T_0$ 计算密度，然后求容重。

气体热力学温度与摄氏温度的关系为：

$$T=T_0+t=273\text{K}+t$$

因为
$$\rho_0=\gamma_0/g=\frac{13.13}{9.807}=1.34\text{kg/m}^3$$

所以
$$\rho=\frac{\rho_0 T_0}{T}=\frac{1.34\times 273}{(273+200)}=0.77\text{kg/m}^3$$

$$\gamma=\rho g=0.77\times 9.807=7.55\text{N/m}^3$$

可见，温度变化很大时，气体的容重和密度均有很大的变化。

气体虽然是可以压缩和热胀的，但是，具体问题也要具体分析。我们在分析任何一个具体流动中，主要关心的问题是压缩性是否起显著的作用。对于气体速度较低(远小于音速)的情况，在流动过程中压强和温度的变化较小，密度仍然可以看作常数，这种气体称为不可压缩气体。反之，对于气体速度较高(接近或超过音速)的情况，在流动过程中其密度的变化很大，密度已经不能视为常数的气体，称为可压缩气体。

在供热通风工程中，所遇到的大多数气体流动，速度远小于音速，其密度变化不大(当速度等于 68m/s 时，密度变化为 1%；当速度等于 150m/s 时，密度的变化也只有 10%)，可当作不可压缩流体看待。也就是说，将空气认为和水一样是不可压缩流体。就是在供热系统中蒸汽输送的情况下，对整个系统来说，密度变化很大，但对系统内各管段来讲，密度变化并

不显著，因此对每一管段仍可按不可压缩气体计算。只不过这时不同管段的密度不同罢了。

在实际工程中，有些情况是需要考虑气体压缩性的，例如燃气的远距离输送等。所以，本课程也有一定内容研究可压缩气体在管中流动的一些问题。

五、表面张力特性

由于分子间的吸引力，在液体的自由表面上能够承受极其微小的张力，这种张力称表面张力。表面张力不仅在液体与气体接触的周界面上发生，而且还会在液体与固体（汞和玻璃等），或一种液体与另一种液体（汞和水等）相接触的周界上发生。

气体不存在表面张力。因为气体分子的扩散作用，不存在自由表面。所以表面张力是液体的特有性质。即对液体来讲，表面张力在平面上并不产生附加压力，因为那里的力处于平衡状态。它只有在曲面上才产生附加压力，以维持平衡。

因此，在工程问题中，只要有液体的曲面就会有表面张力的附加压力作用。例如，液体中的气泡，气体中的液滴，液体的自由射流，液体表面和固体壁面相接触等。所有这些情况，都会出现曲面，都会引起表面张力产生附加压力的影响。不过在一般情况下，这种影响是比较微弱的。

由于表面张力的作用，如果把两端开口的玻璃细管竖立在液体中，液体就会在细管中上升或下降 h 高度，如图 1-3 及图 1-4 所示。这种现象称为毛细管现象。上升或下降取决于液体和固体的性质。表面张力的大小，可用表面张力系数 σ 表示，单位为 N/m。

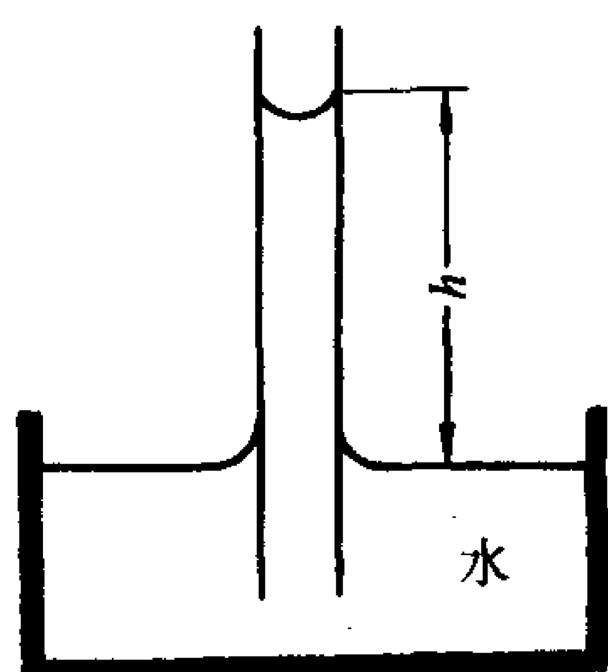


图 1-3　毛细管现象

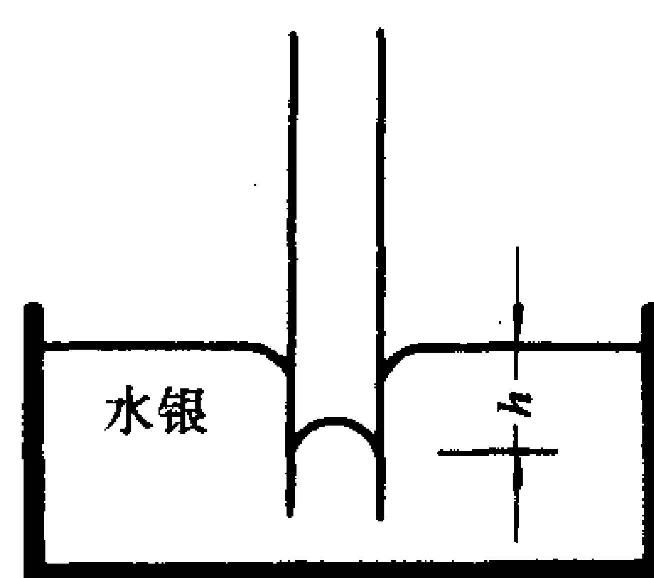


图 1-4　水银的毛细管现象

由于重力与表面张力产生的附加压力的铅直分力相平衡，所以

$$\pi r^2 h\gamma = 2\pi r\sigma\cos\alpha$$

故

$$h = \frac{2\sigma}{r\gamma}\cos\alpha \tag{1-2-18}$$

式中，γ 为液体容重；r 为玻璃管内径；σ 为液体的表面张力系数，它随液体种类和温度而异；α 为接触角，表示曲面和管壁交接处，曲面的切线与管壁的夹角。

如果，把玻璃细管竖立在水中，如图 1-3。当水温为 20℃时，则水在管中的上升高度为：

$$h = \frac{15}{r} \tag{1-2-19}$$

如果把玻璃细管竖立在水银中，如图 1-4。当水银温度为 20℃时，则水银在管中的下降高度为：

$$h = 5.07/r \tag{1-2-20}$$

式(1-2-19)及(1-2-20)中，h 及 r 均以 mm 计。可见，当管径很小时，h 就可以很大。所以，

用来测定压强的玻璃细管直径不能太小，否则就会产生很大的误差。

表面张力的影响在一般工程实际中是被忽略的。但在水滴和气泡的形成，液体的雾化，汽液两相流的传热与传质的研究中，将是重要的不可忽略的因素。

第三节　流体的力学模型

客观上存在的实际流体，物质结构和物理性质是非常复杂的。如果我们全面考虑它的所有因素，将很难提出它的力学关系式。为此，我们在分析考虑流体力学问题时，根据抓主要矛盾的观点，建立力学模型，对流体加以科学的抽象，简化流体的物质结构和物理性质，以便于列出流体运动规律的数学方程式。这种研究问题的方法，在固体力学中也常采用。例如刚体、弹性体等等。所以，力学模型的概念具有普遍意义。下面介绍几个主要的流体力学模型：

首先，我们将流体视为“连续介质”。我们知道，不论是液体或气体，总是由无数的分子所组成，分子之间有一定的间隙，也就是说，流体实质上是不连续的。但是，流体力学是研究宏观的机械运动（无数分子总体的力学效果），而不是研究微观的分子运动，作为研究单元的质点，也是由无数的分子所组成，并具有一定的体积和质量。因此，有可能将流体认为是充满其所占据空间无任何空隙的质点所组成的连续体。这种“连续介质”的模型，是对流体物质结构的简化，使我们在分析问题时得到两大方便：第一，它使我们不考虑复杂的微观分子运动，只考虑在外力作用下的宏观机械运动；第二，能运用数学分析的连续函数工具。因此，本课程分析时均采用“连续介质”这个模型。

其次是无粘性流体。一切流体都具有粘性，提出无粘性流体，是对流体物理性质的简化。因为在某些问题中，粘性不起作用或不起主要作用。这种不考虑粘性作用的流体，称为无粘性流体（或理想流体）。如果在某些问题中，粘性影响较大，不能忽略时，我们也用“两步走”的办法，先当作无粘性流体分析，得出主要结论，然后采用试验的方法考虑粘性的影响，加以补充或修正。这种考虑粘性影响的流体，称为粘性流体。

再次是不可压缩流体。这是不计压缩性和热胀性而对流体物理性质的简化。液体的压缩性和热胀性均很小，密度可视为常数，通常用不可压缩流体模型。气体在大多数情况下，也可采用不可压缩流体模型。只有在某些情况下，例如速度接近或超过音速时，在流动过程中其密度变化很大时，才必须用可压缩流体模型。本课程主要讨论不可压缩流体，也有一定内容讨论可压缩流体在管中的流动。

以上三个是流体力学的主要力学模型，以后在具体分析问题时，还要提出一些模型。

习　题

1-1　流体的容重和密度有何区别及联系？

1-2　已知水的密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$，求其容重。若有这样的密度的水 1l，它的质量和重力各为多少？

1-3　什么是流体的粘滞性？它对流体流动有什么作用？动力粘滞系数 μ 和运动粘滞系数 ν 有何区别及联系？

1-4　水的容重 $\gamma=9.71\text{kN/m}^3$，$\mu=0.599\times10^{-3}\text{Pa·s}$，求它的运动粘滞系数 ν。

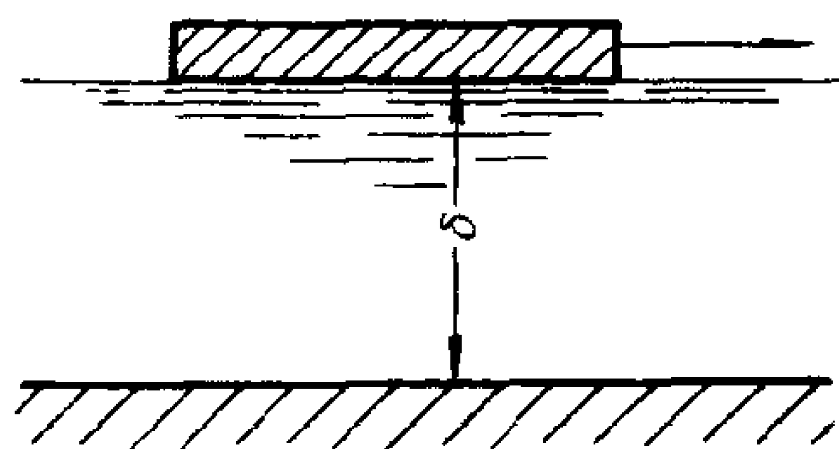
1-5　空气容重 $\gamma=11.5\text{N/m}^3$，$\nu=0.157\text{cm}^2/\text{s}$，求它的动力粘滞系数 μ。

1-6　当空气温度从0℃增加至20℃时，ν值增加15%，容重减少10%，问此时μ值增加多少？

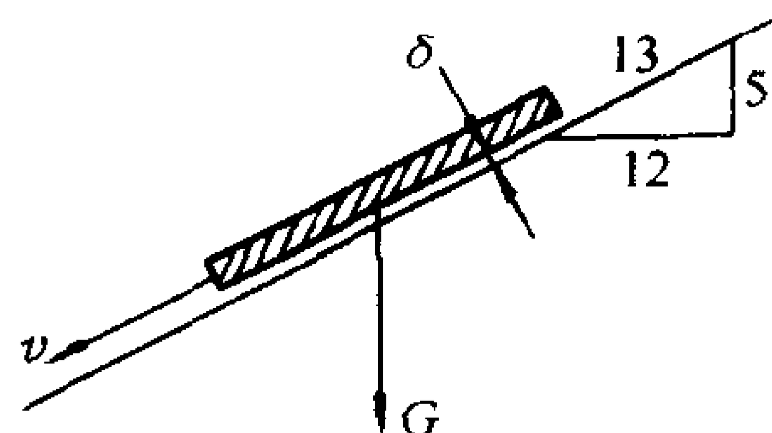
1-7　图示为一水平方向运动的木板，其速度为1m/s。平板浮在油面上，$\delta = 10$mm，油的$\mu = 0.09807$ Pa·s。求作用于平板单位面积上的阻力。

1-8　温度为20℃的空气，在直径为2.5cm的管中流动，距管壁上1mm处的空气速度为3cm/s。求作用于单位长度管壁上的粘滞切力为多少？

1-9　一底面积为40cm×45cm，高为1cm的木块，质量为5kg，沿着涂有润滑油的斜面等速向下运动。已知$v = 1$m/s，$\delta = 1$mm，求润滑油的动力粘滞系数。



题1-7　图



题1-9　图

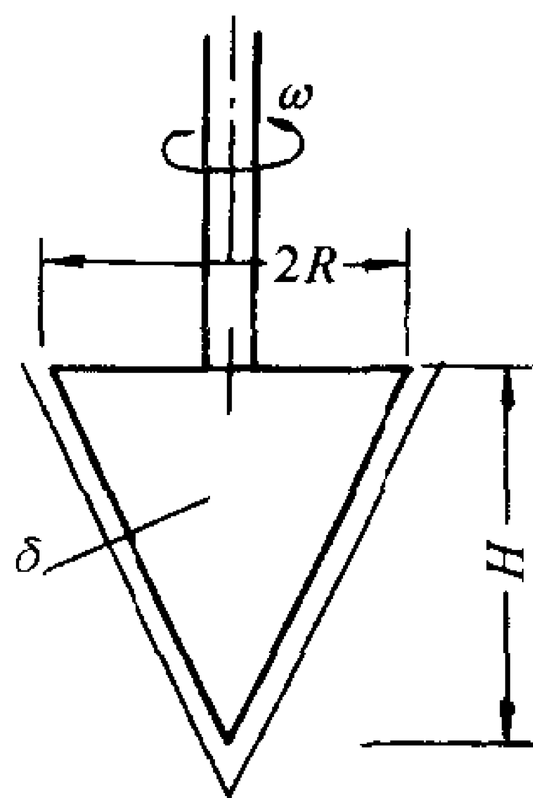
1-10　一圆锥体绕其铅直中心轴等速旋转，锥体与固定壁间的距离$\delta = 1$mm，全部为润滑油（$\mu = 0.1$ Pa·s）充满。当旋转角速度$\omega = 16\text{s}^{-1}$，锥体底部半径$R = 0.3$m，高$H = 0.5$m时，求作用于圆锥的阻力矩。

1-11　什么是流体的压缩性及热胀性？它们对流体的容重和密度有何影响？

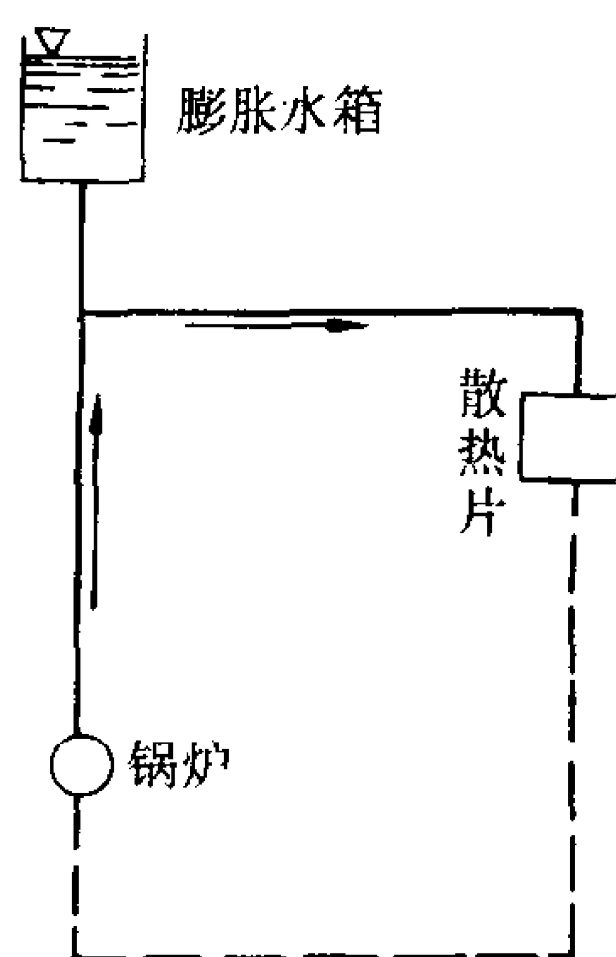
1-12　水在常温下，由5at压强增加到10at压强时，密度改变多少？

1-13　体积为5m^3的水，在温度不变的情况下，当压强从1at增加到5at时，体积减少1l，求水的压缩系数及弹性模量。

1-14　图示为一采暖系统图。由于水温升高引起水的体积膨胀，为了防止管道及暖气片胀裂，特在系统顶部设置一膨胀水箱，使水的体积有自由膨胀的余地。若系统内水的总体积$V = 8\text{m}^3$，加热前后温差$t = 50$℃，水的膨胀系数$\alpha = 0.0005$，求膨胀水箱的最小容积。



题1-10　图



题1-14　图

1-15　在大气压强的作用下，空气温度为180℃时的容重和密度为多少？

1-16　什么是流体的力学模型？常用的流体力学模型有哪些？

第二章　流体静力学

流体静力学是流体力学的一个部分，它研究流体处于静止或相对静止时的力学规律及其在工程技术上的应用。

当流体处于静止或相对静止时，各质点之间均不产生相对运动，因而流体的粘滞性不起作用。所以，研究流体静力学必然用无粘性流体的力学模型。

第一节　流体静压强及其特性

一、流体静压强的定义

从静止或相对静止状态的均质流体中，任取一体积 V，四周流体对该体积 V 的作用力，以箭头表示，如图 2-1。设用一平面 $ABCD$，将此体积分为Ⅰ、Ⅱ两部分。假定将Ⅰ部分移去，并以等效的力代替它对Ⅱ部分的作用，使Ⅱ部分不失原有的平衡。

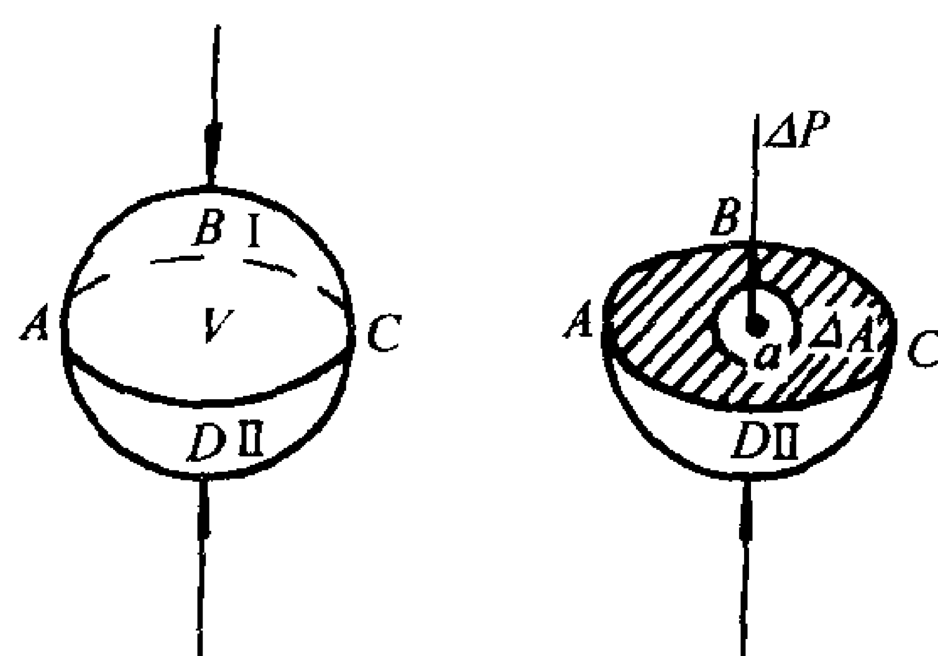


图 2-1　静止流体相互作用

从平面 $ABCD$ 上任取一面积 ΔA，a 点是该面积的中心。令力 ΔP 为移去部分作用在面积 ΔA 上的总作用力，力 ΔP 为面积 ΔA 上的流体静压力，ΔA 为流体静压力 ΔP 的作用面积。它们的比值，称为面积 ΔA 上的平均流体静压强，以 $\bar{p}$ 表示之：

$$\bar{p}=\frac{\Delta P}{\Delta A} \tag{2-1-1}$$

当面积 ΔA 无限缩小到 a 点时，比值趋近于某一个极限值，此极限值称为 a 点的流体静压强，以 p 表示。即

$$p=\lim_{\Delta A\to a}\frac{\Delta P}{\Delta A} \tag{2-1-2}$$

可以看出，流体静压力和流体静压强都是压力的一种量度。它们的区别仅在于：前者是作用在某一面积上的总压力；而后者是作用在某一面积上的平均压强或某一点的压强。

流体静压强的因次为力/面积，在国际单位制中常用单位为帕，以 Pa 表示，$1\text{Pa}=1\ \text{N/m}^2$；更大的单位用巴，以 bar 表示，$1\text{bar}=10^5\text{Pa}$。在工程单位制中常用单位为：$\text{kgf/m}^2$，$\text{tf/m}^2$，$\text{kgf/cm}^2$。

二、流体静压强的特性

在第一章中，我们讲述了流体在静止时不能承受拉力和切力，所以流体静压强的方向必然是沿着作用面的内法线方向，如图 2-2c。这就是流体静压强的第一个特性。由于流体内部的表面力只存在着压力，因此，流体静力学的根本问题是研究流体静压强的问题。

其次，我们要提出，通过 a 点可以做无数个方向不同的微小面积 ΔA，作用于 a 点的流

体静压强，是否会因方向不同而改变大小呢？

为了回答这个问题，我们在静止或相对静止的流体中，取出一个包括 o 点在内的微小四面体 $OABC$，如图 2-3，并将 o 点设为坐标原点，取正交的三个边长分别为 dx、dy、dz 与 x、y、z 坐标轴重合。垂直于 x、y、z 三个坐标轴的面及倾斜面 ABC 上平均压强分别为 p_x、p_y、p_z 及 p_n，为了研究这些平均压强间的相互关系，我们建立作用于微小四面体 $OABC$ 上各力的平衡关系。

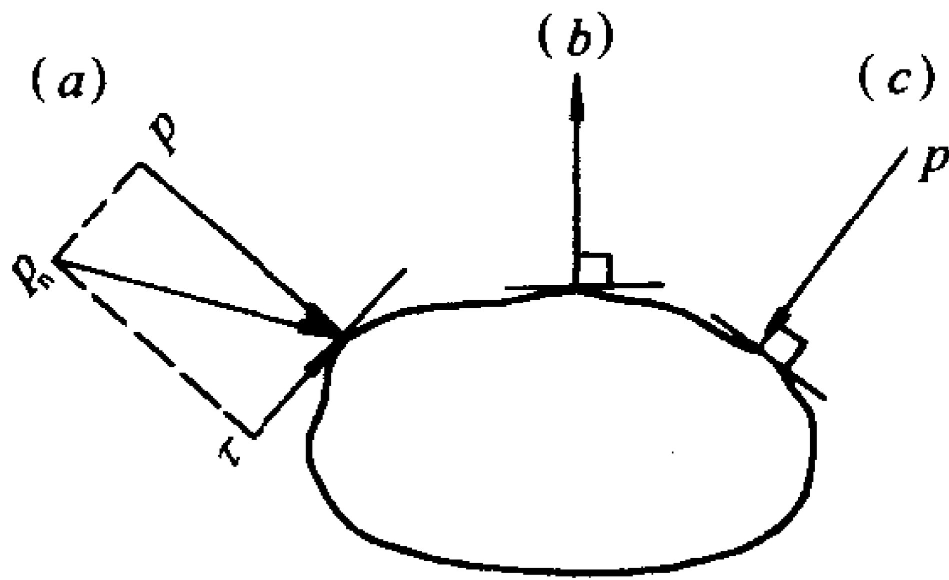


图 2-2　流体静压强方向

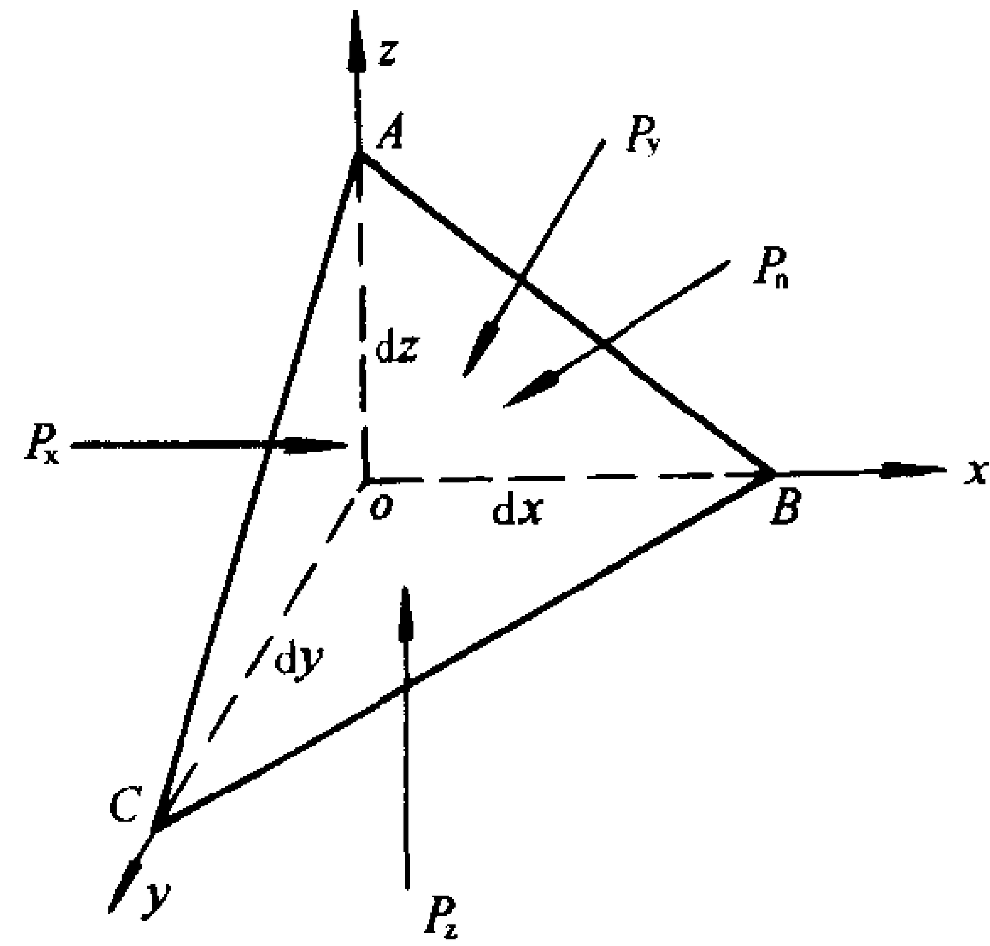


图 2-3　微小四面体平衡

作用于微小四面体 $OABC$ 上的表面力，由于静止或相对静止流体不存在拉力和切力，因此，表面力只有压力。用 P_x、P_y、P_z、P_n分别表示垂直于 x、y、z 轴的平面及倾斜面上的流体静压力，其大小等于作用面积和流体静压强的乘积。即

$$P_x = p_x \cdot \frac{1}{2}dydz$$

$$P_y = p_y \cdot \frac{1}{2}dzdx$$

$$P_z = p_z \cdot \frac{1}{2}dxdy$$

$$P_n = p_n \cdot dA \text{（}dA\text{ 为 }ABC\text{ 倾斜面的面积）}$$

作用在微小四面体上的质量力在各轴向的分力等于单位质量力在各轴向的分力与流体质量的乘积。而流体质量又等于流体密度与微小四面体的体积 $\frac{1}{6}dxdydz$ 的乘积。设单位质量力在 x、y、z 轴的分力分别为 X、Y、Z，则质量力在各轴向的分力为：

$$F_x = \rho \cdot \frac{1}{6}dxdydz \cdot X$$

$$F_y = \rho \cdot \frac{1}{6}dxdydz \cdot Y$$

$$F_z = \rho \cdot \frac{1}{6}dxdydz \cdot Z$$

微小四面体在上述两类力的作用下处于静止或相对静止状态，其外力的轴向平衡关系式可以写成：

$$P_x - P_n\cos(\widehat{n \cdot x}) + F_x = 0 \tag{1}$$

$$P_y - P_n\cos(\widehat{n\cdot y}) + F_y = 0 \qquad (2)$$

$$P_z - P_n\cos(\widehat{n\cdot z}) + F_z = 0 \qquad (3)$$

式中，$(\widehat{n\cdot x})$、$(\widehat{n\cdot y})$、$(\widehat{n\cdot z})$分别表示倾斜面外法线方向 n 与 x、y、z 轴方向的夹角。P_n 前面的负号，是因为流体静压力在相应坐标轴上的投影与其轴正向相反的缘故。

上式第(1)式可以写为：

$$p_x \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - p_n\mathrm{d}A\cos(\widehat{n\cdot x}) + \frac{1}{6}\rho\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot X = 0$$

将 $\mathrm{d}A\cos(\widehat{n\cdot x}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 代入上式，并略去高阶无穷小量，化简移项得：

$$p_x = p_n$$

同理，从第(2)、第(3)式可得：

$$p_y = p_n$$

$$p_z = p_n$$

由此可得：

$$p_x = p_y = p_z = p_n \qquad (2\text{-}1\text{-}3)$$

式(2-1-3)说明在静止或相对静止的流体中，任一点的流体静压强的大小与作用面的方向无关，只与该点的位置有关，这就是流体静压强的第二个特性。这个特性告诉我们：各点的位置不同，压强可能不同；位置一定，则不论取哪个方向，压强的大小完全相等。因此，流体静压强只是空间位置的函数。这样，研究流体静压强的根本问题即研究流体静压强的分布规律问题，就简化为研究压强函数

$$p = f(x, y, z)$$

的问题。我们将在本章第七节中详细讨论这个函数。

第二节　流体静压强的分布规律

现在，根据静止流体质量力只有重力的这个特点，研究静止流体压强分布规律。

一、液体静压强的基本方程式

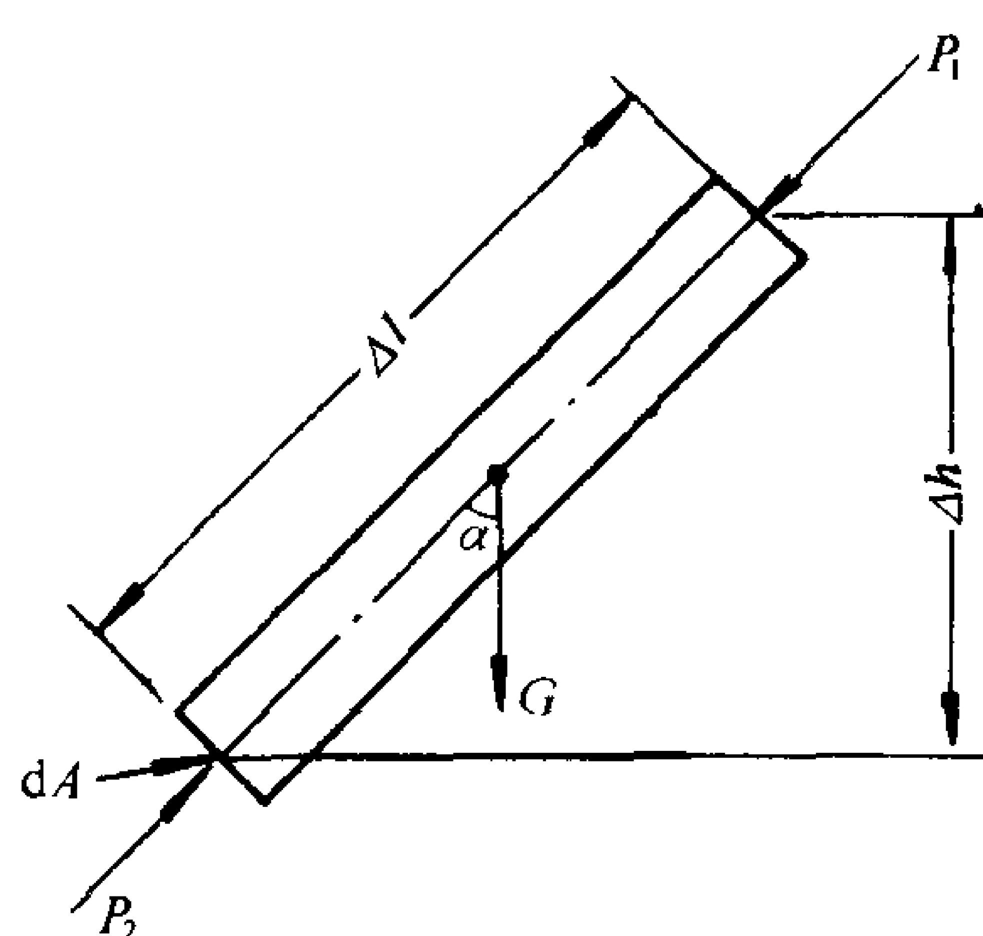


图 2-4　液体内微小圆柱的平衡

在静止液体中，任意取出一倾斜放置的微小圆柱体，微小圆柱体长为 Δl，端面积为 $\mathrm{d}A$，并垂直于柱轴线，如图 2-4。现在，我们研究倾斜微小圆柱体在质量力和表面力共同作用下的轴向平衡问题。

周围的静止液体对圆柱体作用的表面力有侧面压力及两端面的压力。根据流体静压强沿作用面内法线分布的特性，侧面压力与轴向正交，沿轴向没有分力；柱的两端面沿轴向从相反的方向作用的压力为 P_1 和 P_2。

静止液体受的质量力只有重力，而重力是铅直向下作用的，它与轴线的夹角为 α，可以分解为平行于轴向的 $G\cdot\cos\alpha$ 和垂直于轴向的 $G\cdot\sin\alpha$ 两个分力。

因此，倾斜微小圆柱体轴向力的平衡，就是两端压力 P_1、P_2 及重力的轴向分力 $G\cdot\cos\alpha$ 三个力作用下的平衡。即

$$P_2 - P_1 - G \cdot \cos\alpha = 0$$

由于微小圆柱体断面积 dA 极小，断面上各点压强的变化可以忽略不计，即可以认为断面上各点压强是相等的。设圆柱上端面的压强 p_1，下端面的压强 p_2，则两端面的压力为 $P_1 = p_1 \mathrm{d}A$，及 $P_2 = p_2 \mathrm{d}A$，而圆柱体受的重力为液体的容重 γ 乘以 $\Delta l \mathrm{d}A$，即 $G = \gamma \cdot \Delta l \cdot \mathrm{d}A$。代入上式得：

$$p_2 \mathrm{d}A - p_1 \mathrm{d}A - \gamma \cdot \Delta l \mathrm{d}A \cos\alpha = 0$$

消去 dA，并由于 $\Delta l \cdot \cos\alpha = \Delta h$，经过整理得：

$$p_2 - p_1 = \gamma \Delta h \tag{2-2-1}$$

或写成：$\Delta p = \gamma \Delta h$

从式(2-2-1)的推证看出，倾斜微小圆柱体的端面是任意选取的。因此，可以得出普遍关系式：即静止液体中任两点的压强差等于两点间的深度差乘以容重。将上式压差关系改写成压强关系式，则为

$$p_2 = p_1 + \gamma \Delta h \tag{2-2-2}$$

式(2-2-2)表示压强随深度不断增加，而深度增加的方向就是静止液体的质量力——重力作用的方向。所以，压强增加的方向就是质量力的作用方向。

现在，把压强关系式应用于求静止液体内某一点的压强。如图 2-5，设液面压强为 p_0，液体容重为 γ，该点在液面下深度为 h，则根据式(2-2-2)得：

$$p = p_0 + \gamma h \tag{2-2-3}$$

式中 p——液体内某点的压强，Pa(N/m^2)；

p_0——液面气体压强，Pa(N/m^2)；

γ——液体的容重，N/m^3；

h——某点在液面下的深度，m。

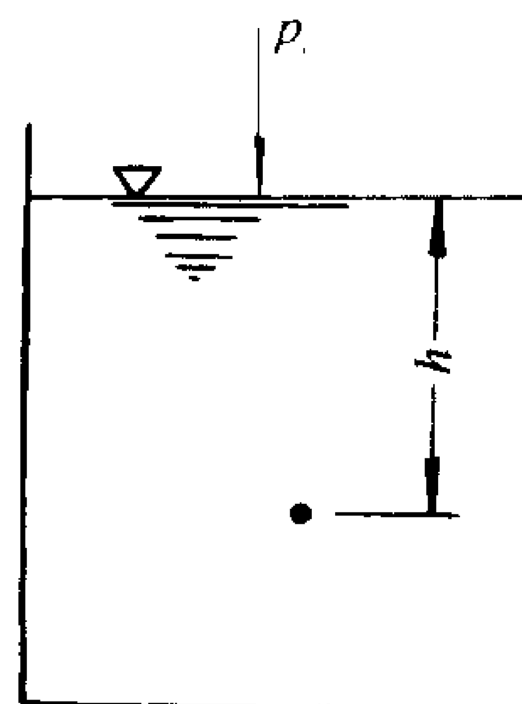


图 2-5 开敞水箱

式(2-2-3)就是液体静力学的基本方程式。它表示静止液体中，压强随深度按直线变化的规律。静止液体中任一点的压强是由液面压强和该点在液面下的深度与容重的乘积两个部分所组成。从这两个部分可以看出，压强的大小与容器的形状无关。因此，不论盛液容器的形状怎么复杂，只要知道液面压强 p_0 和该点在液面下的深度 h，就可用此式求出该点的压强。

从式(2-2-3)可以看出，深度相同的各点，压强也相同，这些深度相同的点所组成的平面是一个水平面，可见水平面是压强处处相等的面。因此得出结论：水平面是等压面。

从式(2-2-3)也可看出，液面压强 p_0 有所增减 $\pm \Delta p_0$，则内部压强 p 亦相应地有所增减 $\pm \Delta p$，但

$$p = p_0 + \gamma h$$

则

$$p \pm \Delta p = p_0 \pm \Delta p_0 + \gamma h$$

两式相减得

$$\Delta p = \Delta p_0$$

可见，静止液体任一边界面上压强的变化，将等值地传到其他各点(只要静止不被破坏)，这

就是水静压强等值传递的帕斯卡定律。该定律在水压机，液压传动，气动阀门，水力闸门等水力机械中得到广泛应用。

【例 2-1】 水池中盛水如图 2-6。已知液面压强 $p_0=98.07\text{kN/m}^2$，求水中 C 点，以及池壁 A、B 点和池底 D 点所受的水静压强。

【解】 A、B、C 三点在同一水平面上，水深 h 均为 1m，所以压强相等。即 $p_A=p_B=p_C=p$。故 $p=p_0+\gamma h=98.07\text{kN/m}^2+9.807\text{kN/m}^3\times1\text{m}=107.88\text{kN/m}^2=107.88\text{kPa}$。

D 点的水深是 1.6m 故

$$p_0=98.07\text{kN/m}^2+98.07\text{kN/m}^3\times1.6\text{m}=113.8\text{kPa}$$

关于压强的作用方向，应根据受力面的方位和承受压力的物质系统而定。例如 A，B，D 三点在固壁上，若考虑液体对固壁的作用，则方向如图中所示。总之，静压强的作用方向垂直于作用面的切平面且指向受力物质（流体或固体）系统表面的内法向。

液体静力学基本方程式(2-2-3)，还可以表示为另一种形式，如图 2-7。设水箱水面的压强为 p_0，水中 1、2 点到任选基准面 0-0 的高度为 Z_1 及 Z_2，压强为 p_1 及 p_2，将式中的深度改为高度差后得：

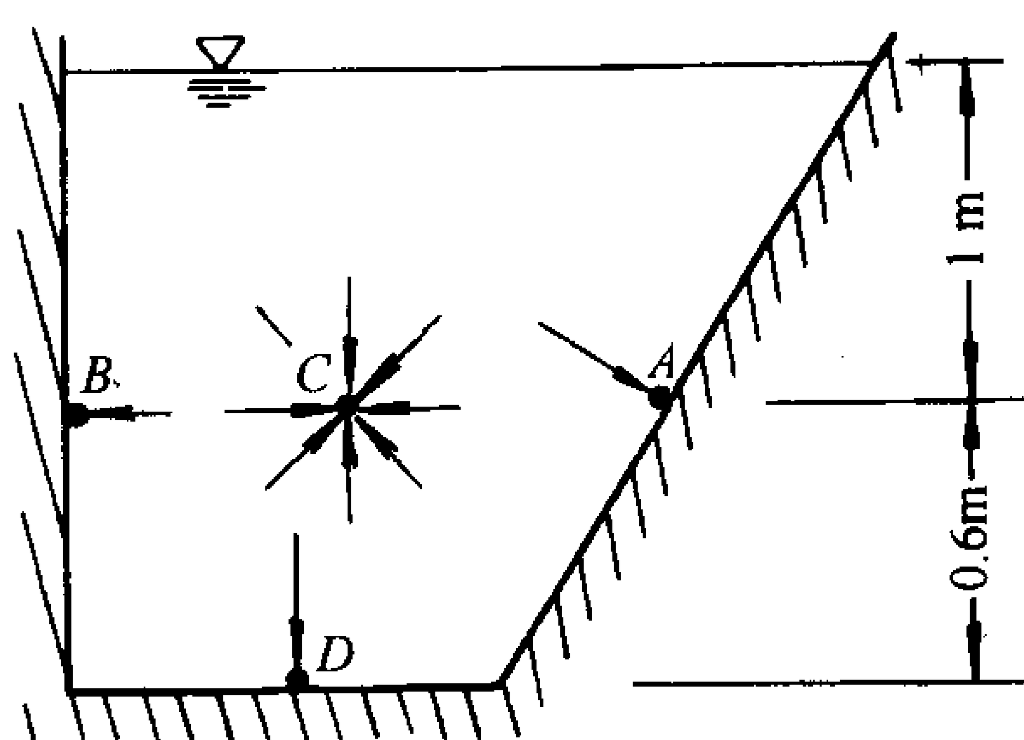


图 2-6 池壁和水体的点压强

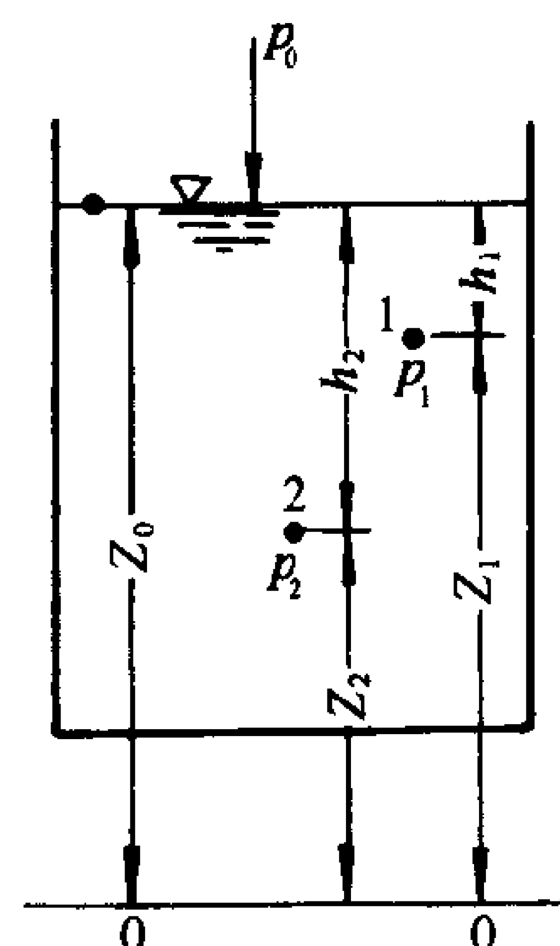


图 2-7 液体静力学方程推证

$$p_1=p_0+\gamma(Z_0-Z_1)$$

$$p_2=p_0+\gamma(Z_0-Z_2)$$

上式除以容重 γ，并整理后得：

$$Z_1+p_1/\gamma=Z_0+p_0/\gamma$$

$$Z_2+p_2/\gamma=Z_0+p_0/\gamma$$

两式联立得

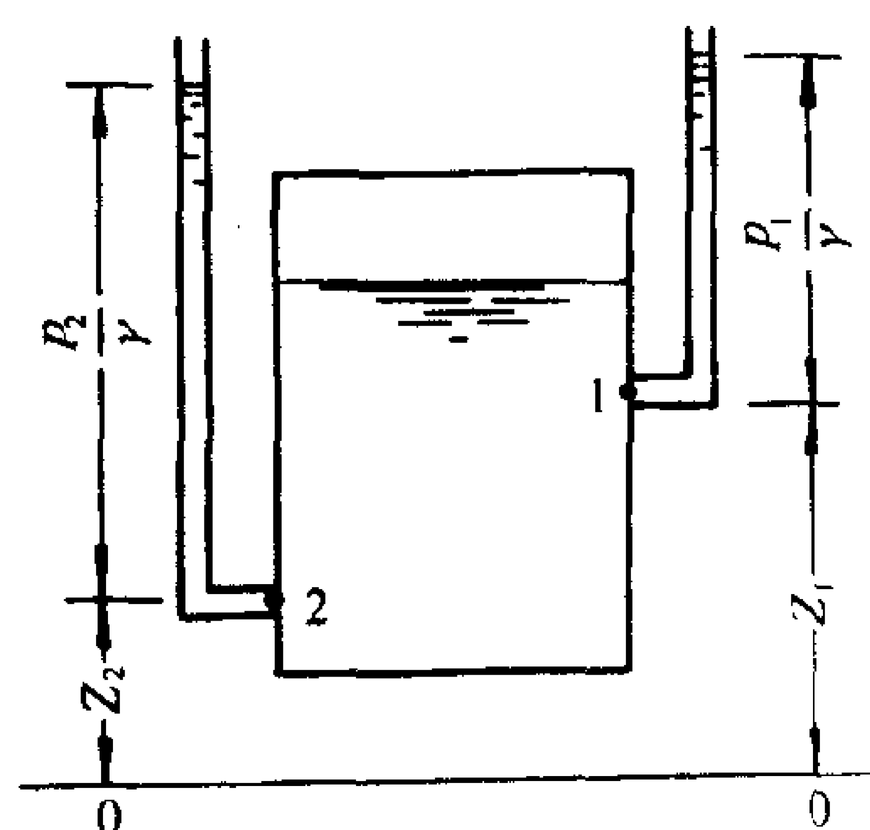
$$Z_1+p_1/\gamma=Z_2+p_2/\gamma=Z_0+p_0/\gamma$$

水中 1、2 点是任选的，故可将上述关系式推广到整个液体，得出具有普遍意义的规律。即：

$$Z+p/\gamma=C(\text{常数}) \tag{2-2-4}$$

这就是液体静力学基本方程式的另一种形式，也是我们常用的水静压强分布规律的一种形式。它表示在同一种静止液体中，不论哪一点的$(Z+p/\gamma)$总是一个常数。式中 Z 为该点的位置相对于基准面的高度，称位置水头。p/γ 是该点在压强作用下沿测压管所能上升的高度，称压强水头。所谓测压管是一端和大气相通，另一端和液体中某一点相接的管

子,如图 2-8。两水头相加($Z+p/\gamma$)称测压管水头,它表示测压管水面相对于基准面的高度。两水头相加等于常数($Z+p/\gamma=C$),表示同一容器的静止液体中,所有各点的测压管水头均相等。即使各点的位置水头 Z 和压强水头 p/γ 互不相同,但各点的测压管水头必然相等。因此,在同一容器的静止液体中,所有各点的测压管水面必然在同一水平面上。测压管水头中的压强 p 必须采用相对压强表示,相对压强的概念在下节讲述。


图 2-8 测压管水头

二、分界面和自由面是水平面

两种容重不同互不混合的液体,在同一容器中处于静止状态,一般是重的在下,轻的在上,两种液体之间形成分界面。这种分界面既是水平面又是等压面。现在,我们从反面证明如下:

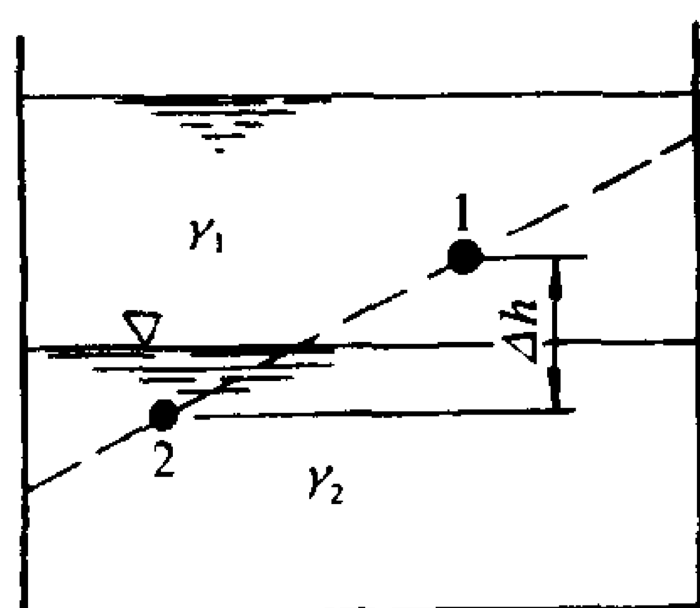

图 2-9 分界面是水平面的推证

图 2-9 盛有 $\gamma_2>\gamma_1$ 的两种不同液体,设分界面不是水平面而是倾斜面,我们在分界面上任选 1、2 两点,其深度差为 Δh,根据压差关系式,从分界面上、下两方分别求压差为:

$$\Delta p = \gamma_1 \Delta h$$
$$\Delta p = \gamma_2 \Delta h$$

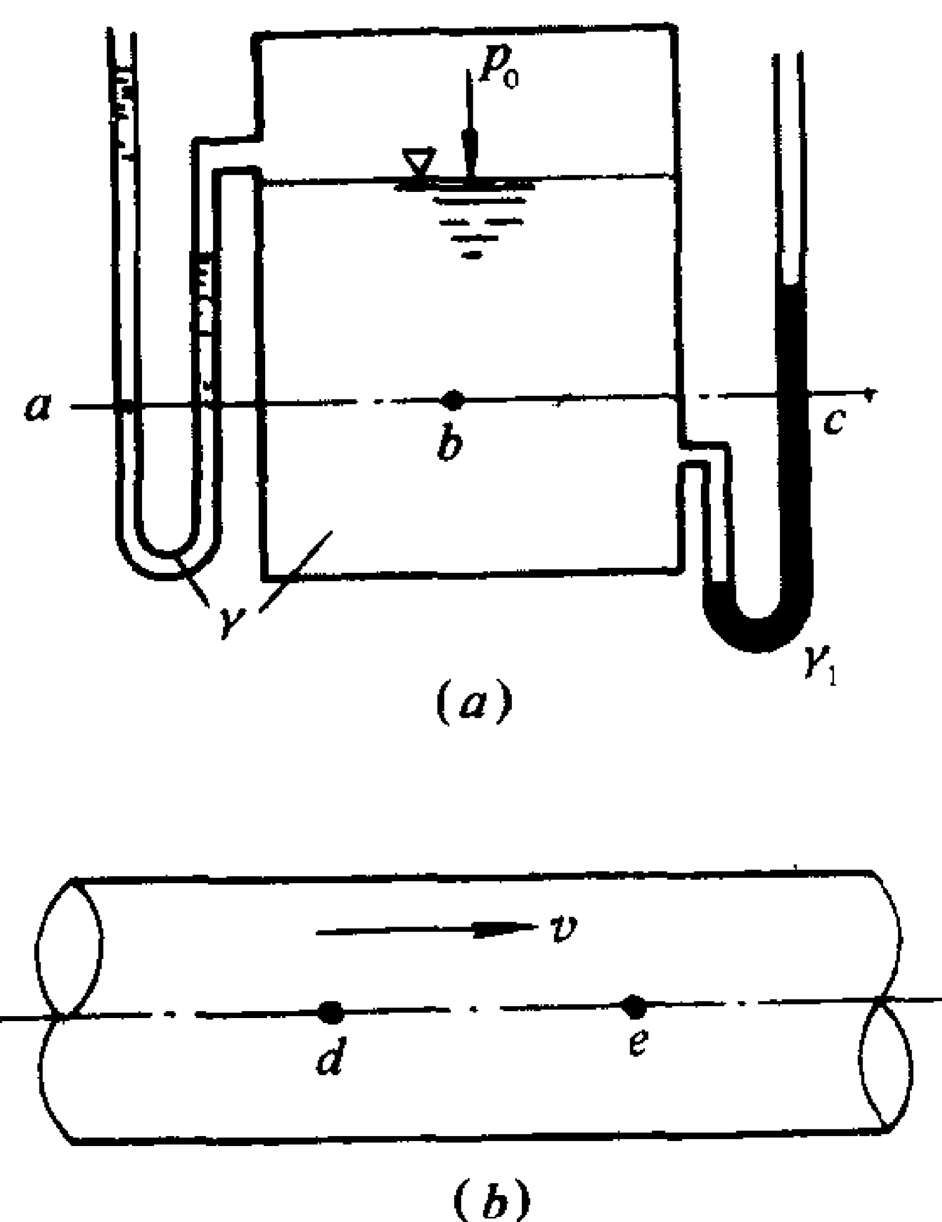
两式相减:

$$(\gamma_2 - \gamma_1)\Delta h = 0$$

由于液体容重不等于零,且 $\gamma_2>\gamma_1$,上式关系的满足,必然是 $\Delta h=0$,即分界面是水平面,不可能是倾斜面。将 $\Delta h=0$ 代入压差关系式,得 $\Delta p=0$。这就证明分界面是等压面,所以,分界面既是水平面又是等压面。

静止的液体和气体接触的自由面,受到相同的气体压强,所以,自由面是分界面的一种特殊形式。它既是等压面,也是水平面。事实上,水平面这个概念就是从静止的水面、湖面、池面等具体形式抽象出来的。

这里需要指出:上述规律是在同种液体处于静止、连续的条件下推导出来的。因此,液体静压强分布规律只适用于静止、同种、连续液体。如不能同时满足这三个条件,就不能应用上述规律。例如,不能同时满足这三个条件的水平面就不一定是等压面。如图 2-10a 中 a 和 b 两点,虽属静止、同种,但不连续,中间被气体隔开了,所以,同在一个水平面上的 a、b 两点压强不相等。又如同图中 b、c 两点,虽属静止、连续,但不同种,所以,同在一个水平面上的 b、c 两点压强也不相等。又如图 2-10b 中的 d、e 两点,虽属同种、连续,但不静止,管中是流动的液体,所以,同在一个水平面上的 d、e 两点压强也不相等。


图 2-10 等压面条件

最后,还应指出,如果同一容器或同一连通器盛有多种不同容重的液体,要从某一种液体中某一点的已知压强,求另一种液体中另一点的未知压强时,必须先求出两

种液体间的分界面的压强，进而求出未知的压强。如果这两种液体不是直接相联的，那么就应该求出相互连通的各段液体的分界面的压强。总之，多种液体在同一容器或连通管的条件下求压强或压差，必须注意把分界面作为压强关联的联系面。举例如下：

【例 2-2】 容重为 γ_a 和 γ_b 的两种液体，装在图 2-11 的容器中，各液面深度如图所示。若 $\gamma_b = 9.807\text{kN/m}^3$，大气压强 $p_a = 98.07\text{kN/m}^2$，求 γ_a 及 p_A。

【解】 先求 γ_a，由于自由面的压强均等于大气压强，所以，$p_1 = p_4 = p_a = 98.07\text{kN/m}^2$

根据静止、连续、同种液体的水平面为等压面的规律，$p_2 = p_3$。但是从式(2-2-3)得：

$$p_2 = p_a + \gamma_a \times 0.5$$

$$p_3 = p_a + \gamma_b(0.85 - 0.5)$$

由于 $p_2 = p_3$，故得

$$0.5\gamma_a = (0.85 - 0.5)\gamma_b = 0.35\gamma_b$$

所以

$$\gamma_a = 0.7\gamma_b = 0.7 \times 9.807\text{kN/m}^3 = 6.865\text{kN/m}^3$$

再求 A 点的压强 p_A。先求出分界面上的压强，然后，应用分界面是多种液体压强关系的联系面，再求出分界面以下 A 点的压强 p_A。

分界面 2-2 是等压面，面上各点压强相等，即：

$$p_2 = p_a + 0.5\text{m} \times \gamma_a = 98.07\text{kN/m}^2 + 0.5\text{m} \times 6.865\text{kN/m}^3 = 101.503\text{kN/m}^2 = 101.503\text{kPa}$$

再根据分界面上的压强 p_2，求 A 点的压强 p_A 为：

$$p_A = p_2 + 0.5\text{m} \times \gamma_b = 101.53\text{kN/m}^2 + 0.5\text{m} \times 9.807\text{kN/m}^3 = 106.407\text{kN/m}^2 = 106.407\text{kPa}$$

实际上，求 A 点的压强，可以不先求出分界面上的压强，就直接以分界面为压强关系的联系面，一次就可求出 A 点的压强。即

$$p_A = p_a + 0.5\gamma_a + 0.5\gamma_b = 98.07 + 0.5(6.865 + 9.807) = 106.407\text{kN/m}^2 = 106.407\text{kPa}$$

另外，我们也可以根据容器底面水平的特点，利用水平面是等压面的规律，从容器左端一次求出 A 点压强。即

$$p_A = p_a + \gamma_b \times 0.85 = 106.407\text{kPa}$$

三、气体压强计算

以上规律，虽然是在液体的基础上提出来的，但对于不可压缩气体也仍然适用。

由于气体容重很小的特点，在高差不大的情况下，气柱产生的压强值很小，因而可以忽略 γh 的影响，则式(2-2-3)简化为：

$$p = p_0$$

表示空间各点气体压强相等，例如液体容器，测压管、锅炉等上部的气体空间，我们就认为各点的压强也是相等的。

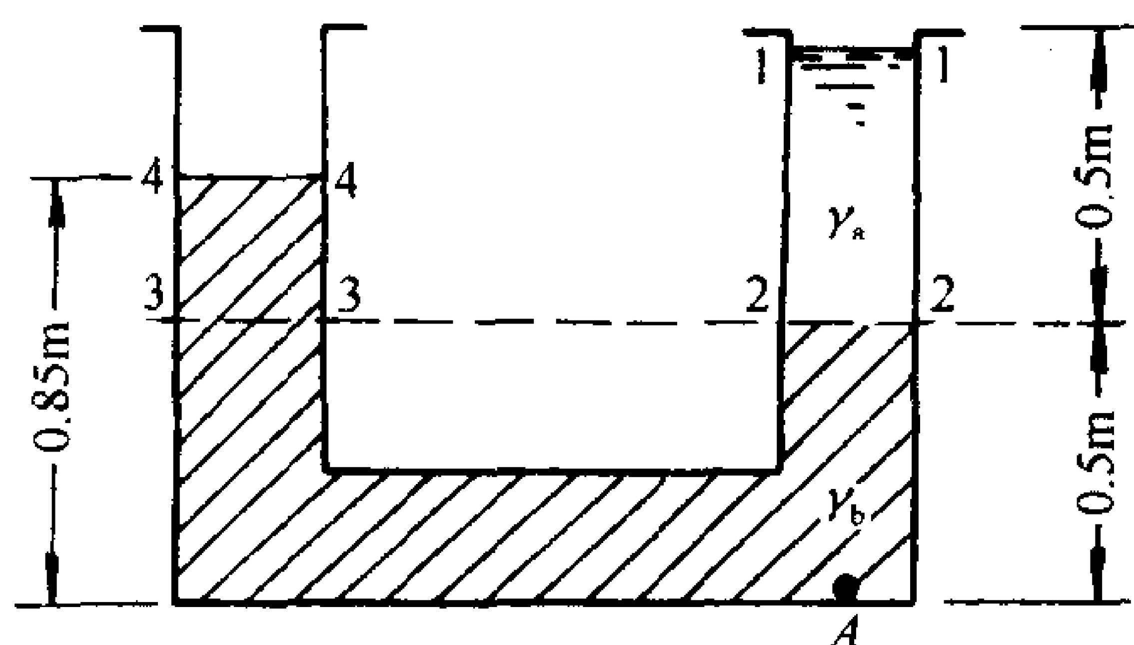


图 2-11 多种液体

四、等密面是水平面

前面论证了静止均质流体的水平面是等压面，现

在提出一个问题，它是否也适用于静止非均质流体呢？为了回答这个问题，我们在静止非均质流体中，取轴线水平的微小圆柱体如图 2-12，分析轴向受力平衡。

我们知道，作用在静止流体上的质量力只有重力，重力作用铅直向下，侧面压力垂直于轴线，所以，这两种力沿轴向均无分力。沿轴向外力的平衡，表现为两端面压力相等。又由于两端面的面积相等，则压强也必然相等。即

$$p_1 = p_2$$

圆柱体轴线在水平面上是任意选取的，两点压强相等，说明水平面上各点压强相等。即静止非均质流体的水平面仍然是等压面。

现在进一步问，水平面上的容重是否变化呢？为回答这个问题，我们仍然在静止非均质流体内部，选取相距为 Δh 的两个水平面，并在它们之间任选 a、b 两个铅直微小柱体，如图 2-13 所示。分别计算它们的压强差为：

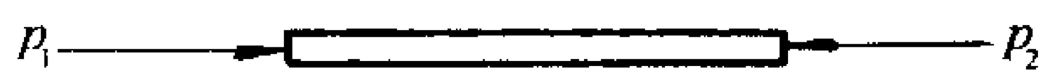


图 2-12　水平面上压强分布

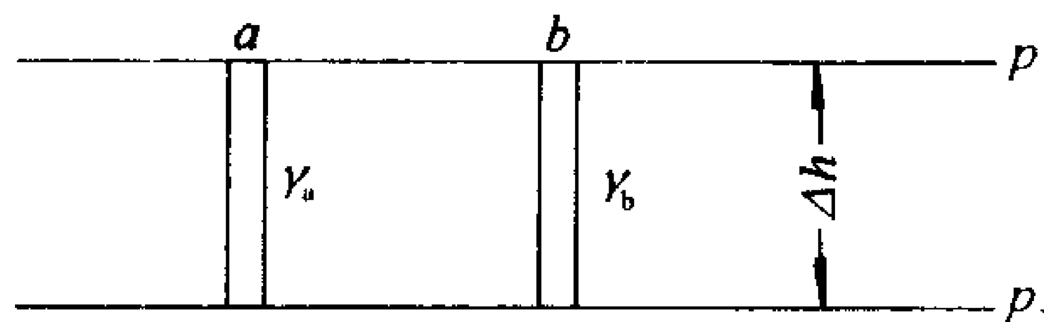


图 2-13　水平面上容重分布

$$\Delta p = \gamma_a \Delta h \qquad \Delta p = \gamma_b \Delta h$$

式中，γ_a 和 γ_b 为柱体 a 和 b 的平均容重。由于两水平面是等压面，所以，两柱体的压强差相等，因而 γ_a 必等于 γ_b。否则，流体就不会静止，而要流动。当两等压面无限接近，即 $\Delta h \to 0$ 时，γ_a 和 γ_b 就变成同一等压面上两点的容重，此两点容重相等，说明水平面不仅是等压面，而且是等容重面。容重与密度成正比，所以，等容重面也是等密度面。根据状态方程，压强、密度相等，温度也必然相等。所以，静止非均质流体的水平面是等压面，等密面和等温面。这个结论是有实际意义的，在自然界中，大气和静止水体，室内空气，它们均按密度和温度分层，是很重要的自然现象。

第三节　压强的计算基准和量度单位

在工程技术上，量度流体中某一点或某一空间点的压强，可以用不同的基准和量度单位。

一、压强的两种计算基准

压强有两种计算基准：绝对压强和相对压强。

以毫无一点气体存在的绝对真空为零点起算的压强，称为绝对压强。以 p' 表示。当问题涉及流体本身的性质，例如采用气体状态方程进行计算时，必须采用绝对压强。

当地同高程的大气压强 p_a 为零点起算的压强。则称为相对压强，以 p 表示。

采用相对压强基准，则大气压强的相对压强为零。即

$$p_a = 0$$

相对压强、绝对压强和大气压强的相互关系是：

$$p = p' - p'_a \tag{2-3-1}$$

某一点的绝对压强只能是正值，不可能出现负值。但是，某一点的绝对压强可能大于大

气压强，也可能小于大气压强，因此，相对压强可正可负。当相对压强为正值时，称该压强为正压(即压力表读数)，为负值时，称为负压。负压的绝对值又称为真空度(即真空表读数)，以 p_v 表示。即当 $p<0$ 时，

$$p_v=-p=-(p'-p'_a)=p'_a-p' \tag{2-3-2}$$

为了区别以上几种压强，现以 A 点($p'_A>p'_a$)和 B 点($p'_B<p'_a$)为例，将它们的关系表示在图 2-14 上。

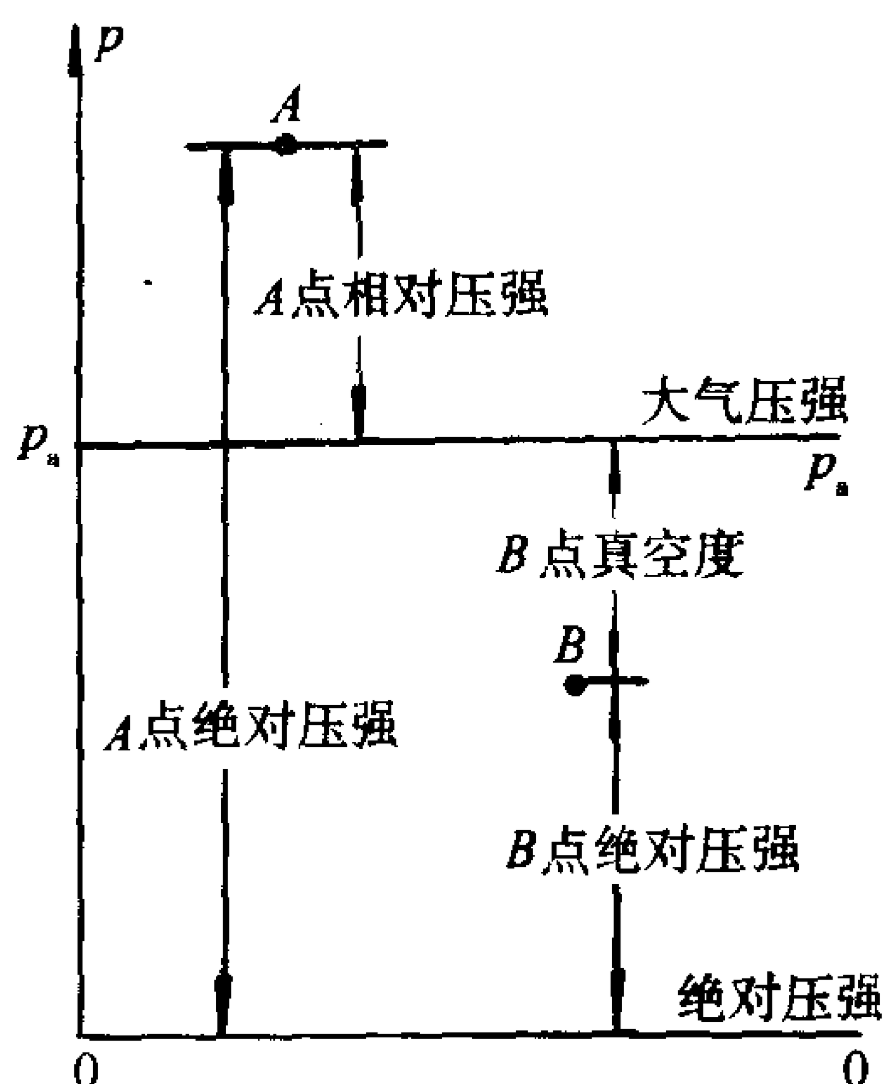


图 2-14　压强的图示

今后，在不会引起混淆的情况下，也可用 p 表示绝对压强。

为了理解相对压强的实际意义，现以图 2-15 的气体容器中的几种情况来说明：

1. 假定容器的活塞打开，容器内外气体压强一致，$p_0=p_a$，相对压强为零。容器内(或外)壁所承受的气体压强为大气压强，约等于 98.07kN/m²。但是，器壁两边同时作用着大小相等方向相反的力，力学效应相互抵消，等于没有受力。

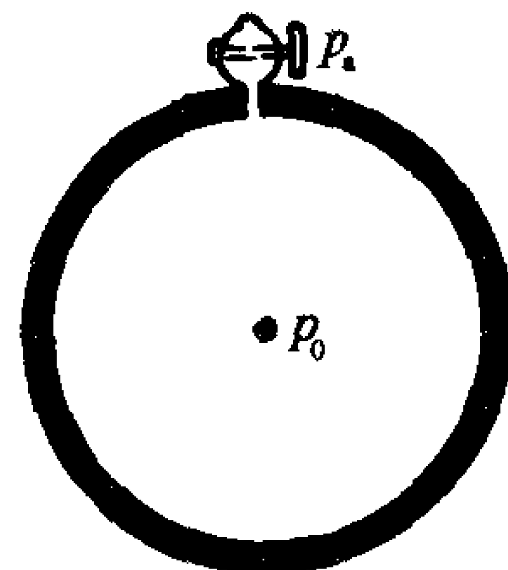


图 2-15　相对压强的力学作用

2. 假定容器的压强 $p_0>0$，这个超过大气压强的部分，对器壁产生的力学效应，使器壁向外扩张。如果打开活塞，气流向外流出，而且流出的速度与相对压强的大小有关。

3. 假定容器压强 $p_0<0$。同样的，也正是这个低于大气压强的部分，才对器壁产生力学效应，使容器向内压缩。如果打开活塞，空气一定会吸入，吸入的速度也和负的相对压强大小有关。

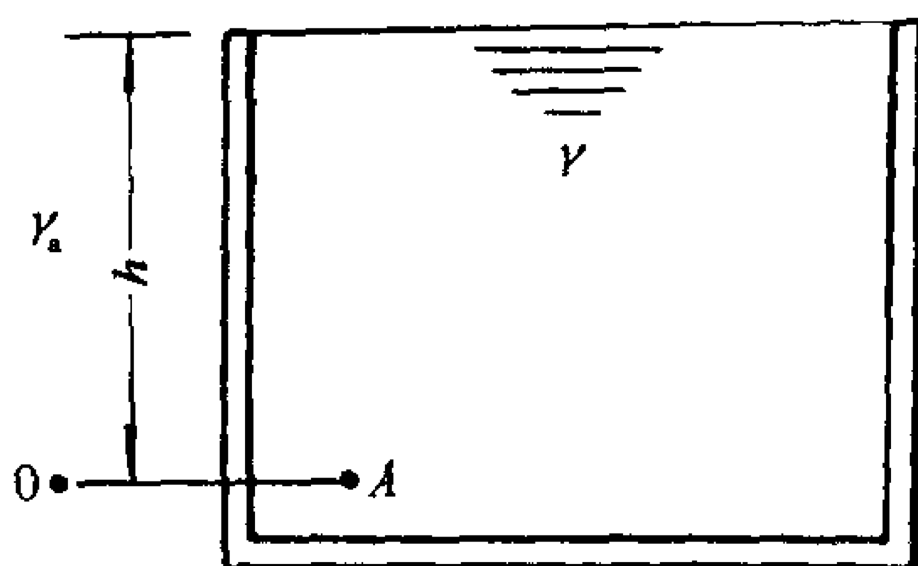


图 2-16　A 点相对压强

上例说明，引起固体和流体力学效应的只是相对压强的数值，而不是绝对压强的数值。

此外，绝大部分测量压强的仪表，都是与大气相通的或者是处于大气压的环境中。因此工程技术中广泛采用相对压强。以后讨论所提压强，如未说明，均指相对压强。

现以图 2-16 开敞容器中静止流体的 A 点为例，说明相对压强的计算。设容器外与 A 点同高程点的大气压为 0，应用流体静止压强基本方程式，利用分界面是压强关系的联系面，则 A 点的相对压强为：

$$p_A=p_B+\gamma h=(0-\gamma_a h)+\gamma h=(\gamma-\gamma_a)h \tag{2-3-3}$$

如果容器中的流体为液体，我们知道，液体的容重远大于大气容重 γ_a，在工程计算中可以忽略空气柱产生的压强变化，则 A 点的相对压强简化为：

$$p_A=\gamma h \tag{2-3-4}$$

这说明，计算液体相对压强，可以将同高程的大气压强为 0，简化成液面大气压强为 0。这就是实际工程中最常用的计算公式。

容器中流体为气体的情况，我们将在第三章气流能量方程式一节中全面阐述。

二、压强的三种量度单位

第一种单位是从压强的基本定义出发，用单位面积上的力表示，即力/面积。国际单位为 N/m^2，以符号 Pa 表示，工程单位为 kgf/m^2 或 kgf/cm^2。

第二种单位是用大气压的倍数来表示。国际上规定标准大气压用符号 atm 表示，(温度为 0℃时海平面上的压强，即 760mmHg)为 101.325kPa，即 1atm = 101.325kPa。工程单位中规定大气压用符号 at 表示(相当于海拔 200m 处正常大气压)，为 $1kgf/cm^2$，即 $1at = 1kgf/cm^2$，称为工程大气压。例如，某点绝对压强为 303.975kPa，则称绝对压强为三个标准大气压，或称相对压强为两个标准大气压。

第三种单位是用液柱高度来表示，常用水柱高度或汞柱高度，其单位为 mH_2O、mmH_2O、或 mmHg，这种单位可从式(2-3-4) $p = \gamma h$ 改写成：

$$h = p/\gamma$$

只要知道液柱容重 γ，h 和 p 的关系就可以通过上式表现出来。因此，液柱高度也可以表示压强，例如一个标准大气压相应的水柱高度为：

$$h = \frac{101325N/m^2}{9807N/m^3} = 10.33m$$

相应的汞柱高度为：

$$h' = \frac{101325N/m^2}{133375N/m^3} = 0.76m = 760mm$$

又如一个工程大气压相应的水柱高度为：

$$h = \frac{10000kgf/m^2}{1000kgf/m^3} = 10m$$

相应的汞柱高度为：

$$h' = \frac{10000kgf/cm^2}{13600kgf/m^3} = 0.736m = 736mm$$

压强的上述三种量度单位是我们经常用到的，不仅要求读者熟记，而且要求能灵活掌握应用。

在通风工程中常遇到较小的压强，对于较小的压强可用 mmH_2O 来表示：

对于国际单位，根据 $101325N/m^2 = 10.33mH_2O$ 的关系换算为：

$$1mmH_2O = 9.807N/m^2$$

对于工程单位，也可以根据 $10000kgf/m^2 = 10mH_2O$ 的关系换算为：

$$1mmH_2O = 1kgf/m^2$$

为了掌握上述单位的换算，兹将国际单位制和工程单位制中各种压强的换算关系列入表 2-1，以供换算使用。

国际单位与工程单位换算关系 **表 2-1**

压强名称	Pa (N/m^2)	kPa ($10^3N/m^2$)	bar ($10^5N/m^2$)	mmH_2O (kgf/m^2)	at ($10^4kgf/m^2$)	标准大气压 ($1.0332\cdot10^4kgf/m^2$)	mmHg
换算关系	9.807	$9.807\cdot10^{-3}$	$9.807\cdot10^{-5}$	1	10^{-4}	$9.678\cdot10^{-5}$	0.07356
	$9.807\cdot10^4$	$9.807\cdot10$	$9.807\cdot10^{-1}$	10^4	1	$9.678\cdot10^{-1}$	735.6
	101325	101.325	1.01325	10332.3	1.03323	1	760
	133.332	0.13333	$1.3333\cdot10^{-3}$	13.595	$1.3595\cdot10^{-3}$	$1.316\cdot10^{-3}$	1

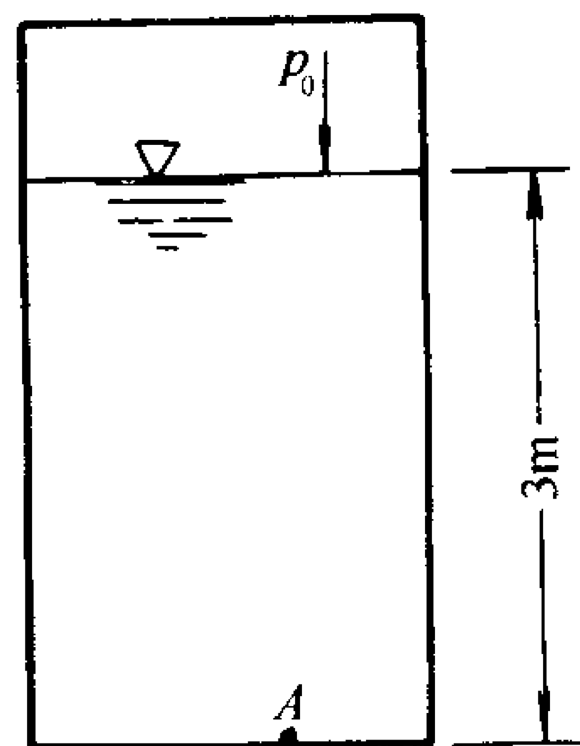


图 2-17　封闭水箱

【例 2-3】 封闭水箱如图 2-17。自由面的绝对压强 $p_0=122.6kN/m^2$,水箱内水深 $h=3m$,当地大气压 $p_a=88.26kN/m^2$。求(1)水箱内绝对压强和相对压强最大值。(2)如果 $p_0=78.46kN/m^2$,求自由面上的相对压强、真空度或负压。

【解】 从压强与水深的直线变化规律可知,水最深的地方压强最大。所以,水箱底面压强最大。

(1)求压强最大值 p_A绝对压强最大值:以单位面积上的力表示

$$p_A' = p'_0 + \gamma h = 122.6kN/m^2 + 9.807kN/m^3 \times 3m = 152kN/m^2$$

以水柱高度表示 $h = p'_A/\gamma = \dfrac{152kN/m^2}{9.807kN/m^3} = 15.5m$

以标准大气压表示

$$\frac{152kN/m^2 \times 1\text{ 标准大气压}}{101.325kN/m^2} = 1.5\text{ 标准大气压}$$

相对压强最大值:

$$p_A = p'_A - p'_a = 152 - 88.26 = 63.74kN/m^2$$

或是 0.63 标准大气压,或是 $6.5mH_2O$。

(2)当液面压强 $p_0=78.46kN/m^2$ 时,自由面上的相对压强为:

$$p = p'_0 - p'_a = 78.46 - 88.26 = -9.8kN/m^2 = -0.097\text{ 标准大气压} = -1mH_2O$$

真空度 $p_V = p'_a - p'_0 = 88.26 - 78.46 = 9.8kN/m^2 = 0.097$ 标准大气压 $= 1mH_2O$

第四节　液柱测压计

测量流体的压强是工程上极其普遍的要求,如锅炉、压缩机、水泵、风机、鼓风机等均装有压力计及真空计。常用的有弹簧金属式、电测式和液柱式三种。由于液柱式测压计直观、方便和经济,因而在工程上得到广泛的应用。下面介绍几种常用的液柱式测压计:

一、测压管

测压管是一根玻璃直管或 U 形管,一端连接在需要测定的器壁孔口上,另一端开口,直接和大气相通,如图 2-18。由于相对压强的作用,水在管中上升或下降,与大气相接触的液面相对压强为零。这就可以根据管中水面到所测点的高度直接读出水柱高度。

图 2-18a 中,测压管水面高于 A 点,p_A 为正值。即

$$p_A = \gamma h_A$$

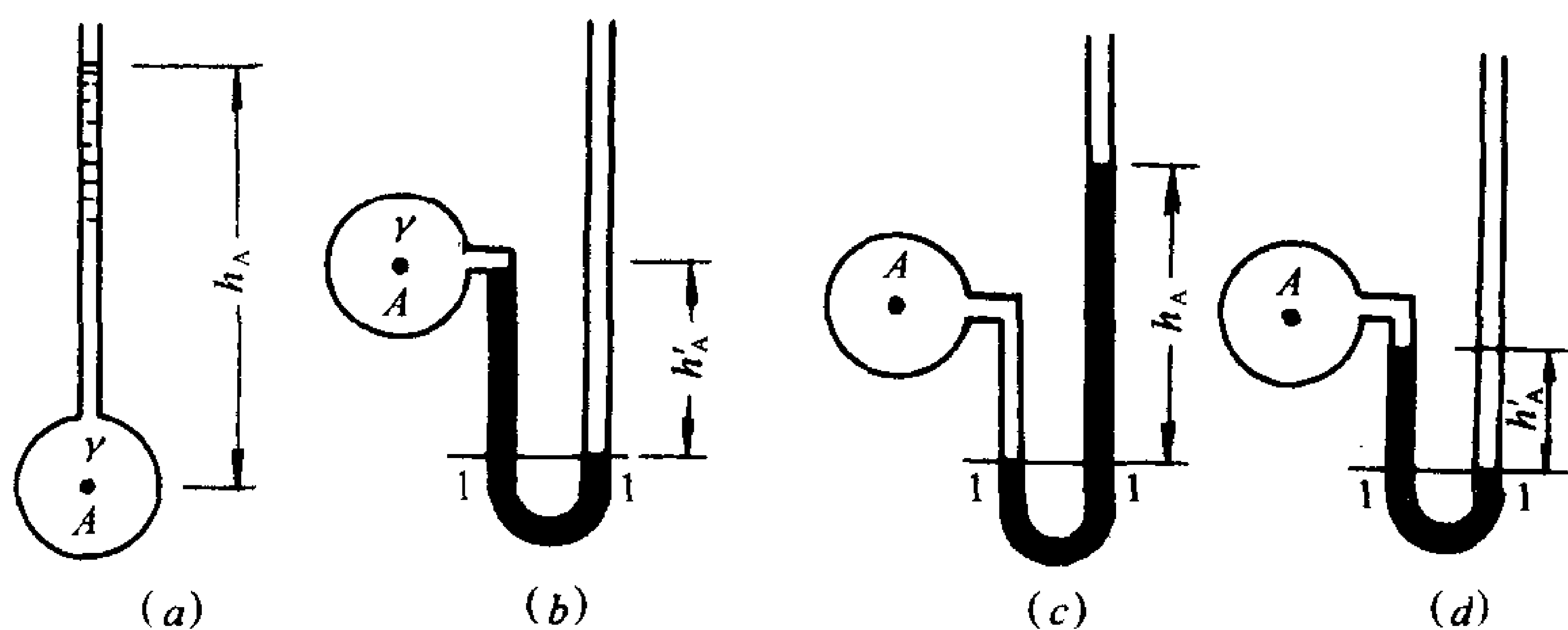


图 2-18　测压管

图 2-18b 中，测压管水面低于 A 点，以 1-1 为等压面，则

$$p_A + \gamma h'_A = 0$$

故 A 点的负压或真空度为：

$$p_A = -\gamma h'_A \text{ 或 } p_v = \gamma h'_A$$

如果需要测定气体压强，可以采用 U 形管盛水，如图 2-18c。因为空气容重远小于水，一般容器中的气体高度又不十分大，因此，可以忽略气柱高度所产生的压强。认为静止气体充满的空间各点压强相等。现仍以 1-1 为等压面，则

$$p_A = \gamma h_A$$

可见，右端测压管水面高于左端时，液柱高度就是容器气体压强的正压

图 2-18d 中，测压管水面低于 A 点，现仍以 1-1 为等压面，则

$$p_A + \gamma h_A' = 0$$

故容器内气体压强的负压或真空度为：

$$p_A = -\gamma h_A' \text{ 或 } p_V = \gamma h_A'$$

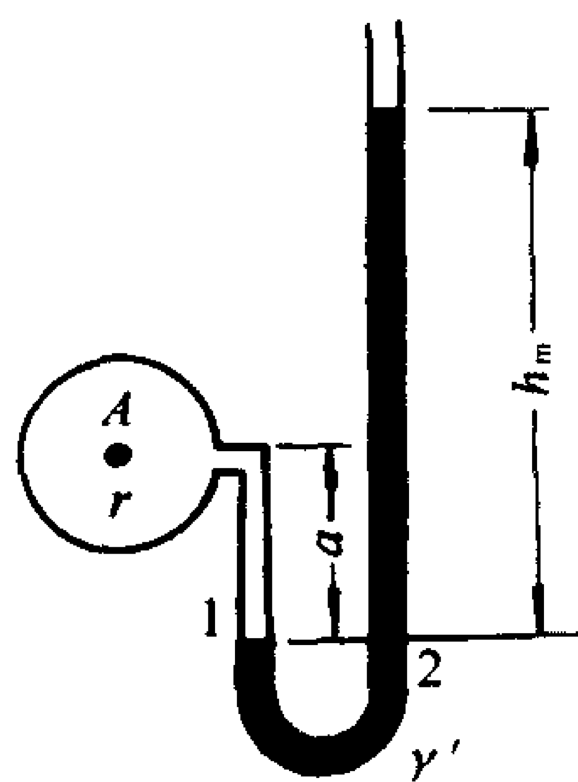


图 2-19　水银测压

如果测压管中液体的压强较大，测压水柱过高，观测不便，可在 U 形管中装入水银，如图 2-19。根据等压面规律，U 形管 1、2 两点的压强相等，即 $p_1 = p_2$。所以

$$p_A + \gamma a = \gamma' h_m$$

故得

$$p_A = \gamma' h_m - \gamma a$$

或

$$p_A/\gamma = \frac{\gamma'}{\gamma} h_m - a$$

还应指出，在观测精度要求高，或所用管径较小时，需要考虑毛细管作用对液柱高度读数产生的影响。

二、压差计

压差计是测定两点间压强差的仪器，常用 U 形管制成。根据压差的大小，U 形管中采用空气或各种不同容重的液体，仍然应用等压面规律进行压差计算。

图 2-20a 为测定 A、B 两处液体压强差的空气压差计，由于气柱高度不大，可以认为两液面为等压面，故得

$$p_A - \gamma(y + h_m - a) = p_B - \gamma y$$

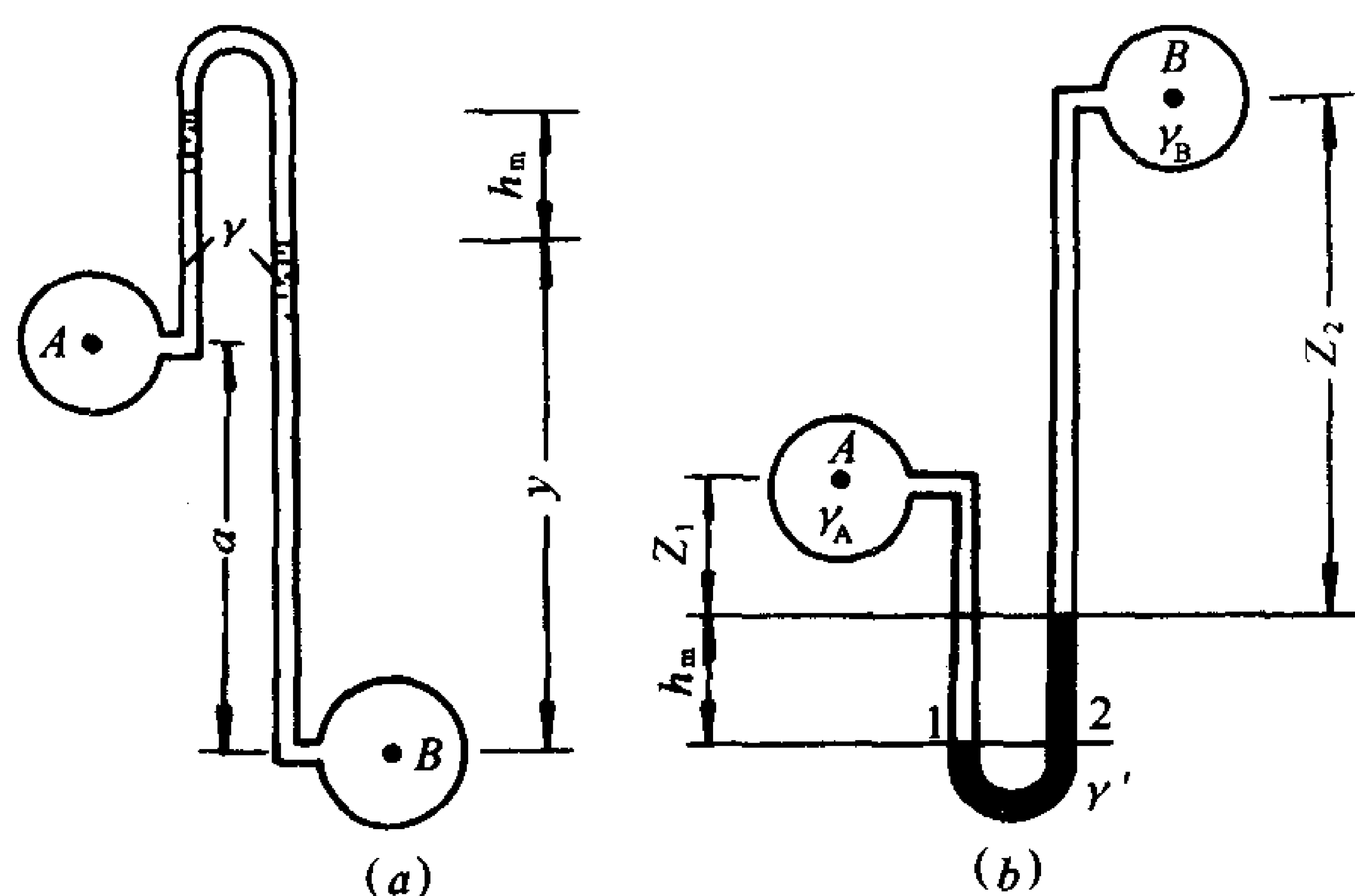


图 2-20　压差计

故
$$p_A - p_B = \gamma(h_m - a) \tag{2-4-1}$$

当需要测定的压差较大时,采用图 2-20b 所示的水银压差计。根据 1、2 点为等压面得:

$$p_A + \gamma_A(Z_1 + h_m) = p_B + \gamma_B Z_2 + \gamma' h_m$$

故
$$p_A - p_B = (\gamma' - \gamma_A)h_m + \gamma_B Z_2 - \gamma_A Z_1$$

如 A、B 两处为同种液体,即 $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$,则

$$p_A - p_B = (\gamma' - \gamma)h_m + \gamma(Z_2 - Z_1) \tag{2-4-2}$$

如 A、B 两处为同种液体,且在同一高程,即 $Z_1 = Z_2$,则

$$p_A - p_B = (\gamma' - \gamma)h_m \tag{2-4-3}$$

在这种情况下,压强差就等于容重差乘以水银柱差。

如果,A、B 两处为同一气体,则

$$p_A - p_B = \gamma' h_m \tag{2-4-4}$$

在这种情况下,压强差就等于水银柱差所产生的压强。

三、微压计

在测定微小压强(或压差)时,为了提高量测的精度,可以采用微压计。微压计一般用于测定气体压强,它的测压管是倾斜放置的,其倾角为 α,如图 2-21。壶中液面与测压管中液面高差 h 的读数为 l,而 $h = l\cdot\sin\alpha$,则

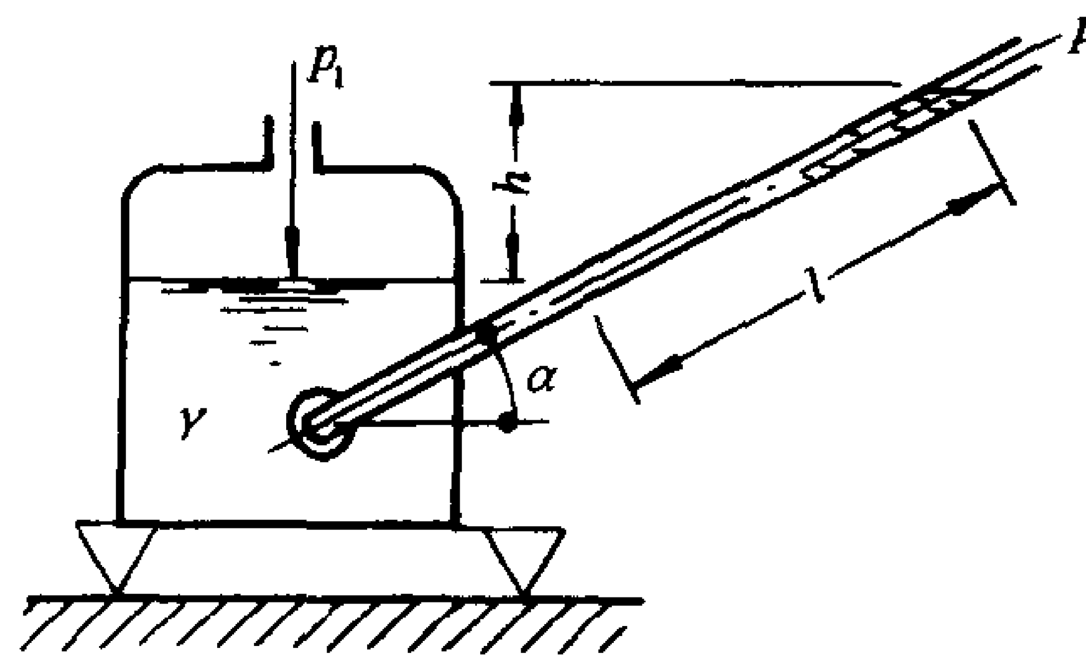


图 2-21　微压计

$$p_1 - p_2 = \gamma l\cdot\sin\alpha \tag{2-4-5}$$

当测定时 α 为定值,只需测得倾斜长度 l,就可得出压差。由于 $l = h/\sin\alpha$,当 $\sin\alpha = 0.5$ 时,$l = 2h$;当 $\sin\alpha = 0.2$ 时,$l = 5h$。说明倾斜角度越小,l 比 h 放大的倍数就越大,量测的精度就更高。由上式还可知,γ 愈小,读数 l 就越大。因此,工程上常用容重比水更小的液体,例如酒精(纯度 95% 的酒精,$\gamma = 7.944\text{kN/m}^3$)以提高精度。

【例 2-4】 对于压强较高的密封容器,可以采用复式水银测压计,如图 2-22。测压管中各液面高程为:$\nabla_1 = 1.5\text{m}$,$\nabla_2 = 0.2\text{m}$,$\nabla_3 = 1.2\text{m}$,$\nabla_4 = 0.4\text{m}$, $\nabla_5 = 2.1\text{m}$。求液面压强 p_5。

【解】 根据等压面的规律,2-2,3-3 及 4-4 都分别为等压面。则

$$p_2 = \gamma'(\nabla_1 - \nabla_2)$$

由于气体容重远小于液体容重，因此，2-2 及 3-3 间气柱所产生的压强可以忽略不计。即认为 $p_2 = p_3$。于是

$$\begin{aligned} p_4 &= p_3 + \gamma'(\nabla_3 - \nabla_4) = p_2 + \gamma'(\nabla_3 - \nabla_4) \\ &= \gamma'(\nabla_1 - \nabla_2) + \gamma'(\nabla_3 - \nabla_4) \\ &= \gamma'(\nabla_1 - \nabla_2 + \nabla_3 - \nabla_4) \\ p_5 &= p_4 - \gamma(\nabla_5 - \nabla_4) = \gamma'(\nabla_1 - \nabla_2 + \nabla_3 - \nabla_4) - \gamma(\nabla_5 - \nabla_4) \\ &= 133.4(1.5 - 0.2 + 1.2 - 0.4) - 9.807(2.1 - 0.4) \\ &= 263.4\text{kPa} \end{aligned}$$

图 2-22 复式测压计

第五节 作用于平面的液体压力

在工程实践中，不仅需要我们牢固地掌握静止流体压强分布规律及任一点处压强的计算这样一些重要问题，而且，有时也需要解决作用在结构物表面上的流体静压力问题。例如气罐、锅炉、水池等盛装流体的结构物，在进行结构设计的时候，需要计算作用于结构物表面上的流体静压力。结构物表面，可以是平面或曲面，本节研究作用在平面上的液体静压力，也就是研究它的大小、方向和作用点。而研究的方法可分为解析法和图解法两种，现分述于后：

图 2-23 平面液体压力

一、解析法

关于水静压力大小的确定：设有一与水平面成夹角 α 的倾斜平面 ab，如图 2-23 其左侧受水压力，水面大气压强为 p_a，我们把平面绕 oy 轴转 90°，受压平面图形就在 xy 面上清楚地表现出来。而受压面的延长面与液面的交线，即是 x 轴，现对 xy 坐标来分析受力问题：

由于流体静压强的方向沿着作用面的内法线方向，所以，作用在平面上各点的水静压强的方向相同，其合力可按平行力系求和的原理解决。设在受压平面上任取一微小面积 $\mathrm{d}A$，其中心点在液面下的深度为 h，采用相对压强计算，$\mathrm{d}A$ 上的压强 $p = \gamma h$，则作用在微小面积上的水静压力为：

$$\mathrm{d}P = p\mathrm{d}A = \gamma h\mathrm{d}A$$

整个受压面作用着一系列的同向平行力，根据平行力系求和原理，将各微小压力 $\mathrm{d}P$ 沿受压面进行积分，则得作用在受压平面上的水静压力为：

$$p = \int \mathrm{d}P = \int_A p\mathrm{d}A = \int_A \gamma h\mathrm{d}A = \gamma \cdot \sin\alpha \int_A y\mathrm{d}A$$

式中，$\int_A y\mathrm{d}A$ 为受压面积 A 对 x 轴的静面矩，由理论力学知，它等于受压面积 A 与其形心坐标 y_c 的乘积。

因此
$$p=\gamma\sin\alpha y_c A$$
但
$$h_c=\sin\alpha y_c$$
故
$$p=\gamma h_c A=p_c A \tag{2-5-1}$$
式中 h_c——受压面形心在水面下的淹没深度；

p_c——受压面形心的静压强；

A——受压面积。

从式(2-5-1)知，作用在任意位置、任意形状平面上的水静压力值等于受压面面积与其形心点所受水静压强的乘积。

关于水静压力的方向，它是沿着受压面的内法线方向。

关于水静压力的作用点(也称压力中心)，由于压强与水深成直线变化，深度较大的地方压强较大，所以，压力中心 D 在 y 轴上的位置必然低于形心 C。D 点的位置可以利用各微小面积 $\mathrm{d}A$ 上的水静压力 $\mathrm{d}P$ 对 x 轴的力矩之总和等于整个受压面上的水静压力 P 对 x 轴的力矩这一原理求得。

微小压力 $\mathrm{d}P$ 对 x 轴的力矩为：
$$\mathrm{d}Py=\gamma h\mathrm{d}Ay=\gamma y^2\sin\alpha\mathrm{d}A$$
各微小力矩的总和为：
$$\int_A\gamma y^2\sin\alpha\mathrm{d}A=\gamma\sin\alpha\int_A y^2\mathrm{d}A=\gamma\cdot\sin\alpha\cdot J_x$$
式中 $J_x=\int_A y^2\mathrm{d}A$ 为受压面的面积 A 对 x 轴的惯性矩。

水静压力 P 对 x 轴的力矩为：
$$Py_D=\gamma h_c A y_D=\gamma y_c\sin\alpha A y_D$$
由于合力对某轴之矩等于各分力对同轴力矩之和。因此，
$$\gamma y_c\cdot\sin\alpha\cdot Ay_D=\gamma\sin\alpha\cdot J_x$$
因为 $J_x=J_c+y_c^2A$，代入上式化简得：
$$y_D=\frac{J_x}{y_c\cdot A}=\frac{J_c+y_c^2A}{y_cA}=y_c+\frac{J_c}{y_c\cdot A} \tag{2-5-2}$$
或
$$y_e=y_D-y_c=\frac{J_c}{y_c\cdot A} \tag{2-5-3}$$
式(2-5-2)或(2-5-3)是求压力中心的基本公式。

式中 y_e——压力中心沿 y 轴方向至受压面形心的距离；

y_D——压力中心沿 y 轴方向至液面交线的距离；

y_c——受压面形心沿 y 轴方向至液面交线的距离；

J_c——受压面对通过形心且平行于液面交线轴的轴的惯性矩；

A——受压面受压部分面积。

由于 $J_c/y_c\cdot A$ 总是正值，故 $y_D>y_c$。说明压力中心 D 点总是低于形心 C。

压力中心在 x 轴上的坐标取决于平面形状。在实际工程中，受压面常是对称于 y 轴的，则压力中心 D 点在 x 轴上的位置就必然在平面的对称轴上，无需进行计算。

利用上述公式只能求出液面压强为大气压强时，作用于平面的水静压力及其压力中心。如果容器封闭，液面压强 p_0 大于或小于大气压强 p_a 时，则应以相对压强为零的虚设液面求解水静压力及压力中心。这个假设液面和容器的实际液面的距离为 $|p_0-p_a|/\gamma$，当 $p_0>p_a$ 时，虚设液面在实际液面上方，反之，在下方。这就是说，求解水静压力用 $P=\gamma h_c A$ 时，h_c 取平面形心至虚设液面的距离；而求压力中心用 $y_e=J_c/y_c A$ 时，y_c 取平面形心沿 y 轴方向至虚设液面的液面交线的距离。这种方法，实质上是将厚为 $(p_0-p_a)/\gamma$ 的液层，想象地加在实际液面上，而平面上各点所受实际压强没有任何改变。

从式(2-5-1) $P=\gamma h_c A$ 知，作用于受压平面上的水静压力，只与受压面积 A、液体容重 γ 及形心的淹没深度 h_c 有关，而与容器的形状无关。对于底面积水平的盛液容器，如图 2-24 各个容器的液体相同，水深相同，底面积大小也相等，而且形心的淹没深度 h_c 就等于水深。所以，不论容器的形状如何，作用在底面积上水静压力的大小都是一样的，它与容器中水的多少无关。

二、图解法

求解矩形平面上的水静压力的问题，采用图解法不仅能直接反映力的实际分布，而且有利于对受压结构物进行结构计算。使用图解法，需先绘出水静压强分布图，然后根据它来计算水静压力。

水静压强分布图是根据基本方程 $p=p_0+\gamma h$，直接绘在受压面上表示各点压强大小及方向的图形。现以图 2-25 中铅直面 AB 左侧为例绘制水静压强分布图。

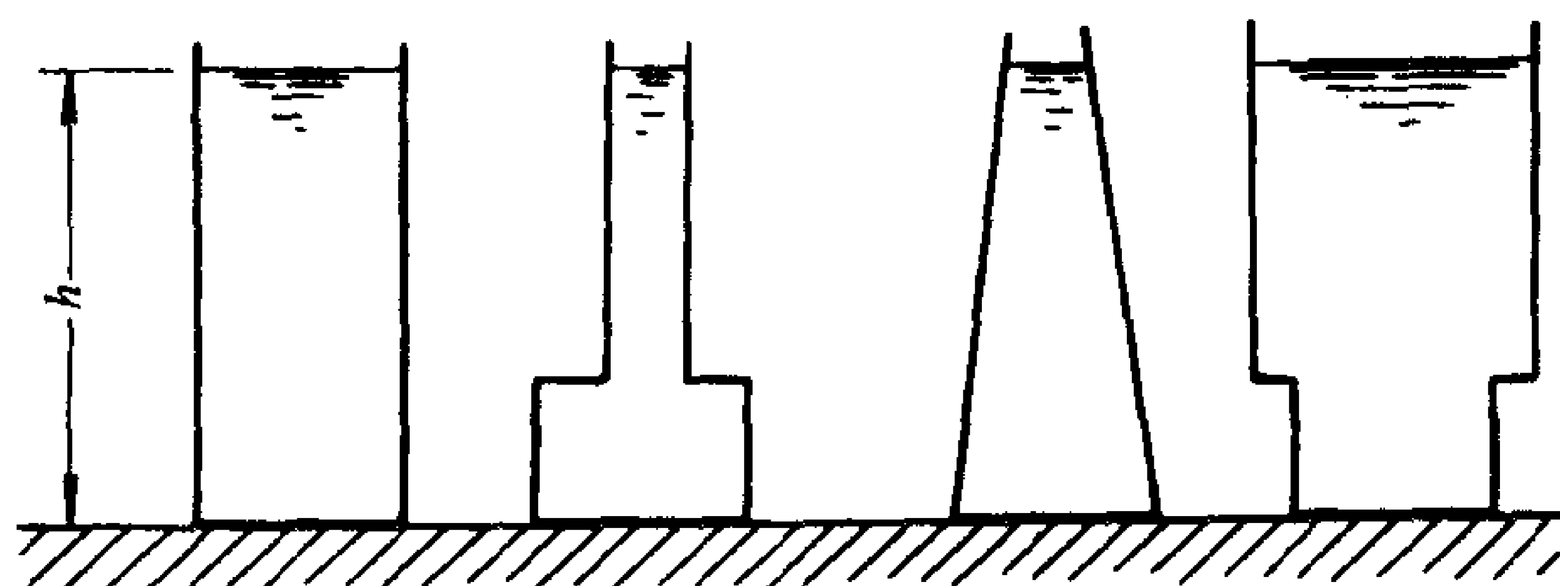


图 2-24 水静压力

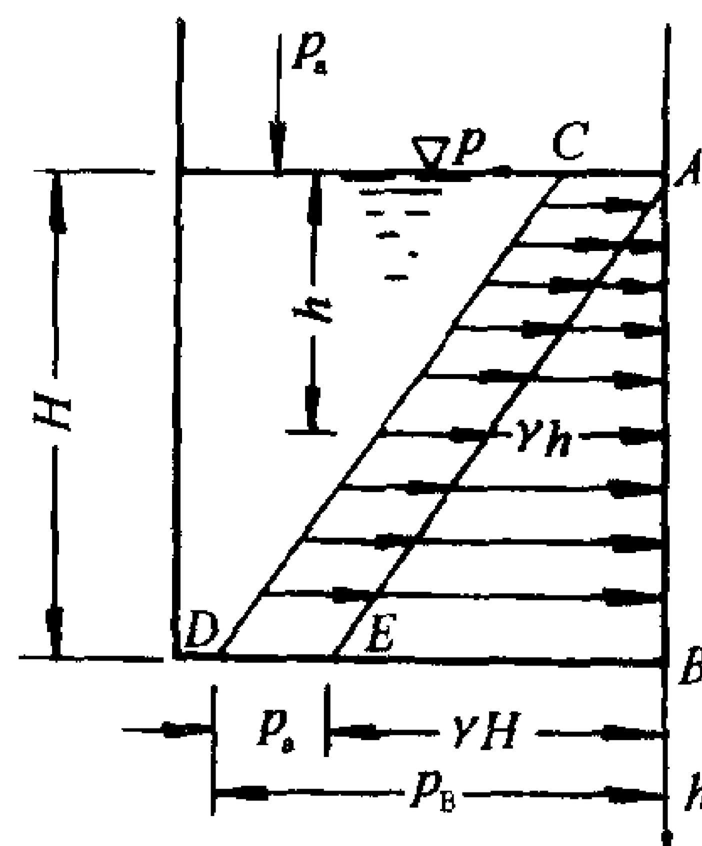


图 2-25 水静压强分布图

设横坐标为 p，纵坐标为 h，坐标原点与液面 A 点重合。根据压强与水深成直线变化的规律，只要定出 AB 面上两端点的压强，并用线段表示在相应点上，然后用直线连接两线段的端点，即得水静压强分布图。例如在水面上的 A 点，$h_A=0$，$p_A=p_a$。在水箱底部的 B 点，$h_B=H$，$p_B=p_a+\gamma H_0$ 取线段 $AC=p_A$，及 $BD=p_B$，分别标在 A 点及 B 点上，接连两端点 C、D，梯形 $ABCD$ 就是 AB 部分的水静压强分布图形。

现在把水静压强分布图形分成 p_a 及 γh 作用的两部分。过 A 点作 $AE /\!/ CD$，平行四边形 $AEDC$ 就是水面大气压强 p_a 的作用，三角形 ABE 就是水深造成的压强 γh 的作用。实际上，大气压强 p_a 不仅对受压面左侧有作用，而且对右侧也同样有作用，两侧压强大小相等方向相反，正好相互抵消，对受压面不产生力学效应。因此，实际工程计算中，只考虑相对压

强的作用，即水深造成的 γh 的作用。也就是不考虑水静压强分布图平行四边形 $AEDC$，只考虑水静压强分布图三角形 ABE。

图 2-26 是根据式(2-3-4)和水静压强垂直于作用面的特性，绘出斜面、折面及铅直面上的水静压强分布图。

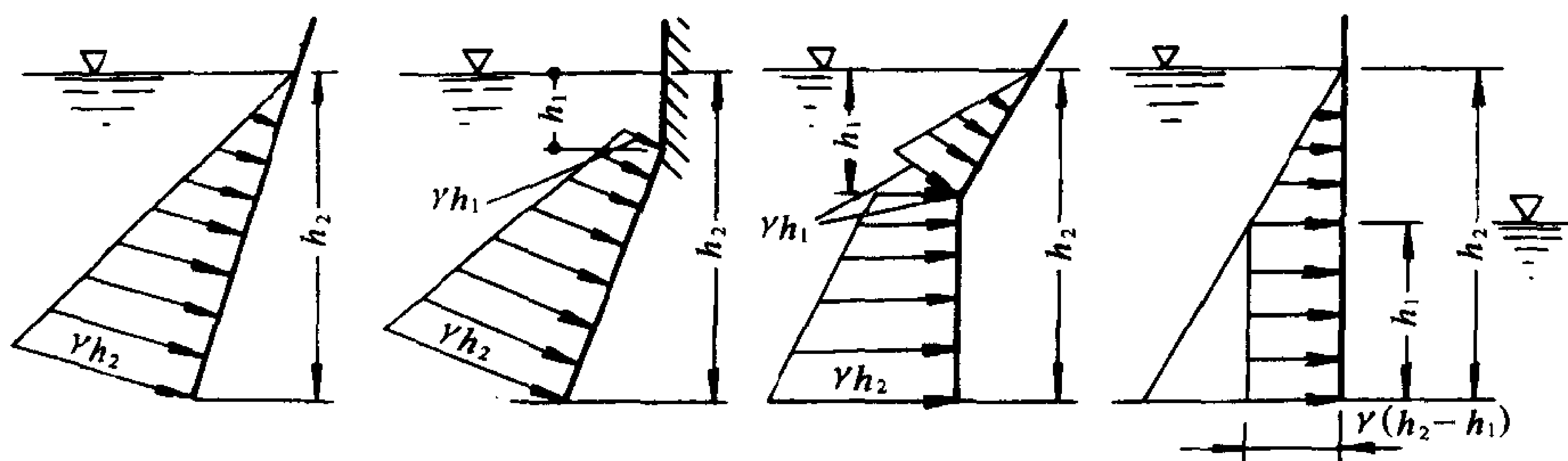


图 2-26 斜面、折面及铅直面的水静压强分布图

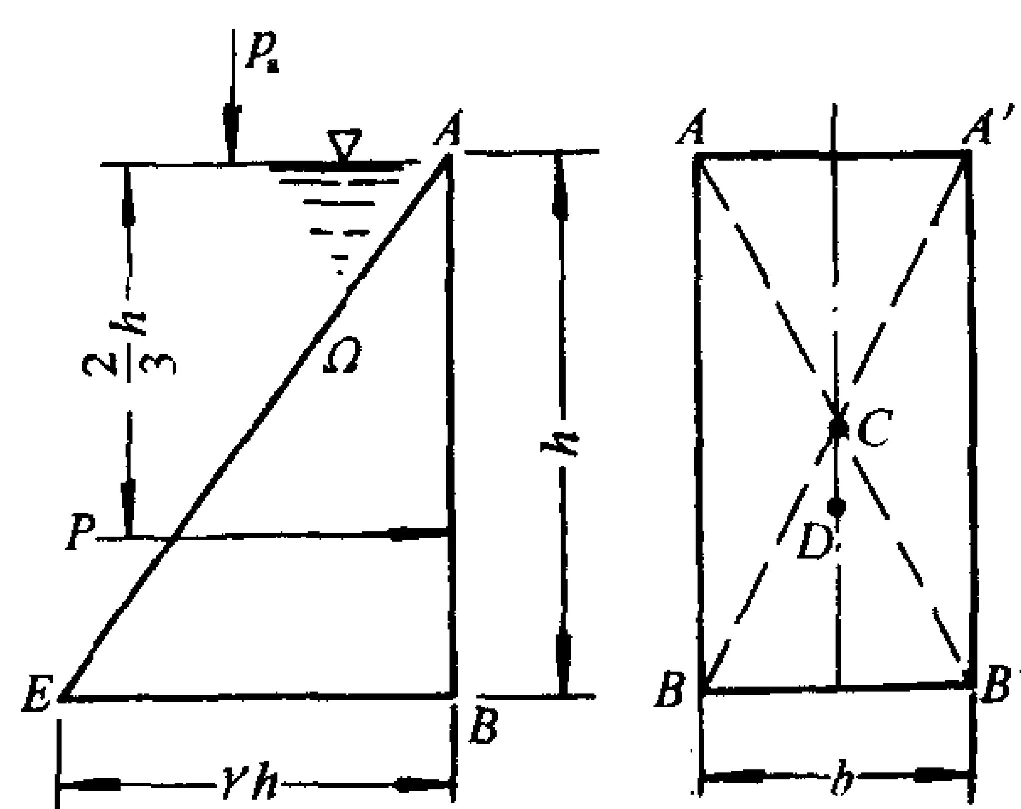


图 2-27 作用于铅直平面的水静压力

现在，根据作用于平面水静压力公式(2-5-1)，对高为 h，宽为 b，顶边适在水面的铅直矩形平面 $AA'B'B$(如图2-27)，应用水静压强分布图计算水静压力。则

$$P = p_c A = \gamma h_c bh = \gamma \frac{h}{2} bh = \frac{1}{2}\gamma h^2 b \quad (2\text{-}5\text{-}4)$$

式中，$\frac{1}{2}\gamma h^2$，恰为水静压强分布图 ABE 三角形的面积，用 Ω 表示，故上式可写成：

$$P = \Omega b = V \quad (2\text{-}5\text{-}5)$$

式(2-5-5)指出，作用于平面的水静压力等于压强分布图形的体积。这个体积是以压强分布图形面积为底面积乘以矩形宽度 b 为高所组成。

P 的作用点，通过 Ω 的形心并位于对称轴上。在这一具体情况下，D 点在对称轴上，并位于水面下的$\frac{2}{3}h$ 处。

【例 2-5】 一铅直矩形闸门，如图 2-28，顶边水平，所在水深 $h_1 = 1\text{m}$，闸门高 $h = 2\text{m}$，宽

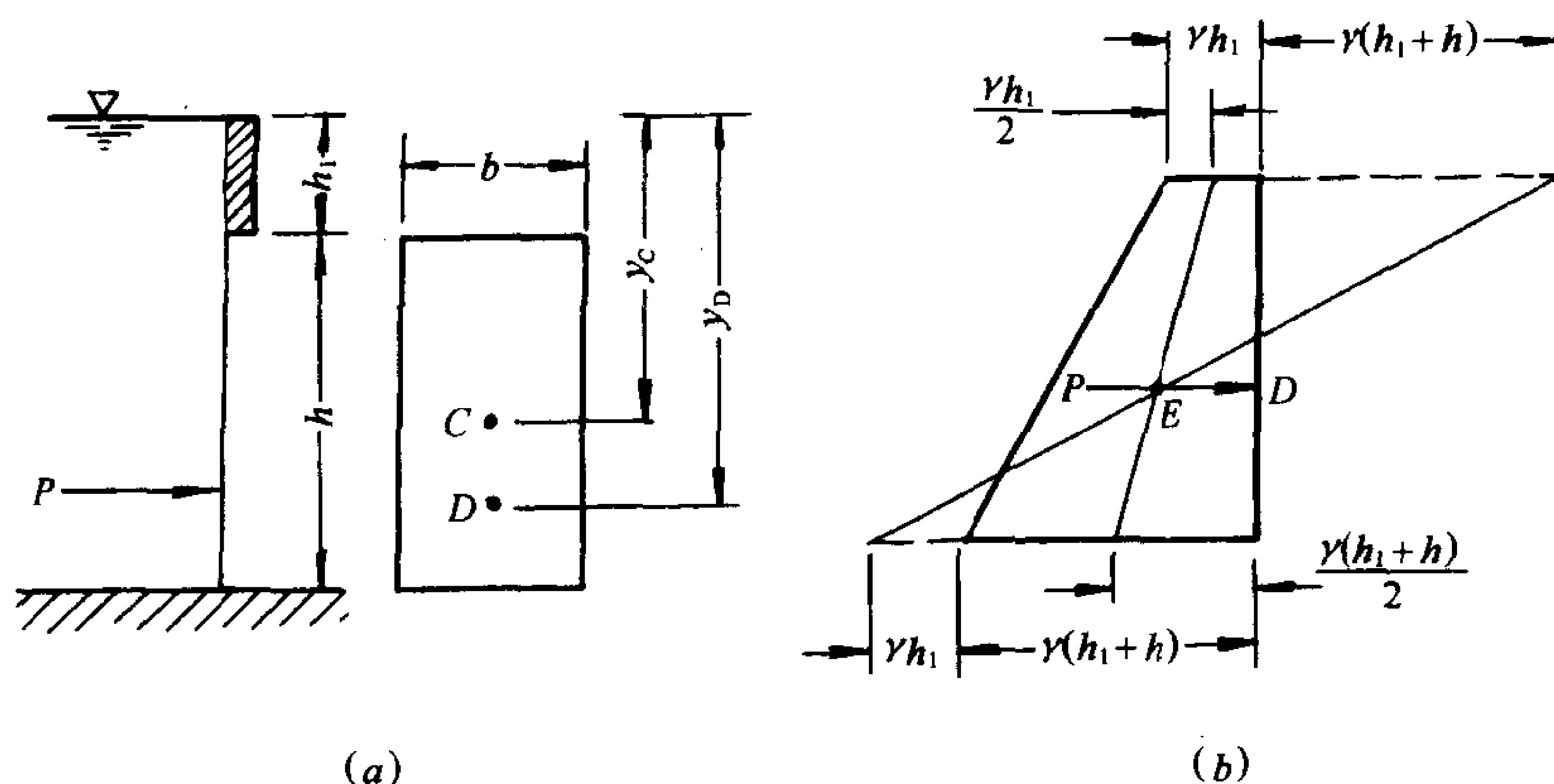


图 2-28 作用于铅直平面闸门的压力

$b=1.5\text{m}$,试用解析法及图解法求水静压力 P 的大小及作用点。

【解】 先用解析法求 P。

引用式 $P=\gamma h_c A$。其中：水的容重 $\gamma=9.807\text{kN/m}^3$，$h_c=h_1+h/2=1+\frac{2}{2}=2\text{m}$，$A=bh=1.5\times2=3\text{m}^3$，代入式中得

$$P=9.807\times2\times3=58.84\text{kN}$$

压力中心用 $y_D=y_c+J_c/y_cA$。其中：$y_c=h_c=2\text{m}$，$J_c=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}\times1.5\times2^3=1\text{m}^4$，代入式中得

$$y_D=2+\frac{1}{2\times1.5\times2}=2+\frac{1}{6}=2.17\text{m}$$

各计算数值的符号标在图 2-28a 上。

再用图解法求 P。

先绘水静压强分布图，如图 2-28b 所示，然后引用式 $P=\Omega b$。其中：$\Omega=\frac{1}{2}[\gamma h_1+\gamma(h_1+h)]h=\frac{1}{2}\gamma h(2h_1+h)=\frac{1}{2}\times9.807\times2\times(2\times1+2)=39.23\text{kN/m}$，$b=1.5\text{m}$，代入式中得

$$P=39.23\text{kN/m}\times1.5\text{m}=58.84\text{kN}$$

压力中心过水静压强分布图梯形的形心。可用作图法决定，如图 2-28b 所示。也可将梯形划分为已知形心位置的三角形和矩形，利用总面积对某轴之矩等于各部分面积对同轴矩之和求得。通过 E 点作垂直于受压面的向量 P，得交点 D，这便是压力中心。

第六节　作用于曲面的液体压力

作用于曲面任意点的流体静压强都沿其作用面的内法线方向垂直于作用面，但曲面各处的内法线方向不同，彼此互不平行，也不一定交于一点。因此，求曲面上的水静压力时，一般将其分为水平方向和铅直方向的分力分别进行计算。本节主要研究工程中常见的柱体曲面，然后将结论推广到空间曲面。

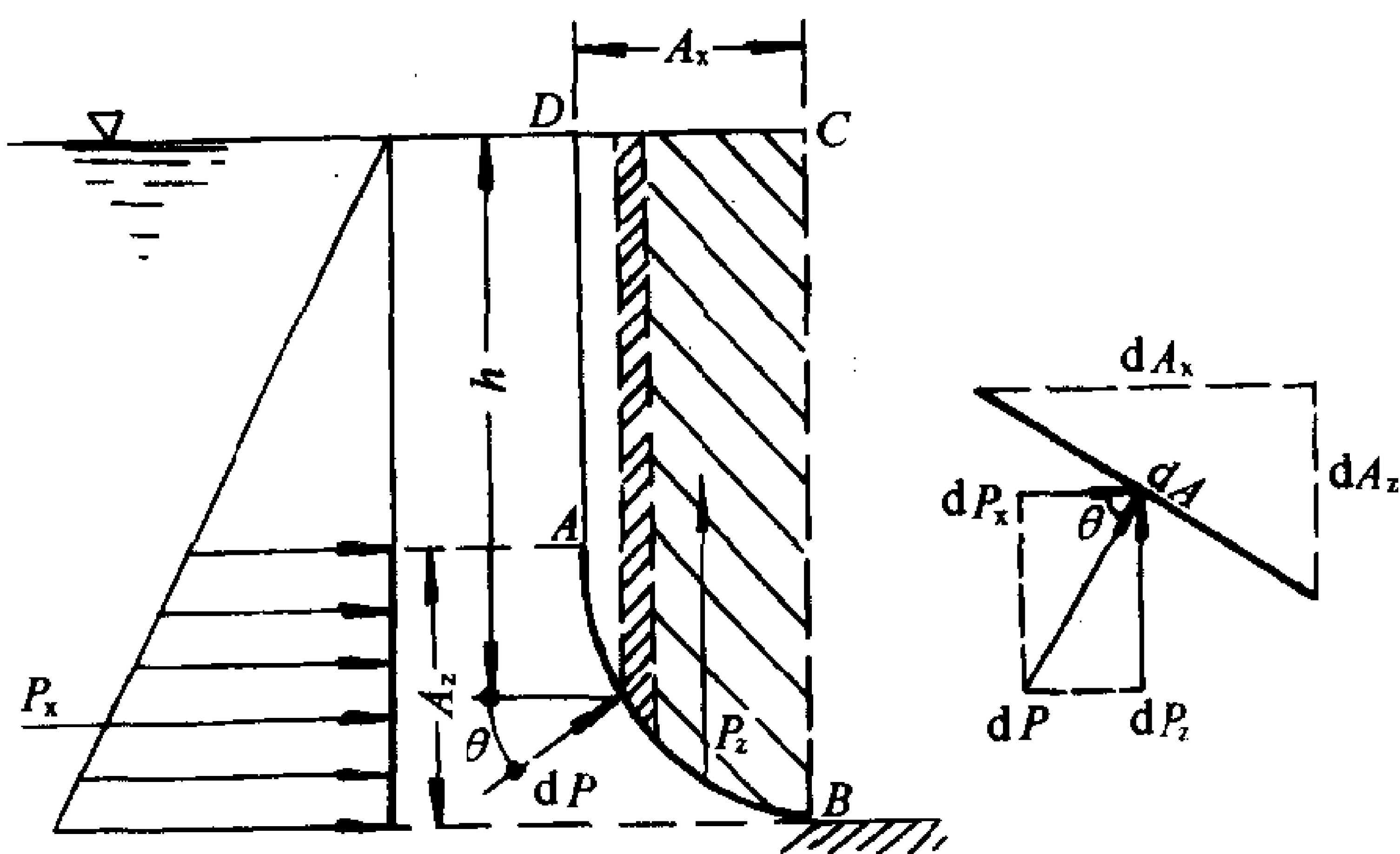


图 2-29　作用于柱体曲面的压力

图 2-29 为垂直于纸面的柱体，其长度为 l，受压曲面为 AB，其左侧承受水静压力。设在曲面 AB 上，水深 h 处取一微小面积 dA，作用在 dA 上的水静压力为：

$$dP=p\,dA=\gamma h\,dA$$

该力垂直于面积 dA，并与水平面成夹角 θ，此力可分解为水平和铅直的两个分力。

水平分力为

$$dP_x=dP\cos\theta=\gamma h\,dA\cos\theta$$

铅直分力为

$$dP_z = dP\sin\theta = \gamma h dA\sin\theta$$

因为 $dA\cos\theta$ 和 $dA\sin\theta$ 分别等于微小面积 dA 在铅直面上和水平面上的投影。令 $dA_z = dA\cos\theta$, $dA_x = dA\sin\theta$，所以

$$dP_x = \gamma h dA_z$$
$$dP_z = \gamma h dA_x$$

上式分别积分得

$$P_x = \int dP_x = \int_{A_z} \gamma h dA_z = \gamma \int_{A_z} h dA_z \qquad (2\text{-}6\text{-}1)$$

$$P_z = \int dP_z = \int_{A_x} \gamma h dA_x = \gamma \int_{A_x} h dA_x \qquad (2\text{-}6\text{-}2)$$

式(2-6-1)右边的积分等于曲面 AB 在铅直平面上的投影面积 A_z 对水面的水平轴 y 的静矩。设 h_c 为 A_z 的形心在水面下的淹没深度，则 $\int_{A_z} h dA_z = h_c A_z$。因此

$$P_x = \gamma h_c A_z \qquad (2\text{-}6\text{-}3)$$

可见，作用于曲面上的水静压力 P 的水平分力 P_x 等于该曲面的铅直投影面上的水静压力。因此，可以引用平面水静压力的方法求解曲面上水静压力的水平分力。

式(2-6-2)右边的 $h dA_x$，是以 dA_x 为底面积，水深 h 为高的柱体体积。所以，$\int_{A_x} h dA_x$ 即为受压曲面 AB 与其在自由面上的投影面积 CD 这两个面之间的柱体 $ABCD$ 的体积，称为压力体，以 V 表示。所以

$$P_z = \gamma \int_{A_x} h dA_x = \gamma V \qquad (2\text{-}6\text{-}4)$$

这就是说，作用于曲面上的水静压力 P 的铅直分力 P_z 等于其压力体内的水重。可见，正确绘制压力体是求解铅直分力的关键。压力体一般是三种面所封闭的体积：即底面是受压曲面，顶面是受压曲面边界线封闭的面积在自由面或者其延长面上的投影面，中间是通过受压曲面边界线所作的铅直投射面。对自由面压强 p_0 非大气压的情况，求压力体时，应将受压曲面 AB 投影至虚设自由面，虚设自由面(液面)的位置求法见上节。

P_z 的方向取决于受压曲面和液体的相对位置和曲面所受相对压强的正负，可根据具体情况容易地加以判断。但是，不论 P_z 的方向如何，它的大小都等于压力体内的液体重量，其作用线均通过压力体形心。

在求出 P_x 和 P_z 后，如需要求出合力 P，则

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} \qquad (2\text{-}6\text{-}5)$$

合力 P 的作用线与水平线的夹角 θ 为：

$$\theta = \tan^{-1}\frac{P_z}{P_x} \qquad (2\text{-}6\text{-}6)$$

柱体曲面的推导，也可用于任意空间曲面，所不同的只是还可以有另一个水平分力 P_y，求法完全与 P_x 一样。

最后需要强调一下，求作用于曲面的水平分力和铅直分力，关键在于明确受压曲面边界

线的投影作用。水平分力是受压曲面边界线封闭的面积在铅直面上的投影面积上的液体压力;铅直分力的压力体,也要通过受压曲面的边界线,向相对压强为 0 的液面(或虚设液面)或其延长面,作铅直投射柱面来决定。现举例如下:

【例 2-6】 贮水容器上有三个半球形盖,如图 2-31。已知 $H = 2.5\text{m}, h = 1.5\text{m}, R = 0.5\text{m}$,求作用于三个半球形盖的水静压力。

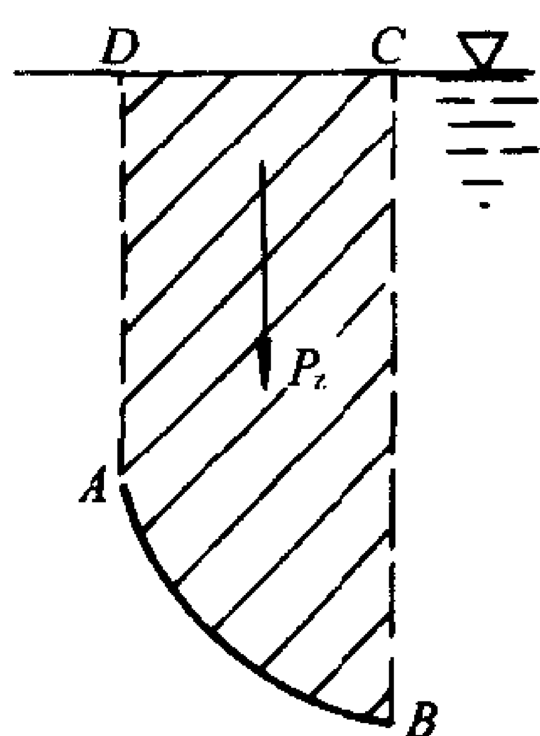


图 2-30 实压力体

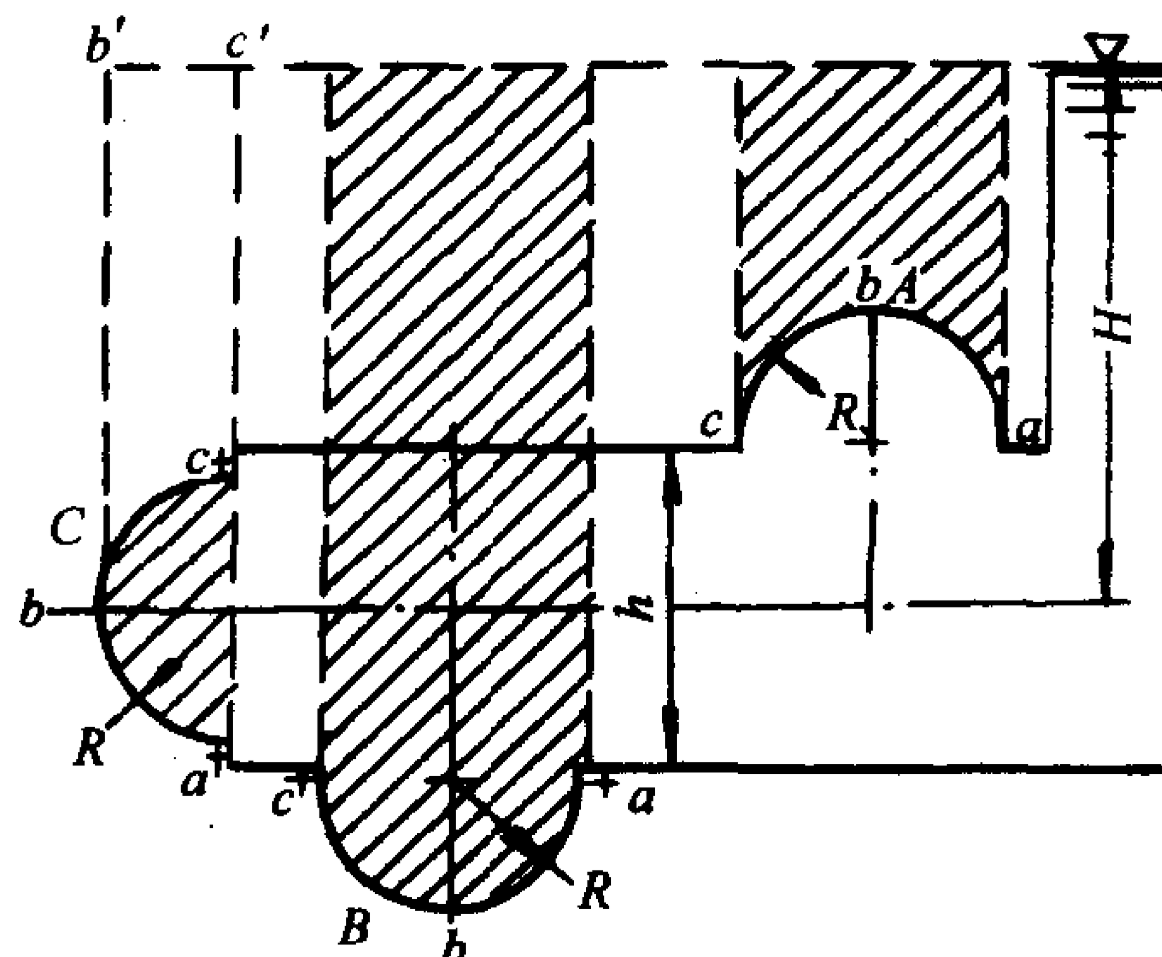


图 2-31 贮水容器

【解】 本题是曲面受压问题,受压曲面的边界线都是圆周,在图上仅表现为受压曲面的两个端点 a、c。

1) 先求各半球盖所受的水平分力

半球盖 A、B 的边界线,都是在水平面上的圆周,它封闭的面积在铅直面上的投影为一直线,故投影面积为 0,即 $A_{Az} = A_{Bz} = 0$,所以

$$P_{Ax} = 0$$

$$P_{Bx} = 0$$

半球形盖 C 的边界线是铅直面上的圆周,它封闭的面积在铅直面的投影面积,就是它自身,即 $A_{cz} = \frac{1}{4}\pi d^2$,形心点的水深 H,故

$$P_{cx} = p_c \cdot A_{cz} = \gamma H \frac{1}{4}\pi d^2 = 9.807 \times 2.5 \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 = 19.26\text{kN}$$

方向向左。

2) 再求各半球形盖受的铅直分力

半球形盖 A、B 的压力体,底面为受压曲面;顶面为边界线圆周封闭的面积在相对压强为零的液面延长面上的投影面积;中间仍根据边界线圆周,向上作铅直投射柱面。这三种面所封闭的体积就是压力体。图中阴影部分为压力体的剖面图,现分别计算如下:

$$P_{Az} = \gamma V_A = \gamma\left[\left(H - \frac{h}{2}\right) \times \frac{1}{4}\pi d^2 - \frac{\pi}{12}d^3\right]$$

$$= 9.807 \times \left[\left(2.5 - \frac{1.5}{2}\right) \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 - \frac{\pi}{12} \times 1^3\right]$$

$$= 10.89\text{kN}$$

液体在受压面之下,故方向向上。

$$P_{Bz} = \gamma V_B = \gamma\left[\left(H + \frac{h}{2}\right) \times \frac{\pi}{4}d^2 + \frac{\pi}{12}d^3\right]$$

$$= 9.807 \times \left[\left(2.5 + \frac{1.5}{2}\right) \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 + \frac{\pi}{12} \times 1^3\right]$$

$$= 27.56\text{kN}$$

液体在受压曲面之上，故方向向下。

半球盖 C 的压力体，底面为受压曲面；顶面为边界线圆周封闭的面积在相对压强为 0 的液面延长面上的投影——为一直线，即顶面为 0；中间仍根据边界线圆周，向上作铅直投射柱面。这时，压力体仅为两种面所封闭的体积——半球体积。图中阴影部分为压力体的剖面图。故

$$P_{cz} = \gamma V_c = \gamma \cdot \frac{\pi}{12} d^3 = 9.807 \times \frac{\pi}{12} \times 1^3 = 1.589\text{kN}$$

方向向下。

P_{cx}及 P_{Az}、P_{Bz}为连接螺栓的拉力所承受，P_{cz}为连接螺栓的剪力所承受，A、B、C 三盖中只有C 盖有两个分力，其合力读者自行计算。

【例 2-7】 一水管的压强为 4903.5kPa，管内径 $D = 1\text{m}$，管材的允许拉应力$[\sigma] = 147.1\text{MPa}$，求管壁应有的厚度。

【解】 设取管长 $l = 1\text{m}$，并从直径方向将管子分成两半，取一半来分析受力情况，如图 2-32所示。

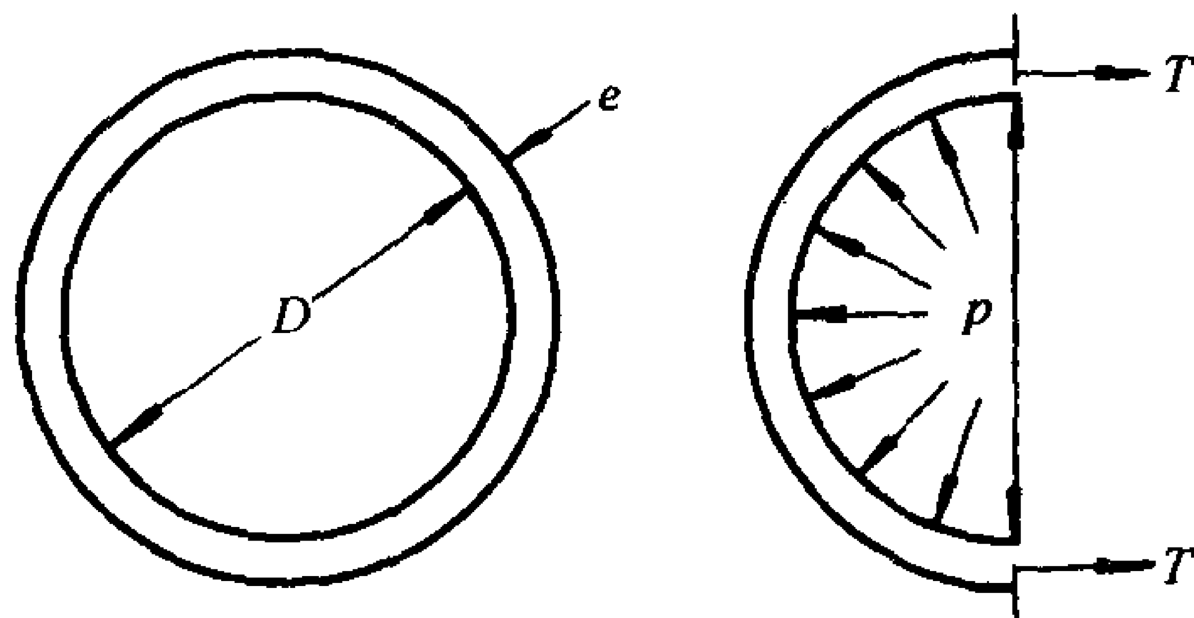


图 2-32 管壁受力

本题管内压强高达 4903.5kPa，在这压强很高的情况下，重力的影响是可以忽略不计的。并认为管内压强和气体压强一样是均匀分布的。因此，作用在半环内表面上的铅直分力为零。水平分力等于半环的铅直投影面积 $A = D \times 1$ 乘以压强 p。即

$$P_x = pA = pD$$

这一压力与半环管壁承受的拉力平衡。设 T 为 1m 长管段上的管壁拉力，则

$$2T = P_x$$

故

$$T = \frac{1}{2}P_x = \frac{1}{2}pD$$

设 T 在管壁厚度e 内是均匀分布的，根据安全的要求，管壁承受的拉应力等于允许拉应力。则

$$[\sigma] = \frac{T}{e \times 1} = \frac{1}{2e}pD$$

在已知管壁允许拉应力的情况下，可用上式求得管壁的厚度为

$$e = pD/2[\sigma] \text{ cm}$$

代入 $p = 4903.5\text{kN/m}^2$，$D = 1\text{m}$，$[\sigma] = 147.1\text{MPa}$，

$$e = \frac{4903500}{2 \times 147100000} = 0.0166\text{m} = 1.7\text{cm}$$

考虑到加工、铆接和锈蚀等对管壁受力的影响，还应附加一安全厚度。

最后，讨论曲面压力的特例——作用于如图 2-33 所示的潜体或浮体（物体全部或部分浸入水中）的压力计算问题。

先讨论水平分压力 $P_x = \gamma h_c A_z$。

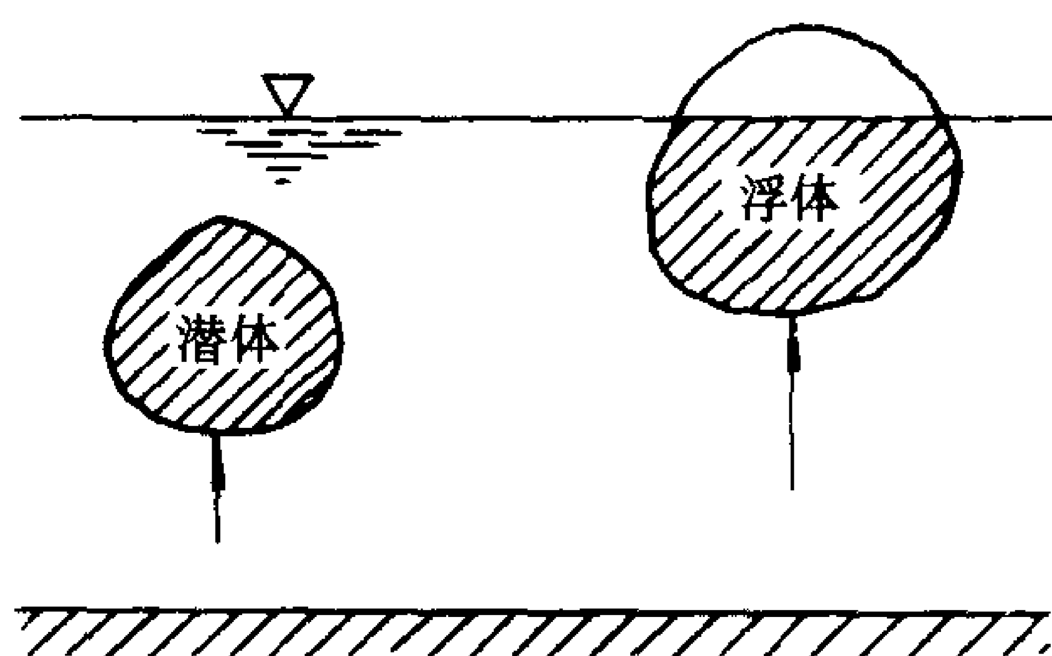


图 2-33 潜体和浮体的平衡

只要求出铅直投影面积 A_z，P_x 的大小就可用式(2-6-3)算出。潜体的受压曲面是物体表面的封闭曲面，没有受压曲面的边界线，铅直投影面积为零。而浮体的受压曲面虽不封闭，但受压曲面边界线在同一水平面上，所以，铅直投影面积也为零。因此，无论是潜体或浮体，水平分压力均为零。

再讨论铅直分压力 $P_z = \gamma V$ 。

只要求出压力体，P_z 的大小可用式(2-6-4)算出。潜体的压力体是一种面所封闭的体积，这就是物体表面的封闭曲面所包围的体积。而浮体的压力体，是两种面封闭的体积，这就是以受压曲面为底，物体与液面的交面为顶面之间的体积，即物体浸入液体部分的体积。因此，无论潜体或浮体的压力体均为物体浸入液体的体积。也就是物体排开液体的体积。所以，$P_z = \gamma V$，就是物体排开液体的重量。这就是阿基米德原理。

由此可见，作用于潜体或浮体的液体压力，只有铅直向上的压力，称浮力。浮力作用点称浮心，浮心就是排开液体的重心。对于均质液体而言，浮心就是排开液体体积的形心。

潜体或浮体在重力 G 和浮力 P 的作用下，可能有下列三种情况：

(1) 重力大于浮力，即 $G>P$，则物体下沉至底。

(2) 重力等于浮力，即 $G=P$，则物体可在任一水深处维持平衡。

(3) 重力小于浮力，即 $G<P$，则物体浮出液体表面，直至液面下部分所排开的液体重量等于物体重量为止。这种浮在液体上的物体称浮体，船就是浮体的一个例子。

第七节 流体平衡微分方程

以上讨论了质量力仅为重力作用时流体静压强分布规律及压力计算问题。现在，进一步讨论质量力除重力外，还有其它质量力作用时的流体平衡问题。讨论的方法是首先建立平衡微分方程式，然后进一步解决其压强分布规律及压力计算问题。

一、流体平衡微分方程式及其积分

设平衡流体中，任取一点 $o'(x、y、z)$ 的压强为 p，并以 o' 点为中心取一微小正六面体，各边长为 $dx、dy、dz$，并分别与相应的直角坐标轴平行，如图 2-34。我们对六面体建立外力平衡关系式，便可以得出流体平衡微分方程式。

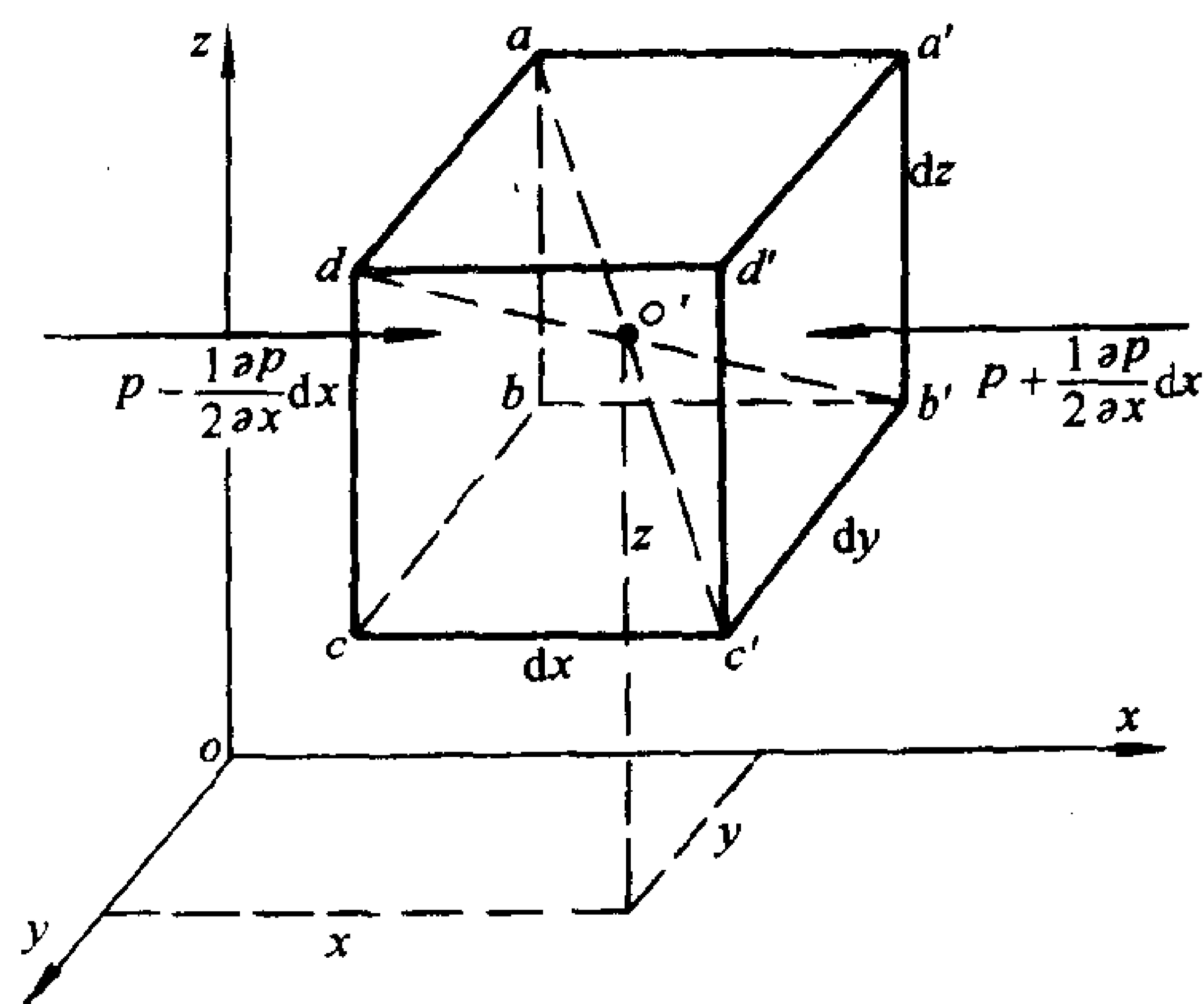


图 2-34 微小正六面体

为了建立外力平衡关系式，首先分析作用于正六面体上的外力——质量力和表面力。

1. 作用于六面体上的表面力，由于流体静压强是空间坐标的连续函数，沿 x 轴向作用于边界面 $abcd$ 和 $a'b'c'd'$ 中心处的压强，根据泰勒级数展开，并取前两项分别为：

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)和\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)$$

式中,$\frac{\partial p}{\partial x}$为压强沿 x 轴向的递增率;$\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$ 为由于 x 轴向的位置变化而引起的压强差。根据中心处的压强,便可以得出边界面 $abcd$ 和 $a'b'c'd'$ 的压力为:

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z \text{ 和} \left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$$

2. 作用于六面体的质量力,设作用于六面体的单位质量力在 x 轴向的分力为 X,则作用于六面体的质量力在 x 轴向的分力为:

$$X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

处于平衡状态的液体,以上两种力必须互相平衡,对于 x 轴向的平衡可以写为:

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

用 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 除以上式,并化简得:

同理,对 y、z 轴方向可得:

$$\left.\begin{aligned}\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}=0\\ \rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}=0\\ \rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{2-7-1a}$$

这就是流体平衡微分方程式,也称欧拉平衡方程。它指出流体处于平衡状态时,作用于流体上的质量力与压强递增率之间的关系。它表示单位体积质量力在某一轴的分力,与压强沿该轴的递增率相平衡。如果,单位体积的质量力在某两个轴向分力为零,则压强在该平面就无递增率,则该平面为等压面。如果质量力在各轴向的分力均为零,就表示无质量力作用,则静止流体空间各点压强相等。

将式(2-7-1a)除以 ρ,分别移项得:

$$\left.\begin{aligned}X=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ Y=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ Z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{2-7-1b}$$

可以看出,单位质量力在各轴向的分力和压强递增率的符号相同。这说明质量力作用的方向就是压强递增率的方向。例如,静止液体,压强递增的方向就是重力作用的铅直向下的方向。

方程式(2-7-1a),还可以有另一种形式。现将式(2-7-1a)依次乘以 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$,并相加得:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}z=\rho(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)$$

式中左边是平衡液体压强 p 的全微分。这样

$$\mathrm{d}p=\rho(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z) \tag{2-7-2}$$

如果流体是不可压缩的，即 ρ 为常数。因此，上式右边的括号内的数值必然是某一函数 $W(x、y、z)$的全微分，即

$$dW = Xdx + Ydy + Zdz \tag{2-7-3}$$

而

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

因此

$$\frac{\partial W}{\partial x} = X \quad \frac{\partial W}{\partial y} = Y \quad \frac{\partial W}{\partial z} = Z \tag{2-7-4}$$

满足式(2-7-2)的函数 $W(x、y、z)$称为势函数。具有这样势函数的质量力称为有势的力。例如重力，牵连惯性力都是有势的力。因此，可以得出结论：液体只有在有势的质量力的作用下才能平衡。

将式(2-7-3)代入式(2-7-2)得

$$dp = \rho dW \tag{2-7-5}$$

积分得

$$p = \rho W + C \tag{2-7-6}$$

式中 C 为积分常数，当已知流体内某一点的势函数 W_0 和压强 p_0 时，代入上式得 $C = p_0 - \rho W_0$。于是，式(2-7-6)为：

$$p = p_0 + \rho(W - W_0) \tag{2-7-7}$$

这就是不可压缩流体平衡微分方程式积分后的普遍关系式。

当质量力仅为重力时，作用于液体的重力为：

$$G = -mg$$

式中负号是因为重力的方向与 z 轴的负向一致的缘故。而重力的单位质量力为 $G/m = -g$，它在各轴向的分力为：

$$X = 0$$
$$Y = 0$$
$$Z = -g$$

将以上各力代入式(2-7-2)得

$$dp = -\rho g dz = -\gamma dz$$

积分上式得

$$p = -\gamma Z + C$$

或者

$$Z + p/\gamma = C$$

这就是前面已证明的流体静力学的基本方程式。

二、等压面及其特性

现在，进一步讨论等压面及其特性。我们已经知道，等压面上 p = 常数，将 p = 常数代入式(2-7-5)得：

$$dp = \rho dW = 0$$

式中，$\rho \neq 0$，故必然 $dW = 0$，即

$$W = 常数$$

可见，等压面就是等势面。因此，从式(2-7-2)可得等压面方程为：

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \tag{2-7-8}$$

式中，dx、dy、dz 可设想为流体质点在等压面上的任一微小位移 ds 在相应坐标轴上的投

影。因此,式(2-7-8)表示:当流体质点沿等压面移动距离 ds 时,质量力所作的微功为零。而质量力和位移 ds 都不为零,所以,必然是等压面和质量力正交。这就是等压面的重要特性。我们抓住这个特性,只要知道质量力的方向,便可立刻知道它的垂直方向线所构成的面就是等压面。反之亦然。例如前已证明的静止液体,它的质量力只有重力,而重力又是铅直方向的,所以,垂直于铅直方向的水平面就是等压面。

第八节　液体的相对平衡

现在,我们以流体的平衡微分方程式为基础,讨论质量力除重力外,还有牵连惯性力同时作用下的液体平衡规律,在这种情况下,液体相对于地球虽是运动的,但是,液体质点之间,及质点与器壁之间都没有相对运动。所以,这种运动称为相对平衡。现讨论以下两种相对平衡:

一、等加速直线运动中液体的平衡

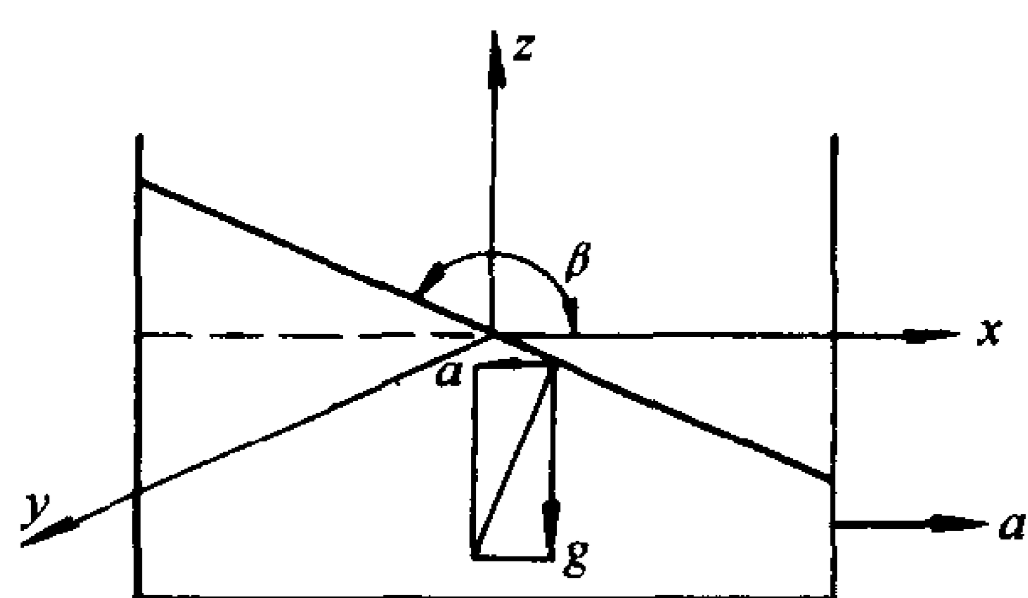


图 2-35　容器等加速直线运动

一开敞的容器盛有液体,以等加速 a 向前作直线运动,液体的自由面将由原来静止时的水平面变成倾斜面,如图 2-35。假如,观察者随容器而运动,他将看到容器和液体都没有运动,如凝固的整体一样。这种平衡就是相对平衡。这时,作用在每一个质点的质量力除重力外,还有牵连惯性力。设自由液面的中心为坐标原点,x 轴正向和运动方向相同,z 轴向上为正,现分析任一质点所受的单位质量力:

单位质量的重力在各轴向的分力为

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0, \qquad Z_1 = -g$$

由于质点受牵连而随容器作等加速直线运动,则作用在质点上的牵连惯性力为:

$$F = -ma$$

式中　m——质点的质量;

a——等加速度;负号表示牵连惯性力的方向与 x 轴负向一致。

而单位质量的牵连惯性力在各轴向的分力为:

$$X_2 = -a, \qquad Y_2 = 0, \qquad Z_2 = 0$$

因此,单位质量力在各轴向的分力为:

$$X = X_1 + X_2 = -a$$
$$Y = Y_1 + Y_2 = 0$$
$$Z = Z_1 + Z_2 = -g$$

所以,流体平衡微分方程式(2-7-2)可写为:

$$\mathrm{d}p = \rho(-a\mathrm{d}x - g\mathrm{d}z)$$

积分上式得:

$$p = \rho(-ax - gz) + C \qquad (2\text{-}8\text{-}1)$$

式中,C 为积分常数,由已知边界条件确定。这就是作等加速直线运动容器中,液体相对平

衡时压强分布规律的一般表达式。设在坐标原点处，$x=z=0$，$p=p_a$，代入上式得 $C=p_a$。以此再代入原式(2-8-1)，则得液面下任一点处的压强为：

$$p=p_a+\rho(-ax-gz)=p_a+\gamma\left(-\frac{a}{g}x-z\right) \tag{2-8-2}$$

其相对压强为

$$p=\gamma\left(-\frac{a}{g}x-z\right) \tag{2-8-3}$$

对于自由液面，$p=0$，则上式为：

$$z=-\frac{a}{g}x \tag{2-8-4}$$

此即等加速直线运动液体的自由面方程。从方程可知，自由面是通过坐标原点的一个倾斜面，它与水平面的夹角 β，则 $\tan\beta=-\frac{a}{g}$。在这种运动情况下，各质点所受的牵连惯性力和重力，不仅大小相等而且方向相同。它们的合力也是不变的，不仅大小不变而且方向也不变。根据质量力和等压面正交的特性，所以，等压面是倾斜平面。

自由面确定后，我们可以根据自由面求任一点的压强。其方法是求出该点沿铅直线在液面下的深度 h $\left(\text{当然也可用} h=-\frac{a}{g}x-z \text{ 计算出该点在自由面下的深度，代入式(2-8-2)进行计算，不过这样较复杂}\right)$，然后用水静力学方程进行计算。即用

$$p = p_a + \gamma h$$

为什么这种运动也可以用水静力学方程求压强呢？我们对比两者的平衡微分方程式来说明：

静止液体	等加速直线运动液体
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-a$
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g$

可见，两者所受的单位质量力在铅直轴向的分力是完全一致的。也就是说，它们在铅直轴向的压强递增率相同，都服从于同一形式的水静力学方程。但是，我们也看到 x 轴向的压强递增率不同，所以，等加速直线运动液体的等压面，不再像静止液体那样是水平面，而是倾斜平面。

二、容器等角速旋转运动中液体的平衡

一直立圆筒形容器盛有液体，绕其中心轴作等角速旋转运动，如图 2-36。由于液体的粘性作用，液体在器壁的带动下，也以同一角速度旋转运动，液体的自由面将由原来静止时的水平面变成绕中心轴的旋转抛物面，这种平衡也是相对平衡。这时，作用在每一个质点上的质量力除重力外，还有牵连离心惯

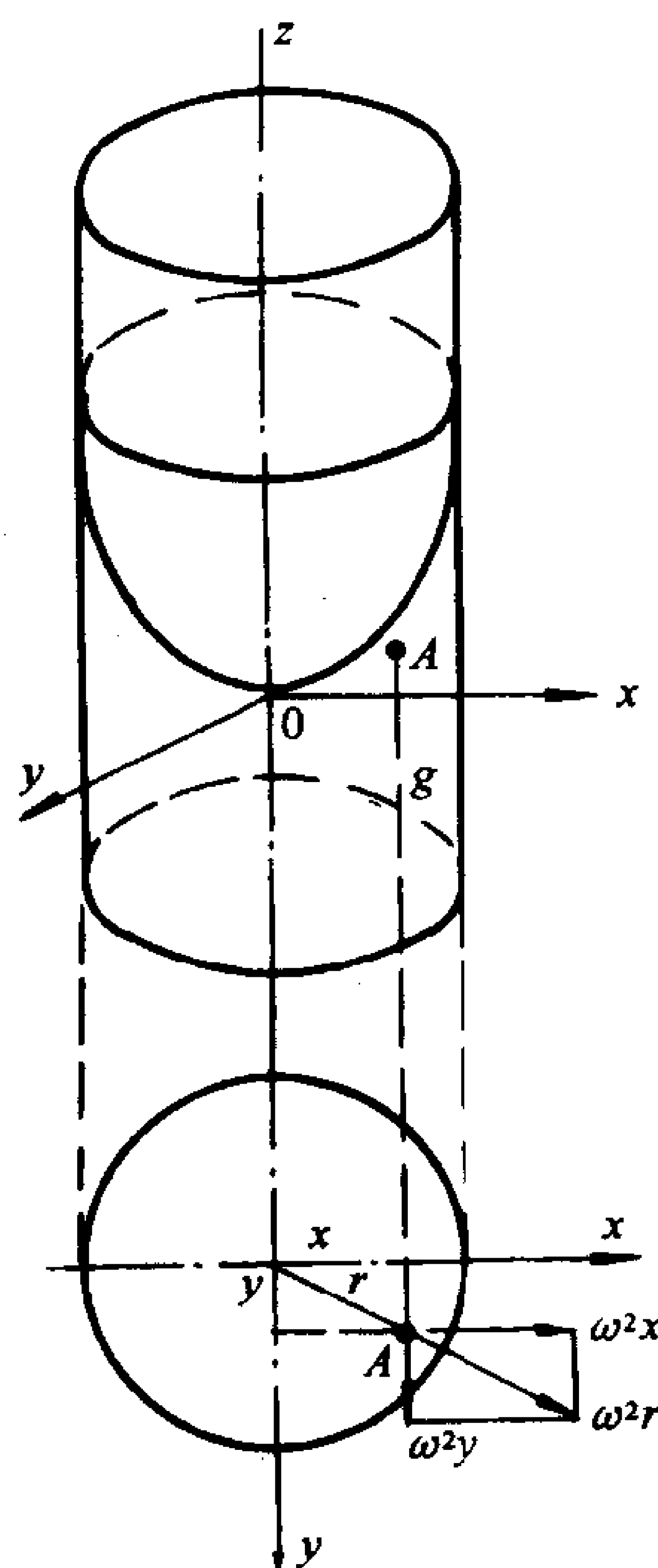


图 2-36 容器等角速旋转运动

性力。

将坐标设在旋转圆筒上,并使原点与旋转抛物面顶点重合,z 轴铅直向上为正,如图所示。现在,分析距 z 轴半径为 r 处的任一质点 A 所受的单位质量力。

单位质量的重力在各轴向的分力为:

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0, \qquad Z_1 = -g$$

由于质点 A 受牵连而随容器作等角速旋转运动,则作用在质点上的牵连离心惯性力为:

$$F = m\frac{u^2}{r} = m\frac{(\omega r)^2}{r} = m\omega^2 r$$

式中 m——质点的质量;

ω——旋转角速度;

r——A 点距 z 轴的半径,即 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。

此牵连离心惯性力在各轴向的分力为:

$$F_x = m\omega^2 x, \qquad F_y = m\omega^2 y, \qquad F_z = 0$$

而单位质量的离心惯性力在各轴向的分力为:

$$X_2 = \omega^2 x, \qquad Y_2 = \omega^2 y, \qquad Z_2 = 0$$

因此,单位质量力在各轴向的分力为:

$$X = X_1 + X_2 = \omega^2 x$$
$$Y = Y_1 + Y_2 = \omega^2 y$$
$$Z = Z_1 + Z_2 = -g$$

所以,流体平衡微分方程式(2-7-2)可写成:

$$\mathrm{d}p = \rho(\omega^2 x\mathrm{d}x + \omega^2 y\mathrm{d}y - g\mathrm{d}z)$$

上式积分后得:

$$p = \rho\left(\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2 - gz\right) + C = \rho\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz\right) + C \tag{2-8-5}$$

式中 C 为积分常数,由已知的边界条件确定。这就是绕铅直轴作等角速度旋转的容器中,液体平衡时压强分布规律的一般表达式。设在坐标原点处,$x=y=z=0$,$p=p_a$。将以上各值代入上式,则得 $C=p_a$。再代回原式(2-8-5),得液面下任一点处的压强为:

$$p = p_a + \rho\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz\right) = p_a + \gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right) \tag{2-8-6}$$

其相对压强为

$$p = \gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right) = \gamma\left(\frac{u^2}{2g} - z\right) \tag{2-8-7}$$

取 p 为常数,就可得等压面方程为

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z = 常数或\frac{u^2}{2g} - z = 常数$$

可见,等压面是绕铅直轴旋转的抛物面簇。对于自由面,$p=0$。则从式(2-8-7)得自由面方程为:

$$z_1 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{2-8-8}$$

从式(2-8-8)知,轴心处($r=0$),$z_1=0$。半径为 r 处,$z_1=\frac{\omega^2 r^2}{2g}$,表示 r 处水面高于旋转轴处的水面高度。也就是说,同一水平面上,旋转中心的压强最低,外缘的压强最高。

自由面确定后,也可以根据自由面求任一点的压强,其方法也是求出该点在液面下的深度 h $\left(\text{这时也可用 } h=\frac{\omega^2 r^2}{2g}-z \text{ 计算该点在自由面下的水深,代入式(2-8-6)进行计算}\right)$,然后,用水静力学方程计算。即

$$p = p_a + \gamma h$$

为什么绕铅直轴作等角速旋转运动的液体,也可用水静力学方程求压强呢?我们仍然把两者的平衡微分方程进行对比说明。

静止液体	绕铅直轴等角速旋转液体
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\omega^2 x$
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\omega^2 y$
$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g$

可见,两者所受的单位质量力在铅直轴向的分力是完全一致的。即它们在铅直方向的压强递增率相同。所以,都服从于同一形式的水静力学方程。但是,我们也同样看到,它们在垂直于 z 轴的水平面内有显著的区别:即静止液体在水平面内压强递增率为零,其水平面为等压面;而绕铅直轴作等角速旋转运动的液体,在水平面内压强递增率不为零,其水平面不是等压面。由于水平面内各质点所受的牵连离心惯性力是随半径 r 变化的,因而各质点所受质量力的大小及方向都在不断改变。这时,它的等压面不是倾斜面,而是一个旋转抛物面。在同一水平面上的轴心压强最低,边缘的压强最高,这就是等角速旋转运动液体的一个显著特点。在工程技术中的许多设备,都是依据这一特点而进行工作的。

注意的是(2-8-6)式~(2-8-8)式是在液面敞开和坐标系原点建立在液面中心导得的,尽管它是常见的情况,但没有普遍性。坐标原点可取在液体内转轴上的任一点,通常另一种取法是选择容器底面与转轴的交点等。如果液面封闭或坐标原点不取在液面中心,那末液体内压强分布应根据(2-8-5)式由具体的定解条件确定积分常数 C。因此在求解此类问题时,首先应选择好坐标系,包括坐标原点的选择。

此外,当容器内有两种互不相混的液体时,(2-8-5)式在旋转容器内的同种液体内才成立,包括坐标原点也必须在同种液体内。这涉及到(2-7-5)式积分时的积分线路及(2-8-5)式中的密度 ρ 的取值。

现举以下几个例子,说明该理论的应用:

1. 盛满水的圆柱形容器,盖板中心开一小孔,如图 2-37。容器以旋转角速度 ω 绕铅直轴转动,等压面由静止时的水平面变成旋转抛物面,因为盖板封闭,迫使水面不能上升,盖板各点承受的压强为:

$$p=\gamma z_1=\gamma\frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{2-8-9}$$

相对压强为零的面如图中虚线所示。可见,轴心($r=0$)压强最低,边缘($r=R$)压强最高。

而压强与 ω^2 成正比，ω 增大，边缘压强也越大。离心铸造机就是利用这个原理。

2．盛满水的圆柱形容器，盖板边缘开一个孔，如图 2-38。容器以某一角速度 ω 绕铅直轴转动，容器旋转后，液体虽未流出，但压强分布发生了改变，相对压强为 0 的面如图中虚线所示。液体中各点压强分布为：

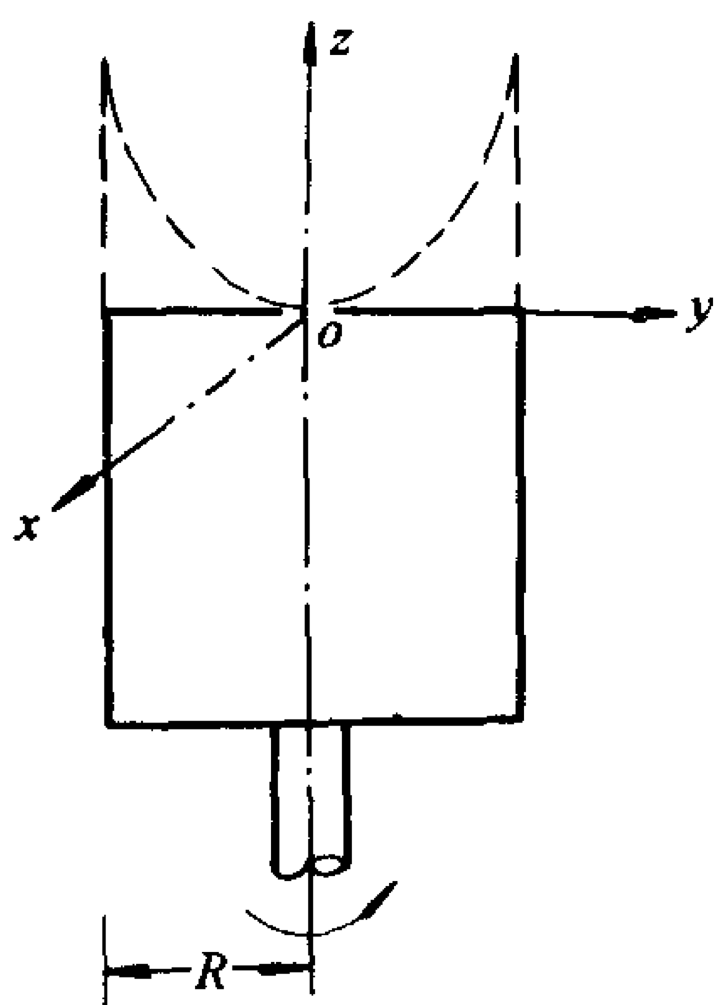


图 2-37　容器中心开孔

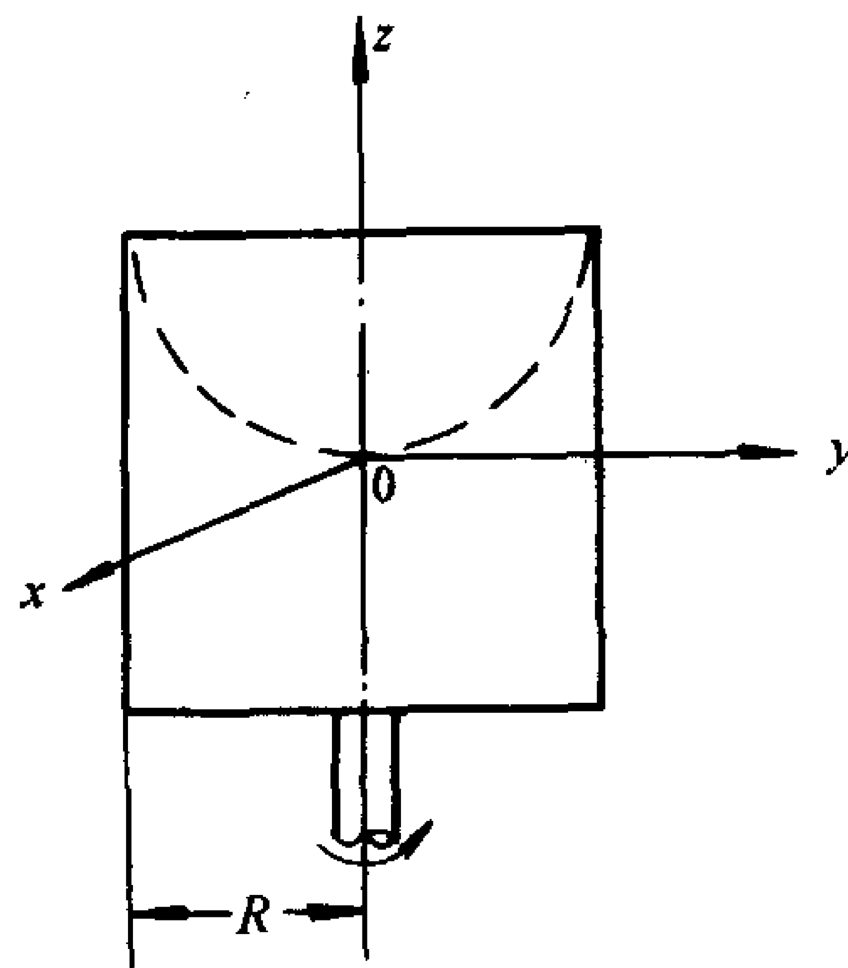


图 2-38　容器边缘开孔

$$p=\gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}-z\right)$$

可导得盖板各点承受的压强为：

$$p=-\gamma\left(\frac{\omega^2 R^2}{2g}-\frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) \tag{2-8-10}$$

或者真空压强为：

$$p_v=\gamma\left(\frac{\omega^2 R^2}{2g}-\frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) \tag{2-8-11}$$

若将坐标原点取在盖板与转轴的交点，同样可导得(2-8-10)式，但压强的函数形式就不同了。在轴心处($r=0$)，$p_v=\gamma\dfrac{\omega^2 R^2}{2g}$，说明轴心真空最大。在边缘处($r=R$)，$p_v=0$，说明边缘真空为 0。离心泵和风机就是利用这个原理，使流体不断从叶轮中心吸入。

3．开敞容器中流体混有杂质，容器以 ω 绕铅直轴转动，如图 2-39。设某一杂质的质量为 m_1，与该杂质同体积的流体质量为 m，现分析旋转后，该杂质的受力情况：

铅直方向受力为重力 ΔG 与浮力 Δp_1 之差，以 Δp_z 表示：

$$\Delta p_z=\Delta G-\Delta p_1=m_1 g-mg=(m_1-m)g$$

水平方向受力为离心力 ΔF_r 与压力差 Δp_2 之差，以 Δp_x 表示：

$$\Delta p_x=\Delta F_r-\Delta p_2=m_1\omega^2 r-m\omega^2 r=(m_1-m)\omega^2 r$$

而合力用向量 $\Delta\vec{p}$ 表示为：

$$\Delta\vec{p}=\Delta\vec{p}_z+\Delta\vec{p}_x=(m_1-m)\vec{g}+(m_1-m)\omega^2\vec{r} \tag{2-8-12}$$

当 $m_1=m$ 时，则合力 $\Delta\vec{p}=0$。该杂质混合在流体中不能用这个原理清除。

当 $m_1>m$ 时，则合力 $\Delta\vec{p}$ 向右下方倾斜，该杂质在 $\Delta\vec{p}$ 的作用下，下沉于底部。离心除尘器就是利用这个原理，除去空气中的粉尘。

当 $m_1 < m$ 时，则合力 $\Delta \vec{p}$ 向左上方倾斜，该杂质在 $\Delta \vec{p}$ 的作用下，上浮于流体表面。油脂分离器就是利用这个原理，回收水中的汽油或油脂。

【例 2-8】 一半径为 $R = 30\text{cm}$ 的圆柱形容器中盛满水，然后用螺栓连接的盖板封闭，盖板中心开有一圆形小孔，如图 2-40。当容器以 $n = 300\text{r/min}$ 的转速旋转，求作用于盖板螺栓上的拉力。

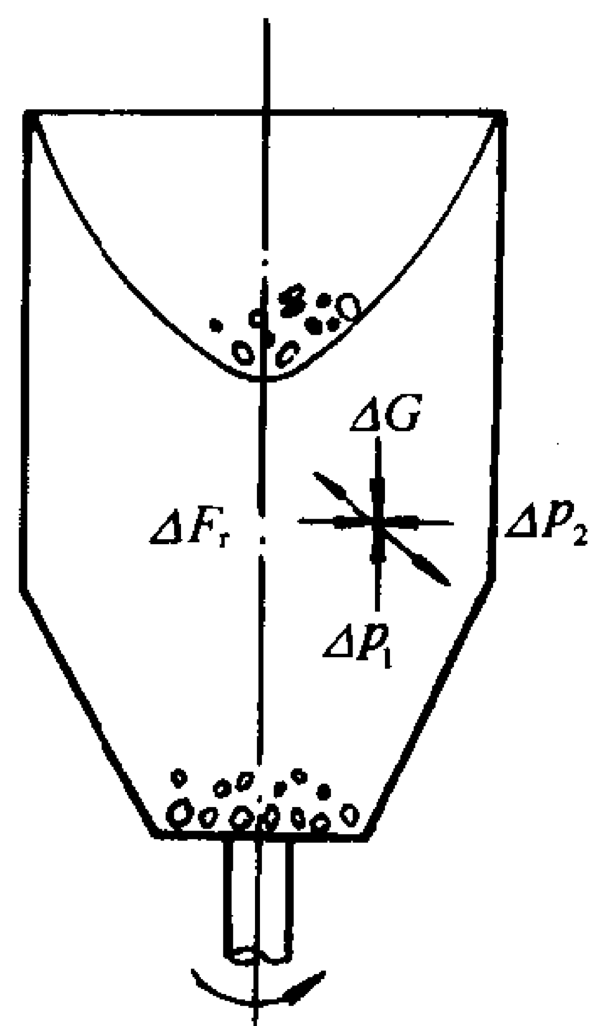


图 2-39 清除杂质

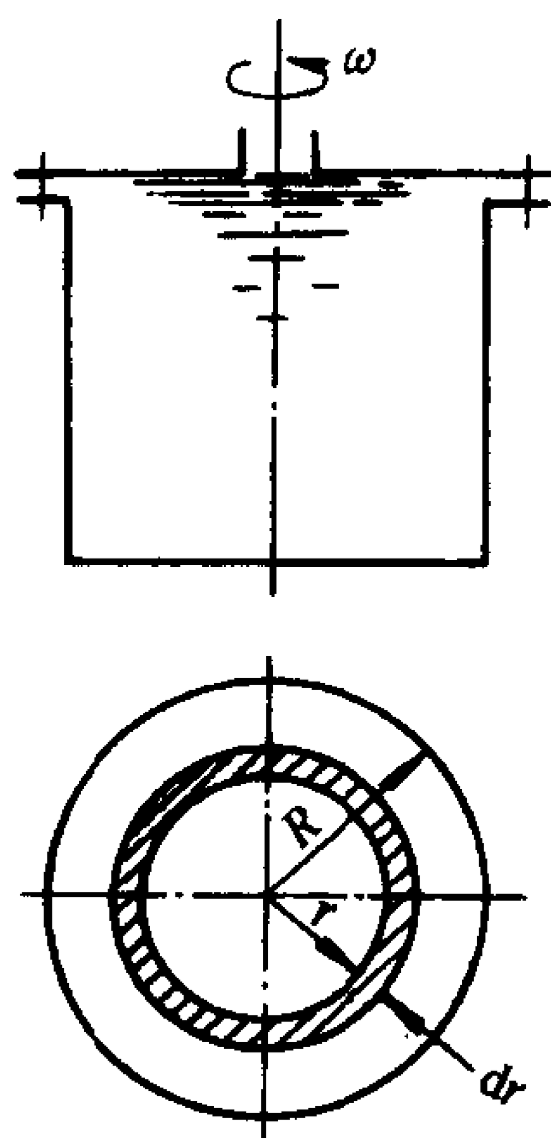


图 2-40 等角速旋转容器的盖板压力

【解】 螺栓所承受的拉力，恰好与容器顶盖的水静压力平衡。而水静压力的求得，必须先知道旋转容器顶盖的压强分布规律。本题水面与盖板接触，容器静止时，盖板各点所受的相对压强为零。容器绕铅直轴旋转后，等压面由水平面变成旋转抛物面。因盖板中心有小孔，液面直接和大气相通，相对压强为零。即自由面方程在轴心处（$r = 0$），在半径为 r 处的质点，水面上升 $z_1 = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$ 的液柱高度。盖板各点承受的压强为：

$$p = \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

就是盖板各点的压强分布规律。由此可见，不同半径的各点，压强是不相同的。但是半径相同的各点，则压强相等。因此，作用在盖板上任一微小环形面积的压力 $\mathrm{d}p$ 等于微小环形面积 $\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$ 与压强 p 的乘积。即

$$\mathrm{d}p = p\mathrm{d}A = \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g} 2\pi r \mathrm{d}r$$

由于作用在盖板上的各微小压力 $\mathrm{d}p$ 都是铅直向上的，故可积分上式求得作用于盖板上的水静压力。即

$$P = \int_P \mathrm{d}P = \int_A p\mathrm{d}A = \int_0^R \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2\pi\gamma\omega^2}{2g}\int_0^R r^3 \mathrm{d}\gamma = \frac{\gamma\pi\omega^2}{4g}R^4$$

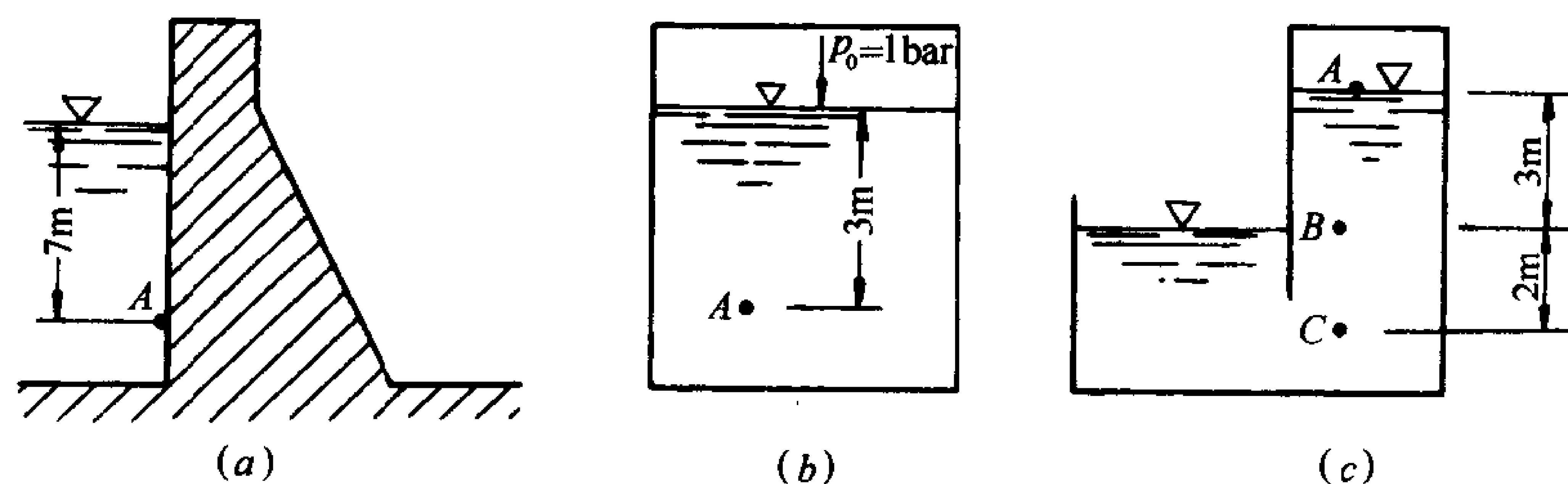
以 $\gamma = 9.807\text{kN/m}^3$，$\omega = 2\pi \times n/60 = 2\pi \times 300/60 = 31.4\text{s}^{-1}$，$R = 0.3\text{m}$，代入上式得：

$$P = 9.807 \times 3.14 \times 31.4^2 \times 0.3^4/4 \times 9.8 = 6.257\text{kN}$$

此力即为螺栓承受的拉力。

习 题

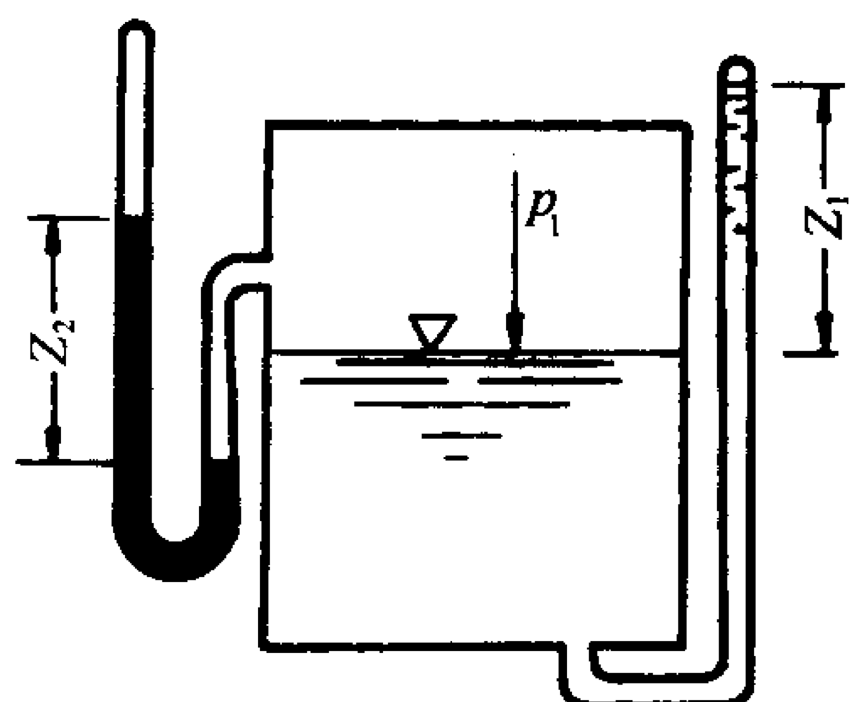
2-1 试求图(a)、(b)、(c)中，A、B、C 各点相对压强，图中 p_0 是绝对压强，大气压强 $p_a = 1\text{atm}$。



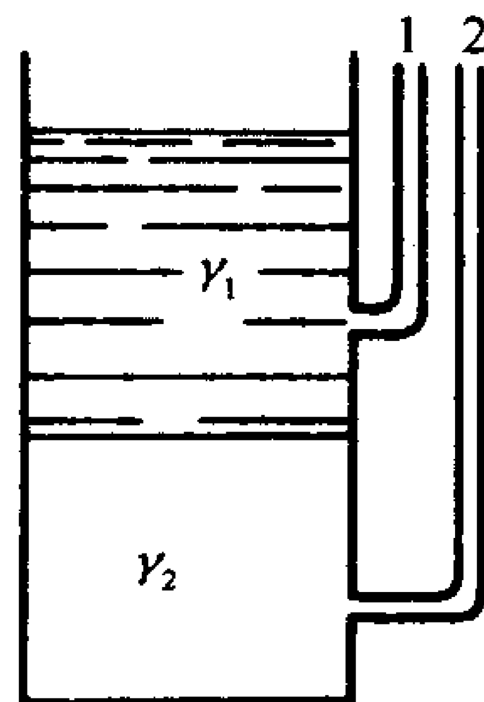
题 2-1 图

2-2 在封闭管端完全真空的情况下，水银柱差 $Z_2 = 50\text{mm}$，求盛水容器液面绝对压强 p_1 和水面高度 Z_1。

2-3 开敞容器盛有 $\gamma_2 > \gamma_1$ 的两种液体，问 1、2 两测压管中的液面哪个高些？哪个和容器的液面同高？



题 2-2 图



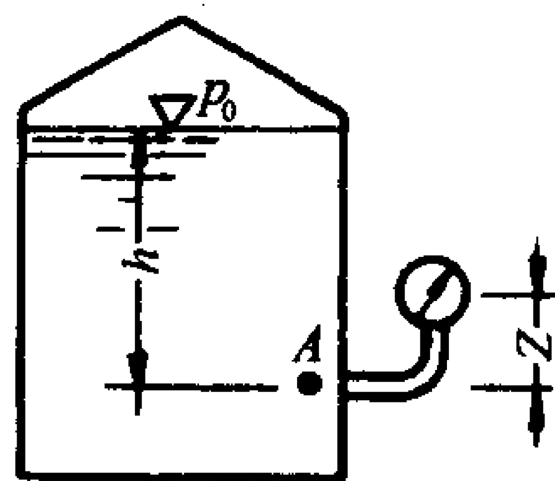
题 2-3 图

2-4 某地大气压强为 98.07kN/m^2，求(1) 绝对压强为 117.7kN/m^2 时的相对压强及其水柱高度。(2) 相对压强为 $7\text{mH}_2\text{O}$ 时的绝对压强。(3) 绝对压强为 68.5kN/m^2 时的真空压强。

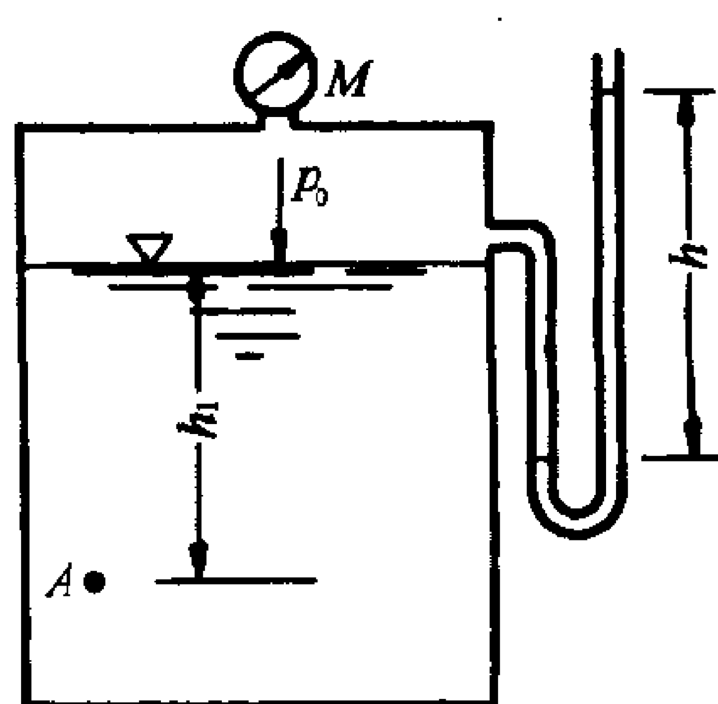
2-5 在封闭水箱中，水深 $h = 1.5\text{m}$ 的 A 点上安装一压力表，其中心距 A 点 $Z = 0.5\text{m}$，压力表读数为 4.9kN/m^2，求水面相对压强及其真空度。

2-6 封闭容器的水面的绝对压强 $p_0 = 107.7\text{kN/m}^2$，当地大气压强 $p_a = 98.07\text{kN/m}^2$。试求(1) 水深 $h_1 = 0.8\text{m}$ 时，A 点的绝对压强和相对压强。(2) 若 A 点距基准面的高度 $Z = 5\text{m}$，求 A 点的测压管高度及测压管水头，并图示容器内液体各点的测压管水头线。(3) 压力表 M 和酒精($\gamma = 7.944\text{kN/m}^2$)测压计 h 的读数为何值？

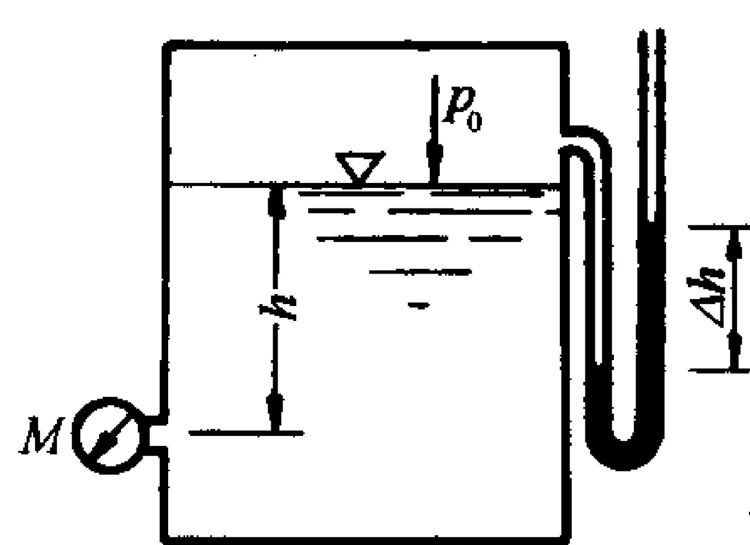
2-7 测压管中水银柱差 $\Delta h = 100\text{mm}$，在水深 $h = 2.5\text{m}$ 处安装一测压表 M，试求 M 的读数。并图示测压管水头线的位置。



题 2-5 图



题 2-6 图

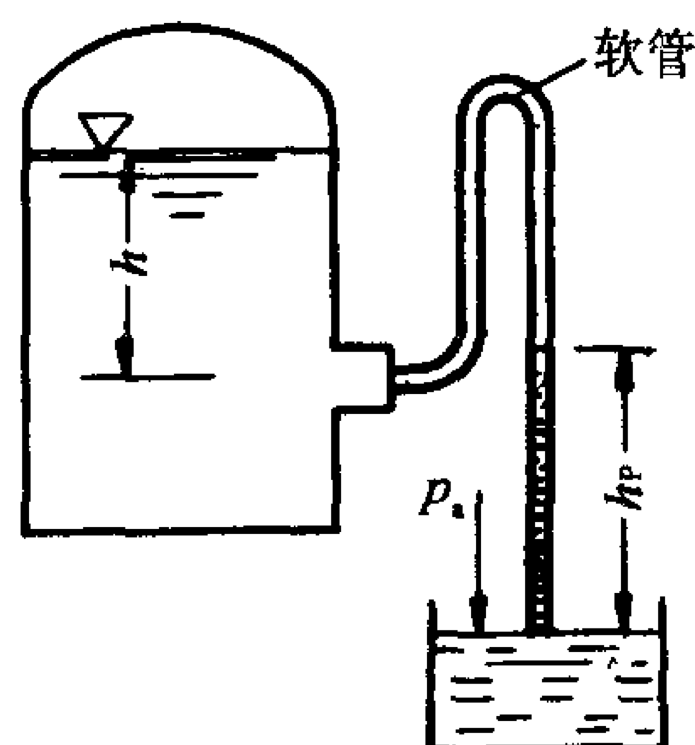


题 2-7 图

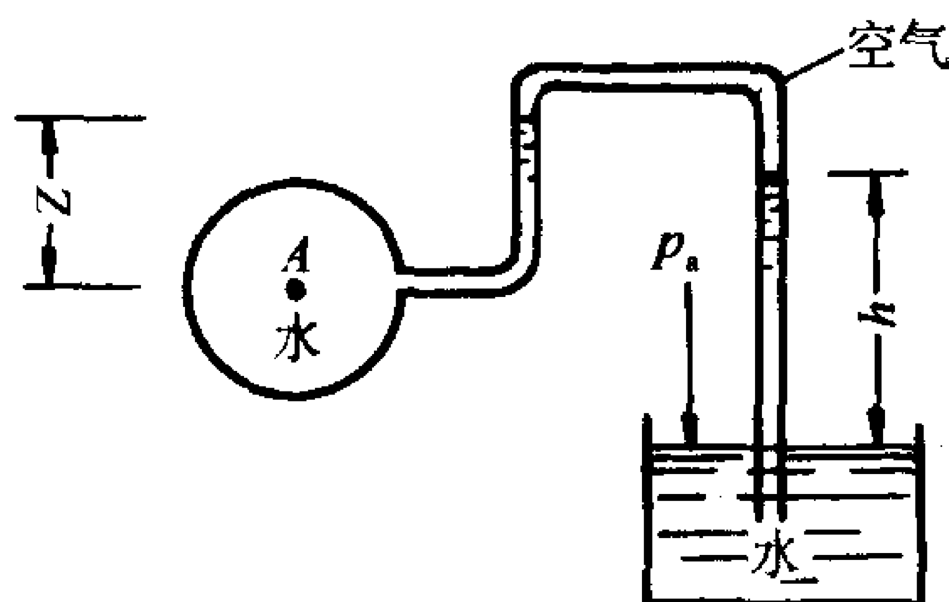
2-8 已知水深 $h = 1.2\text{m}$，水银柱高度 $h_p = 240\text{mm}$，大气压强 $p_a = 730\text{mmHg}$，连接橡皮软管中全部是空气。求封闭水箱水面的绝对压强值及真空度。

2-9　已知图中 $Z=1\text{m}, h=2\text{m}$，求 A 点的相对压强及测压管中液面气体压强的真空度。

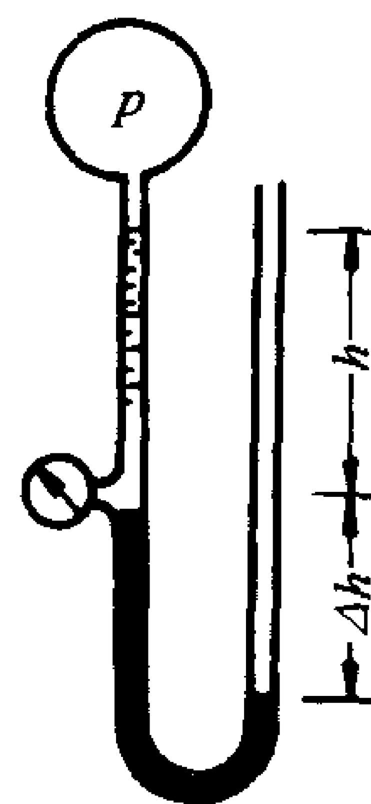
2-10　测定管路压强的 U 形测压管中，已知油柱高 $h=1.22\text{m}, \gamma_{油}=9\text{kN/m}^3$，水银柱差 $\Delta h=203\text{mm}$，求真空表读数及管内空气压强 p_0。



题 2-8　图



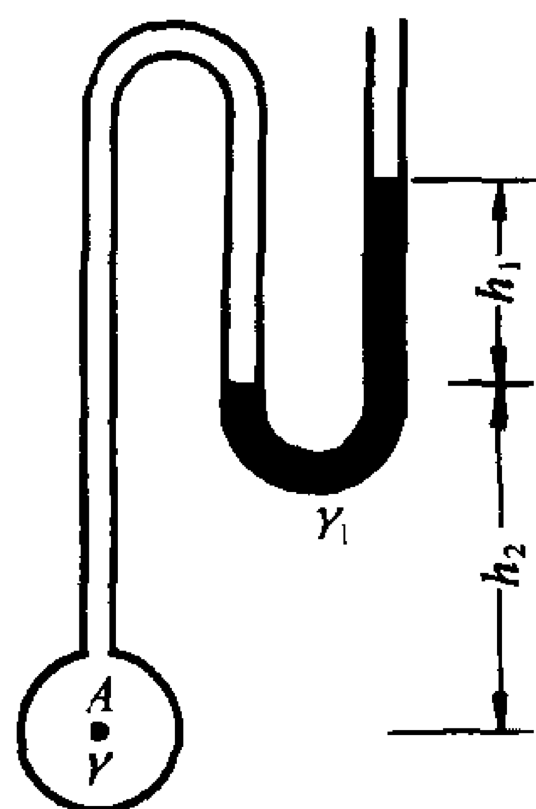
题 2-9　图



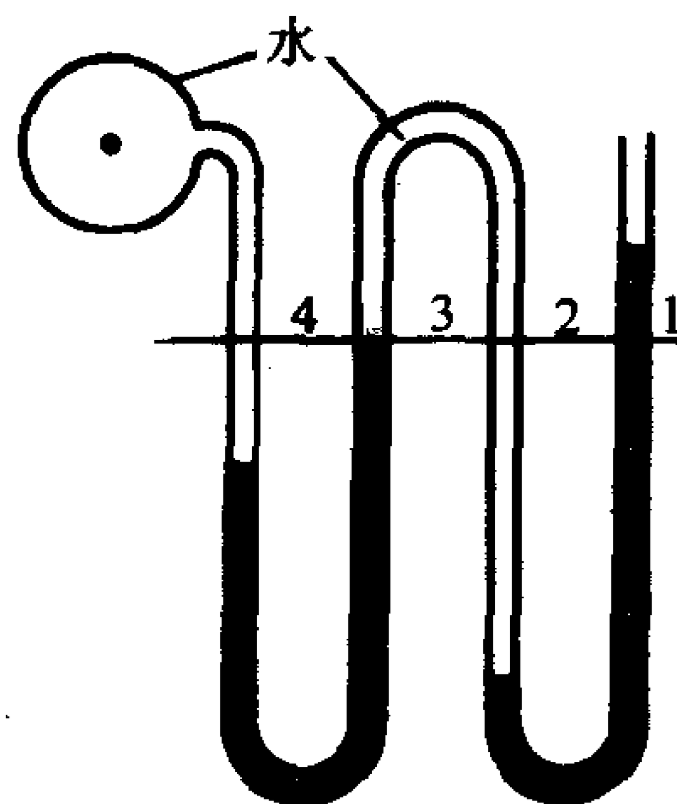
题 2-10　图

2-11　管路上安装一 U 形测压管，测得 $h_1=30\text{cm}, h_2=60\text{cm}$，已知(1) γ 为油($\gamma_{油}=8.354\text{kN/m}^3$)，$\gamma_1$ 为水银；(2) γ 为油，γ_1 为水；(3) γ 为气体，γ_1 为水，求 A 点压强水柱高度。

2-12　水管上安装一复式水银测压计如图所示。问 p_1、p_2、p_3、p_4 哪个最大？哪个最小？哪些相等？



题 2-11　图



题 2-12　图

2-13　一封闭容器盛有 γ_2(水银)$>\gamma_1$(水)的两种不同液体，试问同一水平线上的 1、2、3、4、5 各点的压强哪点最大？哪点最小？哪些点相等？

2-14　封闭水箱各测压管的液面高程为：$\nabla_1=100\text{cm}, \nabla_2=20\text{cm}, \triangle_4=60\text{cm}$，问$\nabla_3$ 为多少？

2-15　两高度差 $Z=20\text{cm}$ 的水管，当 γ_1 为空气及油($\gamma_{油}=9\text{kN/m}^3$)时，$h_{均}$ 为 10cm，试分别求两管的压差。

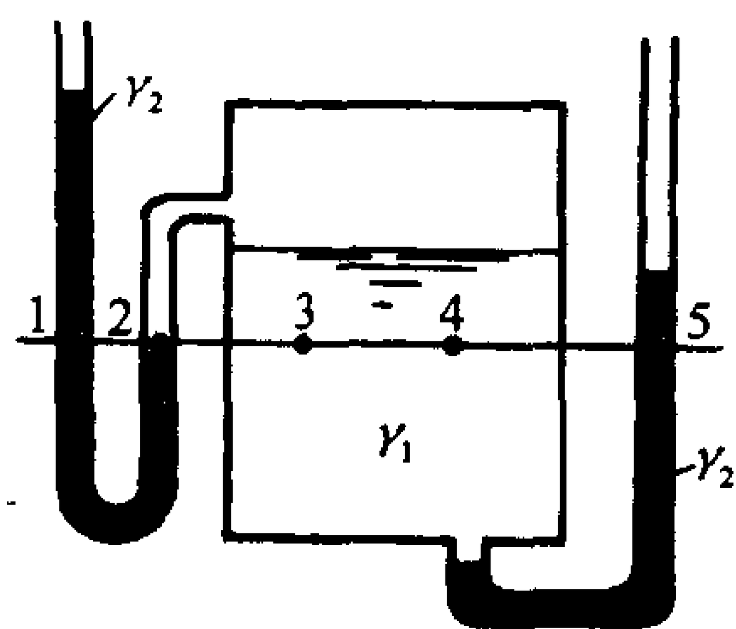
2-16　已知水箱真空表 M 的读数为 0.98kN/m^2，水箱与油箱的液面差 $H=1.5\text{m}$，水银柱差 $h_2=0.2\text{m}, \gamma_{油}=7.85\text{kN/m}^3$，求 h_1 为多少米？

2-17　封闭水箱中的水面高程与筒 1，管 3、4 中的水面同高，筒 1 可以升降，借以调节箱中水面压强。如将(1) 筒 1 下降一定高度；(2) 筒 1 上升一定高度。试分别说明各液面高程哪些最高？哪些最低？哪些同高？

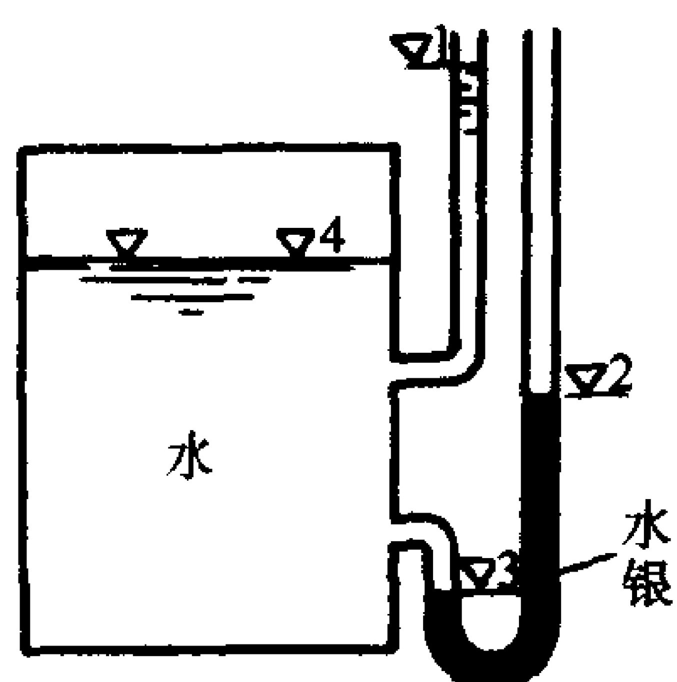
2-18　盛液容器绕铅直轴作等角速度旋转，设液体为非均质，试证：等压面也是等密面和等温面。

2-19　在水泵的吸入管 1 和压出管 2 中安装水银压差计，测得 $h=120\text{mm}$，问水经过水泵后压强增加多少？若为风管，则水泵换为风机，压强增加为多少 mmH_2O？

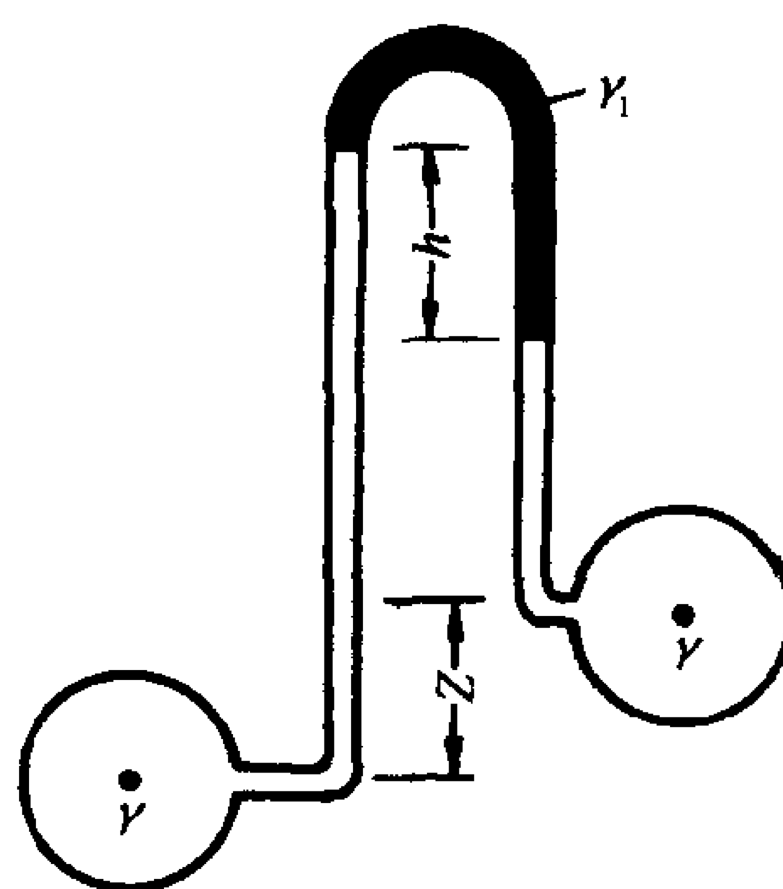
2-20　图为倾斜水管上测定压差的装置，测得 $Z=200\text{mm}, h=120\text{mm}$，当(1) $\gamma_1=9.02\text{kN/m}^3$为油时；(2) γ_1 为空气时，分别求 A、B 两点的压差。



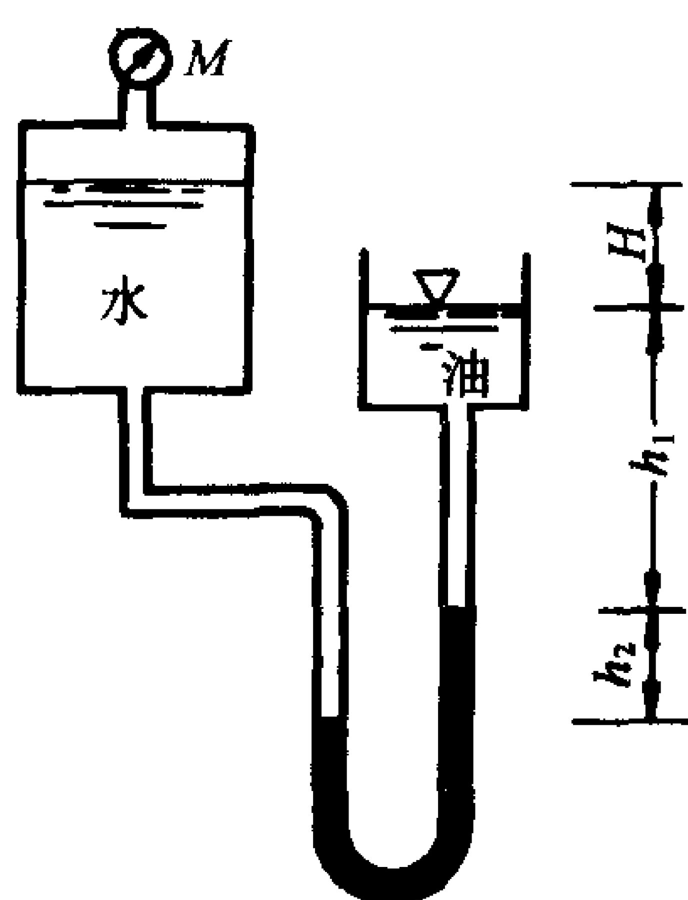
题2-13 图



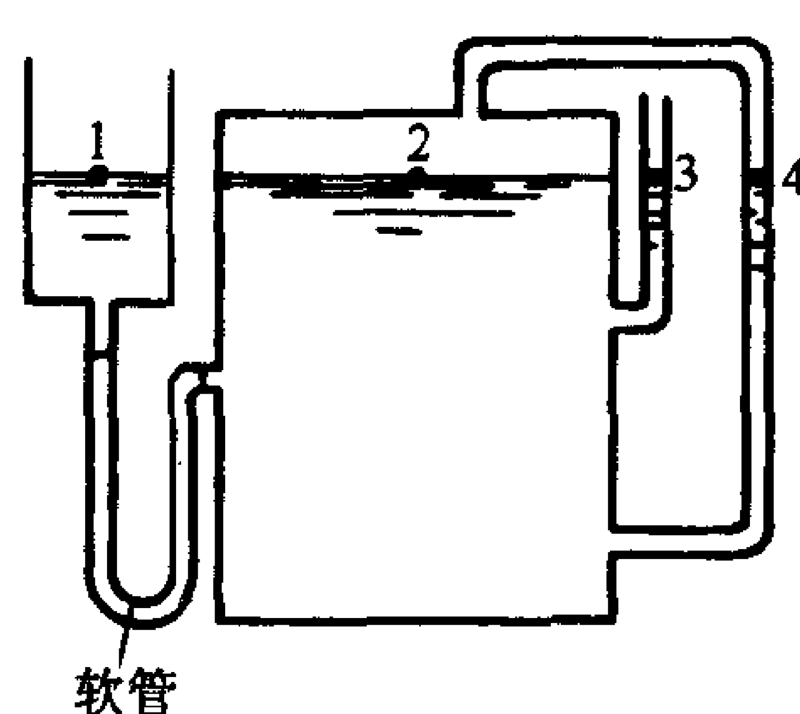
题2-14 图



题2-15 图

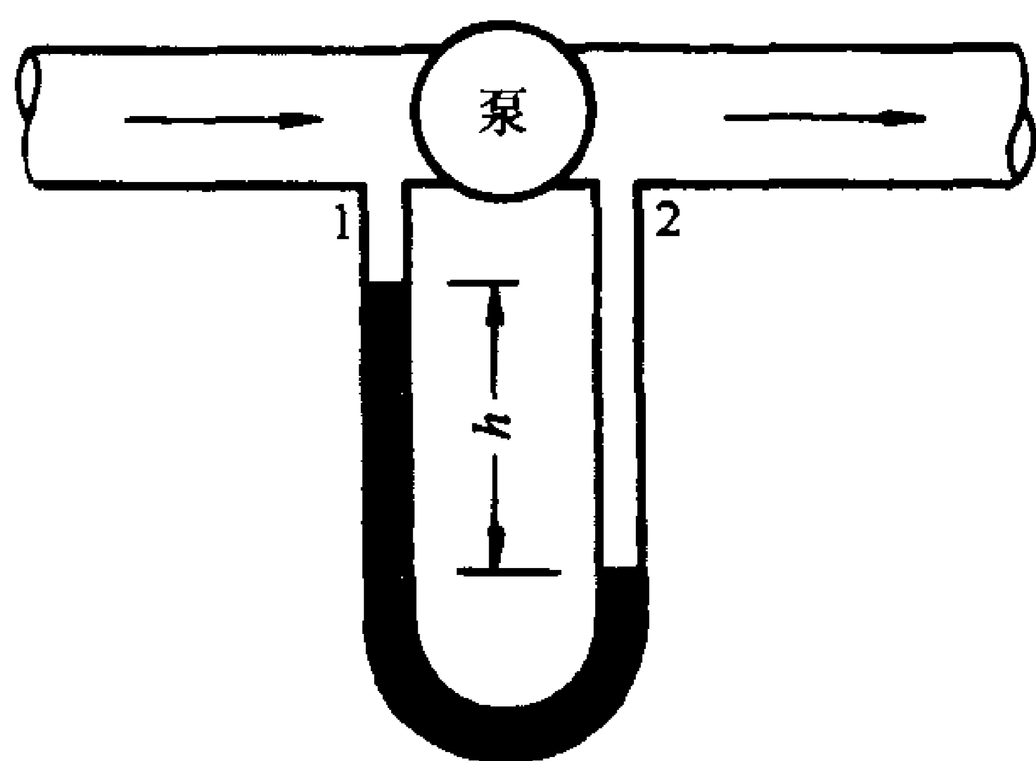


题2-16 图

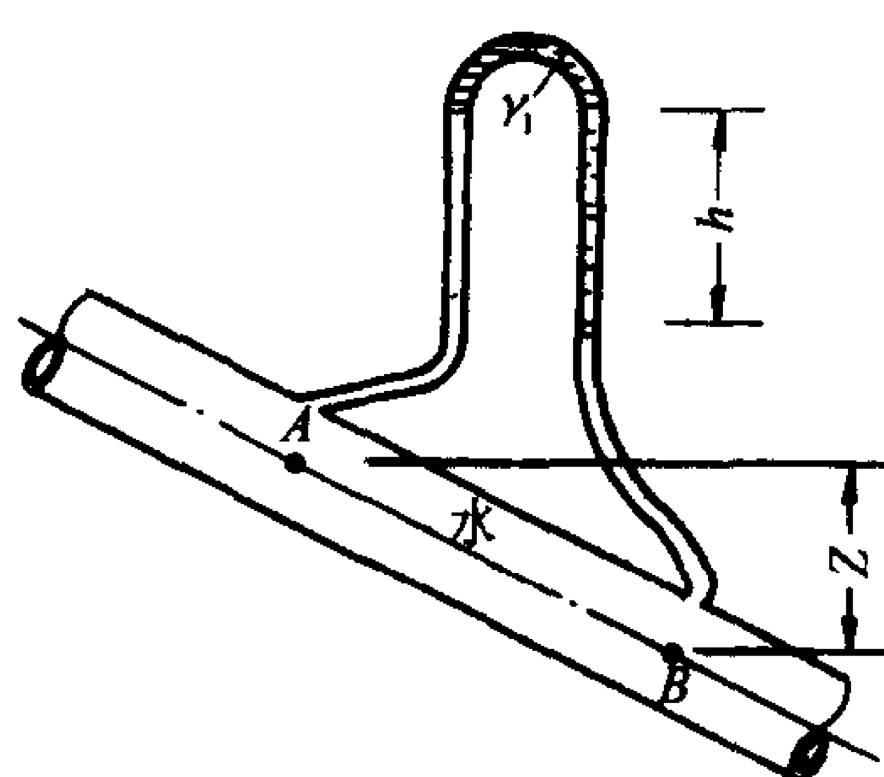


题2-17 图

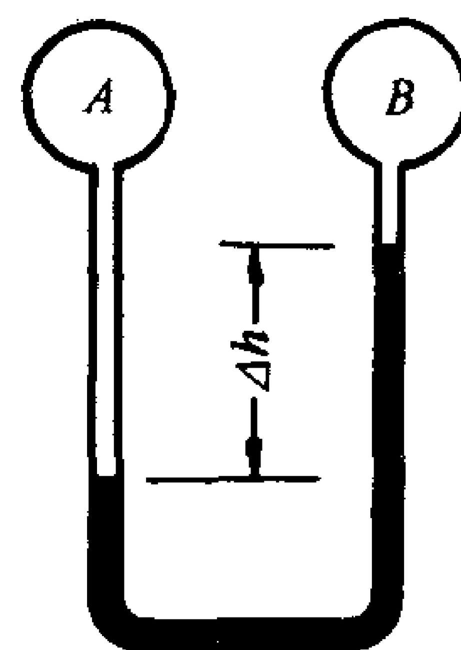
2-21 A、B 两管的轴心在同一水平线上，用水银压差计测定压差。测得 $\Delta h = 13\text{cm}$，当 A、B 两管通过(1) 为水时；(2) 为煤气时，试分别求压差。



题2-19 图



题2-20 图



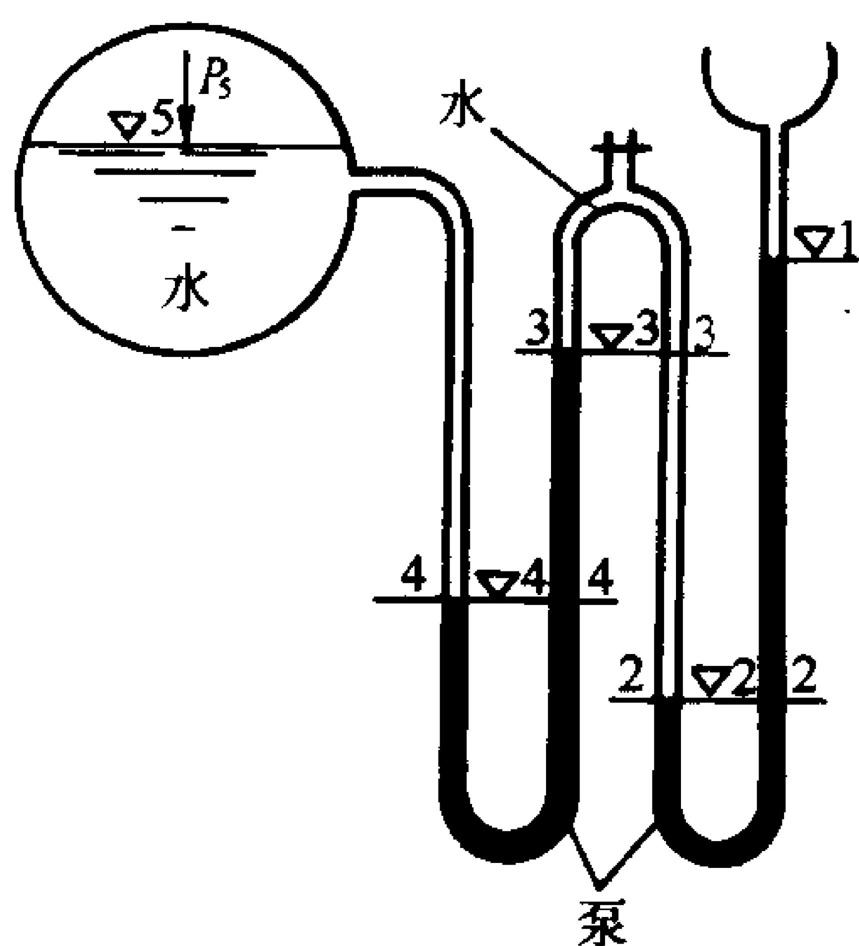
题2-21 图

2-22 复式测压计中各液面高程为：$\nabla_1 = 3.0\text{m}$，$\nabla_2 = 0.6\text{m}$，$\nabla_3 = 2.5\text{m}$，$\nabla_4 = 1.0\text{m}$，$\nabla_5 = 3.5\text{m}$，求 p_5。

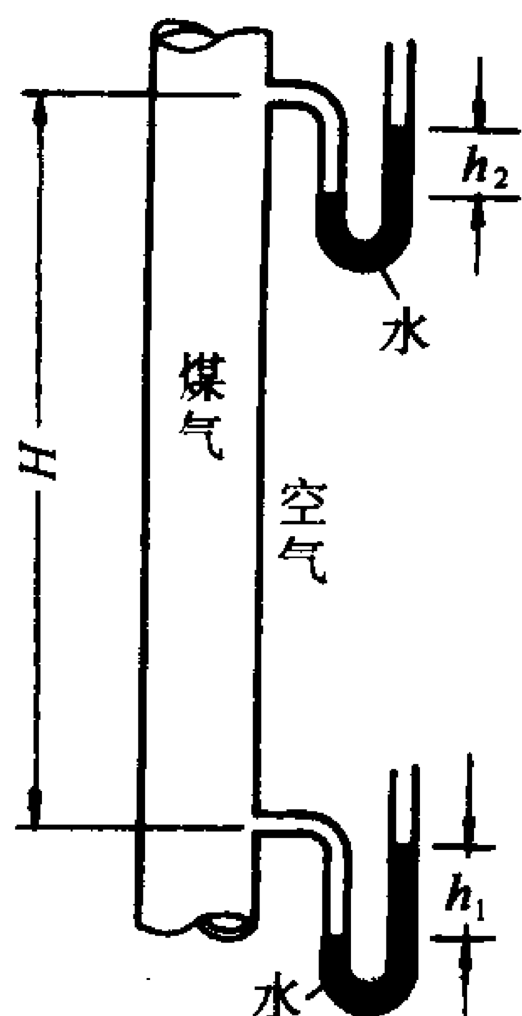
2-23 一直立煤气管，在底部测压管中测得水柱差 $h_1 = 100\text{mm}$，在 $H = 20\text{m}$ 高处的测压管中测得水柱差 $h_2 = 115\text{mm}$，管外空气容重 $\gamma_{气} = 12.64\text{N/m}^3$，求管中静止煤气的容重。

2-24 已知倾斜微压计的倾角 $\alpha = 20°$，测得 $l = 100\text{mm}$，微压计中液体为酒精，$\gamma_{酒} = 7.94\text{kN/m}^3$，求测定空气管段的压差。

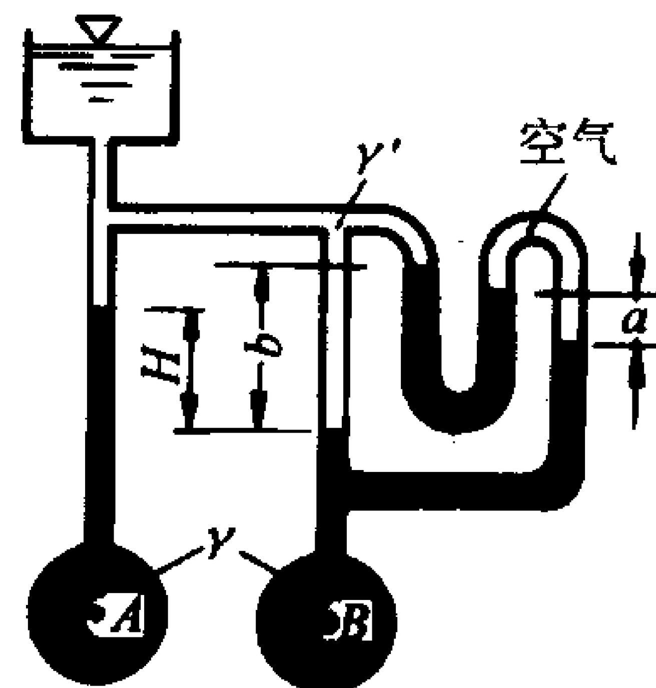
2-25 为了精确测定容重为 γ 的液体中 A、B 两点的微小压差，特设计图示微压计。测定时的各液面差如图示。试求 γ 与 γ' 的关系及同一高程上 A、B 两点的压差。



题 2-22 图



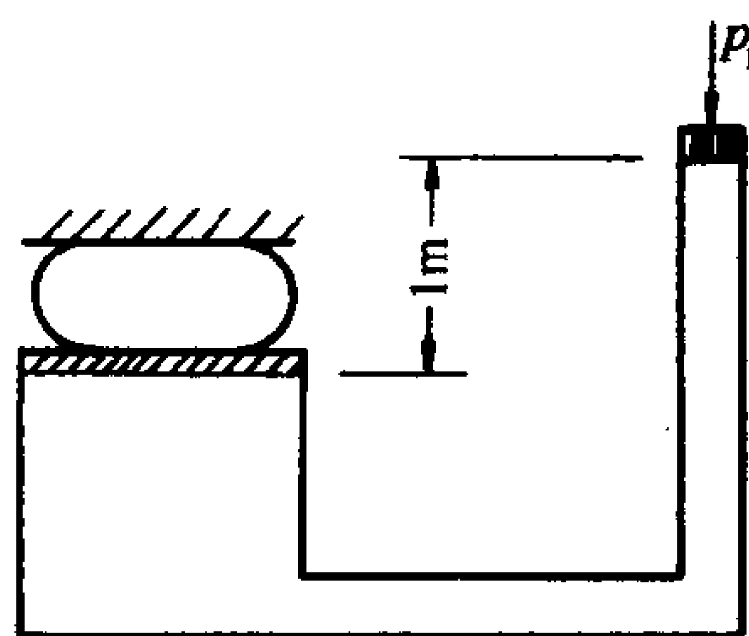
题 2-23 图



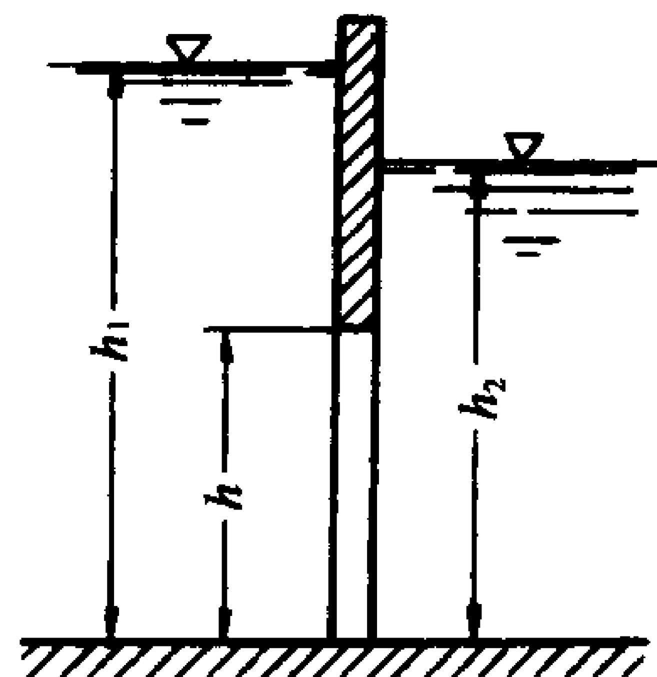
题 2-25 图

2-26 有一水压机，小活塞面积 $A_1=10\text{cm}^2$，大活塞面积 $A_2=1000\text{cm}^2$。(1) 若小活塞上施力 98.1N，问大活塞上受力多少？(2) 若小活塞上再增加力 19.6N，问大活塞上再增加力多少？

2-27 有一矩形底孔闸门，高 $h=3\text{m}$，宽 $b=2\text{m}$，上游水深 $h_1=6\text{m}$，下游水深 $h_2=5\text{m}$。试用图解法及解析法求作用于闸门上的水静压力及作用点。



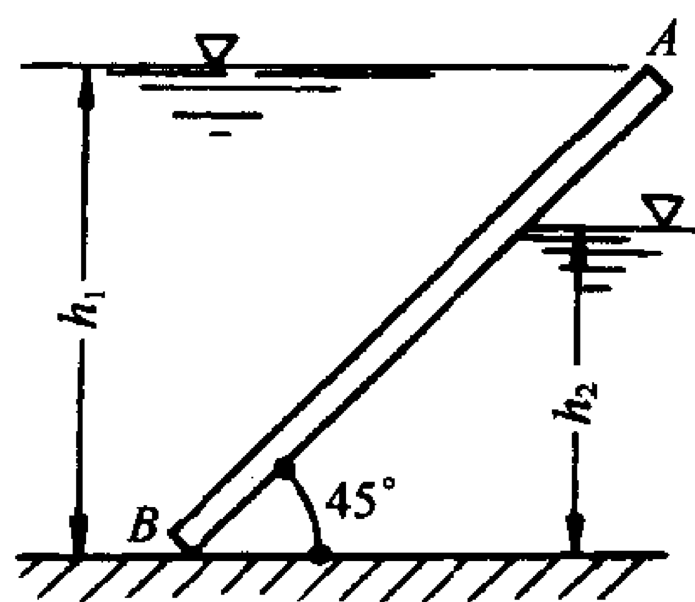
题 2-26 图



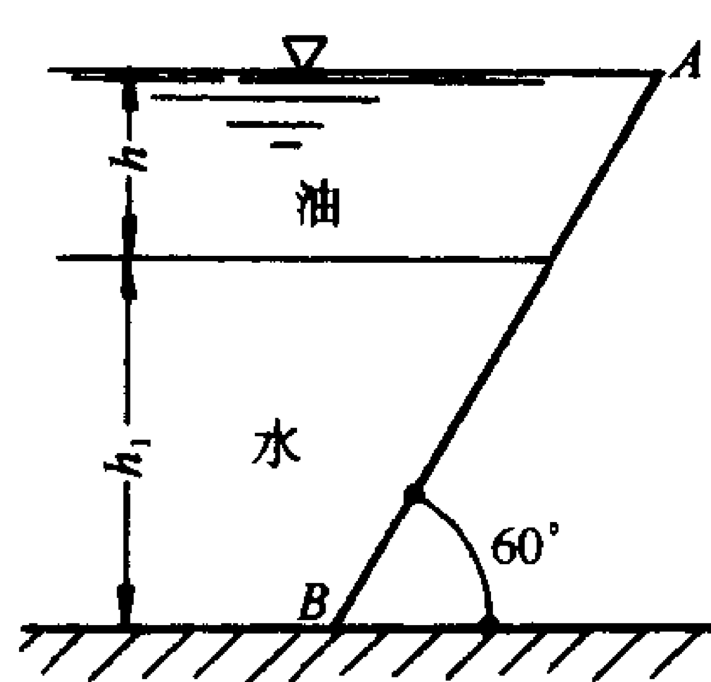
题 2-27 图

2-28 宽为 1m，长为 AB 的矩形闸门，倾角为 45°，左侧水深 $h_1=3\text{m}$，右侧水深 $h_2=2\text{m}$。试用图解法求作用于闸门上的水静压力及其作用点？

2-29 倾角 $\alpha=60°$ 的矩形闸门 AB，上部油深 $h=1\text{m}$，下部水深 $h_2=2\text{m}$，$\gamma_{油}=7.84\text{kN/m}^3$，求作用在闸门上每米宽度的水静压力及其作用点。



题 2-28 图

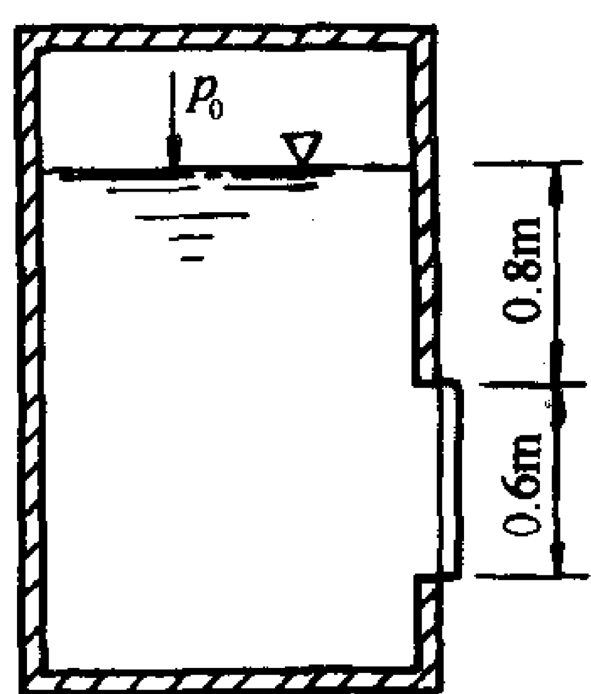


题 2-29 图

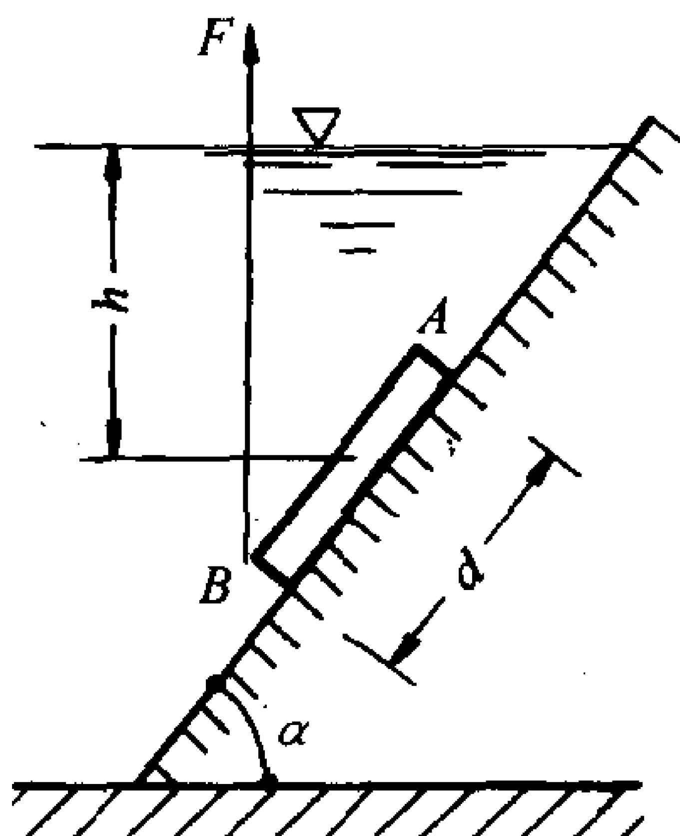
2-30 密封方形柱体容器中盛水，底部侧面开 0.5×0.6m 的矩形孔，水面绝对压强 $p_0=117.7\text{kN/m}^2$，当地大气压强 $p_a=98.07\text{kN/m}^2$，求作用于闸门的水静压力及作用点。

2-31 坝的圆形泄水孔，装一直径 $d=1\text{m}$ 的平板闸门，中心水深 $h=3\text{m}$，闸门所在斜面 $\alpha=60°$ 闸门 A 端设有铰链，B 端钢索可将闸门拉开。当开启闸门时，闸门可绕 A 向上转动。在不计摩擦力及钢索、闸门重力时，求开启闸门所需之力 F $\left(注：圆形 J_c=\frac{\pi}{64}D^4\right)$。

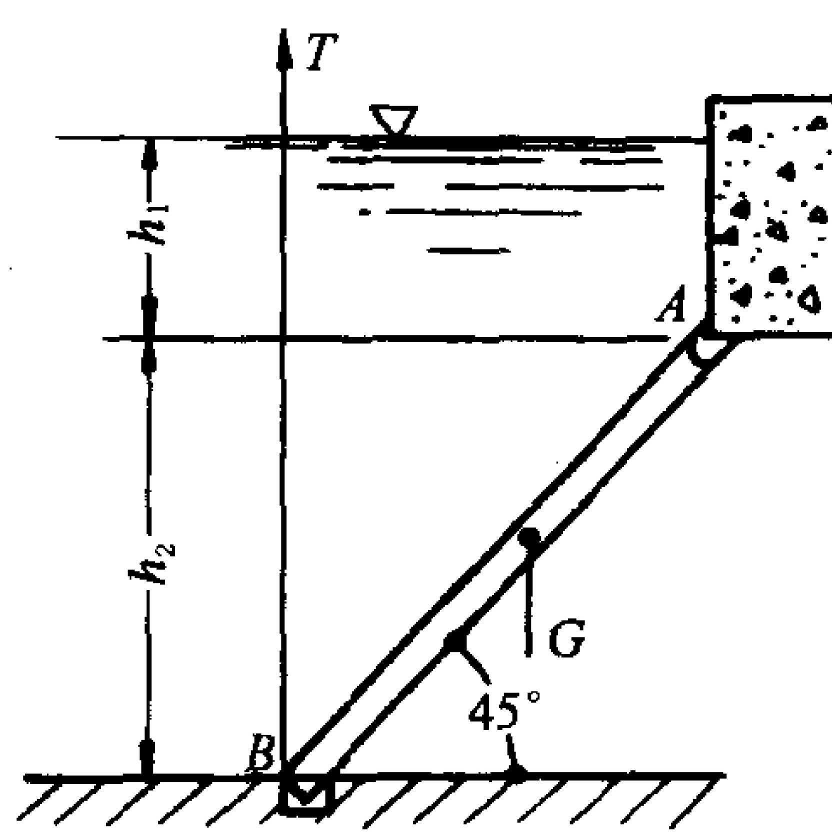
2-32 AB 为一矩形闸门，A 为闸门的转轴，闸门宽 $b=2\text{m}$，闸门自重 $G=19.62\text{kN}$，$h_1=1\text{m}$，$h_2=2\text{m}$。问 B 端所施的铅直力 T 为何值时，才能将闸门打开？



题 2-30 图



题 2-31 图

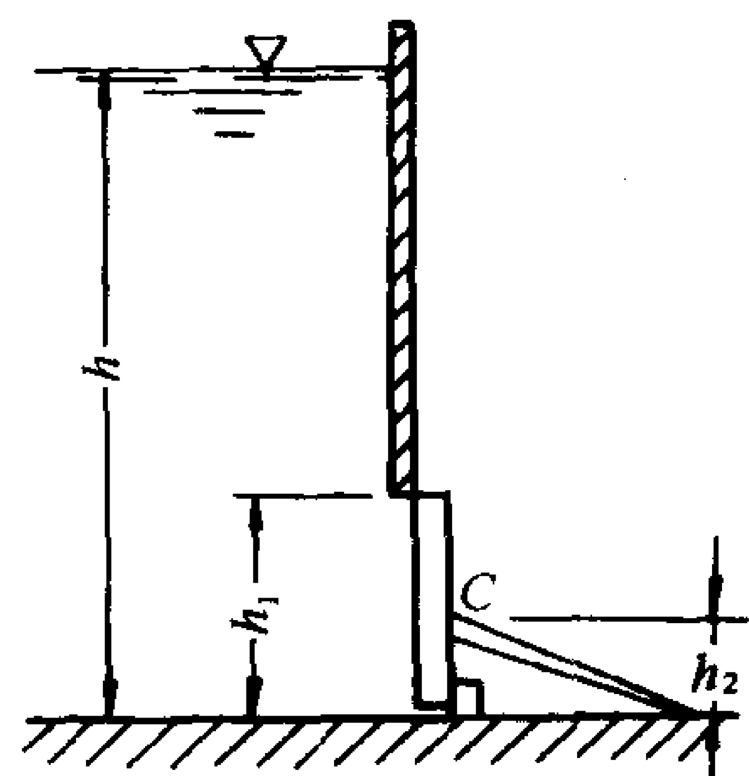


题 2-32 图

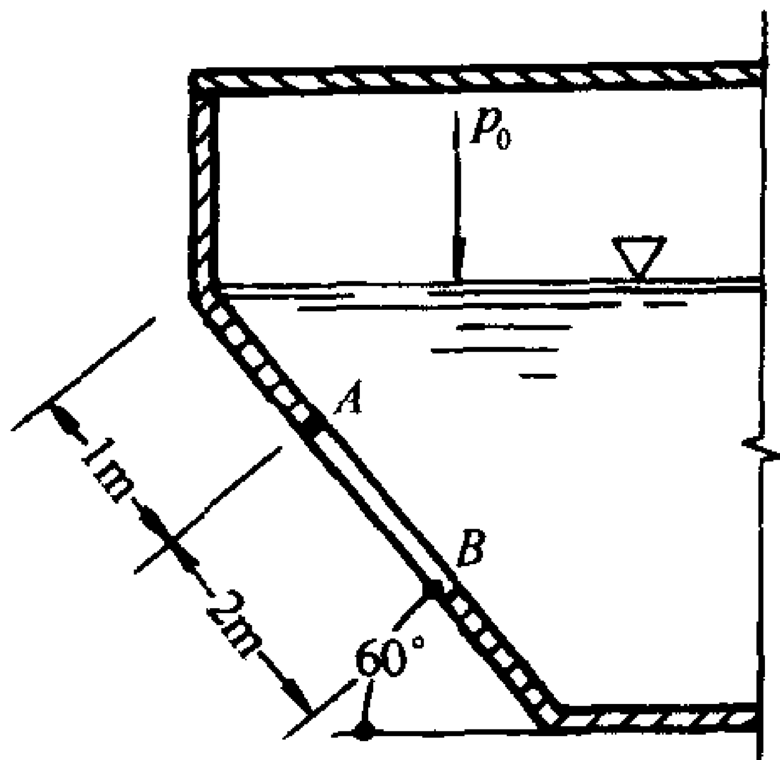
2-33 某处设置安全闸门如图所示，闸门宽 $b=0.6\text{m}$，高 $h_1=1\text{m}$，铰链 C 装置于距底 $h_2=0.4\text{m}$，闸门可绕 C 点转动。求闸门自动打开的水深 h 为多少米。

2-34 封闭容器水面的绝对压强 $p_0=137.37\text{kN/m}^2$，容器左侧开 $2\times2\text{m}$ 的方形孔，覆以盖板 AB，当大气压 $p_a=98.07\text{kN/m}^2$ 时，求作用于此盖板的水静压力及作用点。

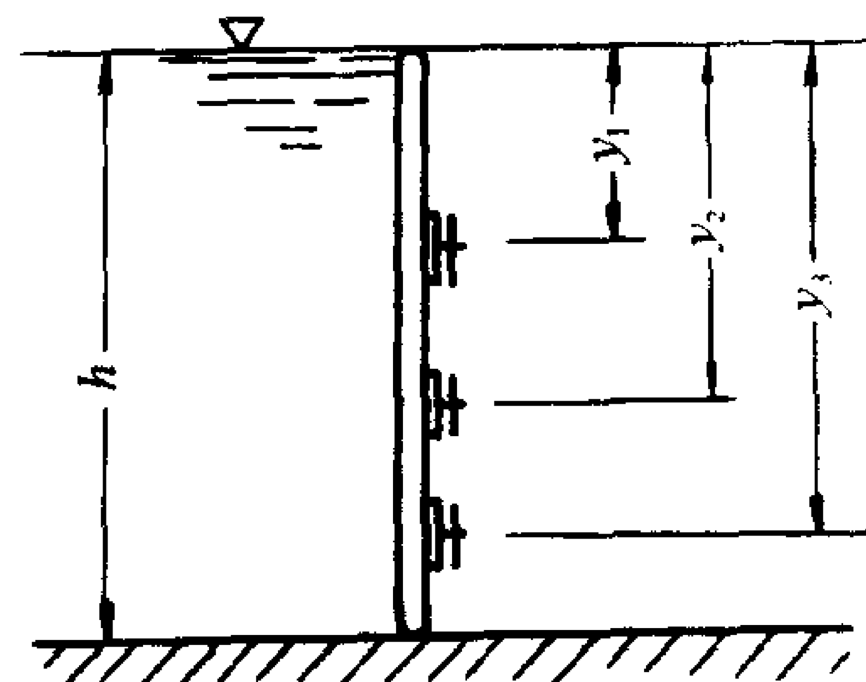
2-35 有一直立的金属平面矩形闸门，背水面用三根相同的工字梁作支撑，闸门与水深 $h=3\text{m}$ 同高。求各横梁均匀受力时的位置。



题 2-33 图



题 2-34 图

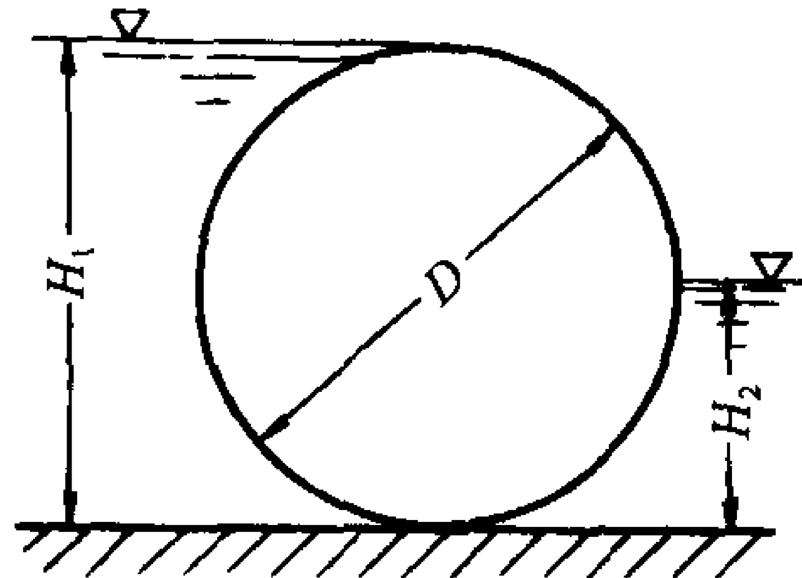


题 2-35 图

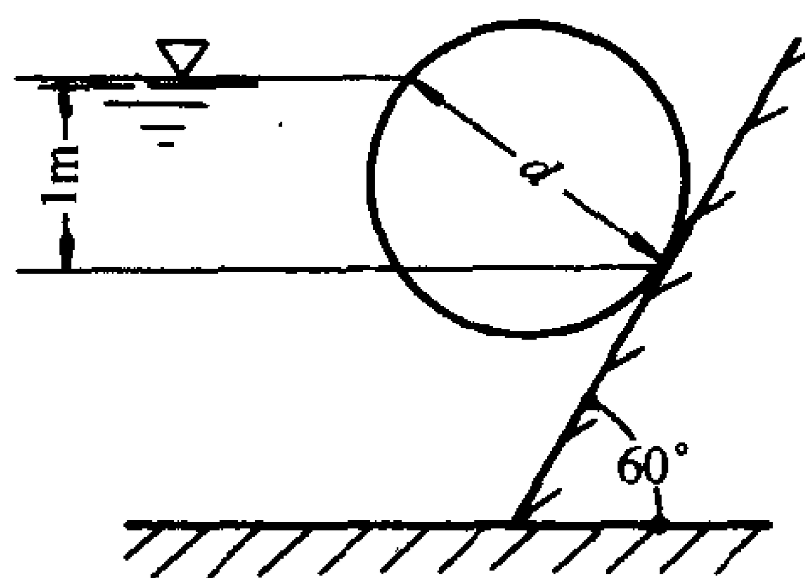
2-36 有一圆滚门，长度 $l=10\text{m}$，直径 $D=4\text{m}$，上游水深 $H_1=4\text{m}$，下游水深 $H_2=2\text{m}$，求作用于圆滚门上的水平和铅直分压力。

2-37 某圆柱体的直径 $d=2\text{m}$，长 $l=5\text{m}$，放置于 60°的斜面上，求水作用于圆柱体上的水平和铅直分压力及其方向。

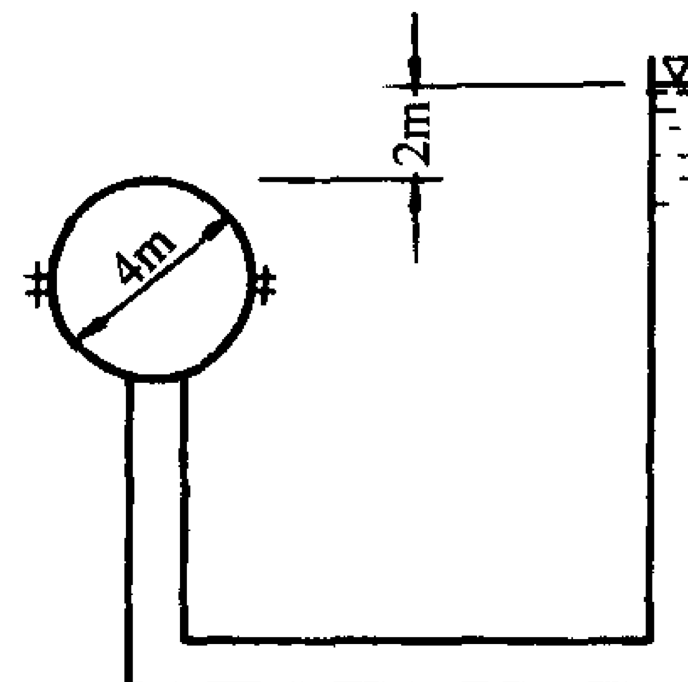
2-38 一球形容器盛水，容器由两个半球面用螺栓连接而成，水深 $H=2\text{m}$，$D=4\text{m}$，求作用于螺栓上的拉力。



题 2-36 图



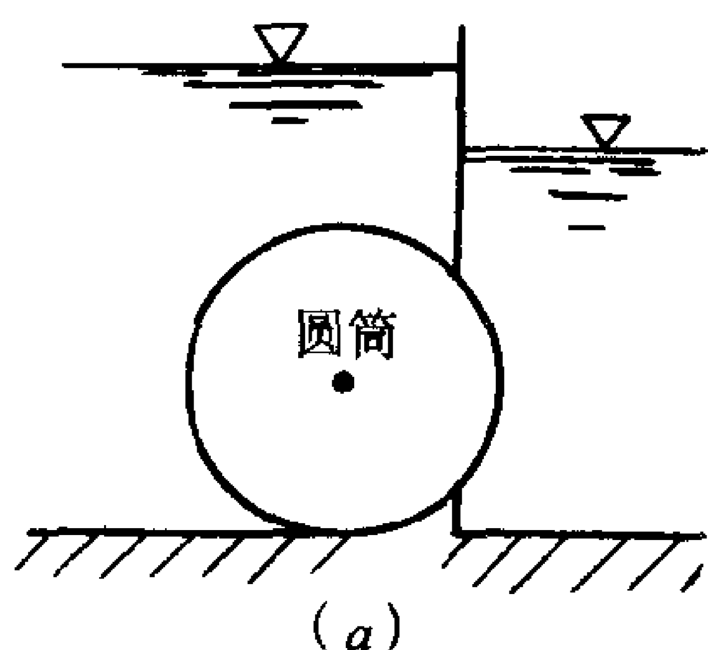
题 2-37 图

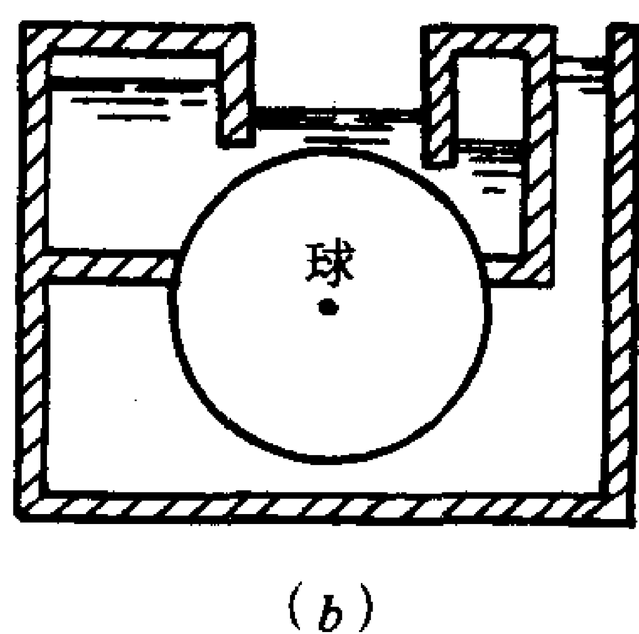


题 2-38 图

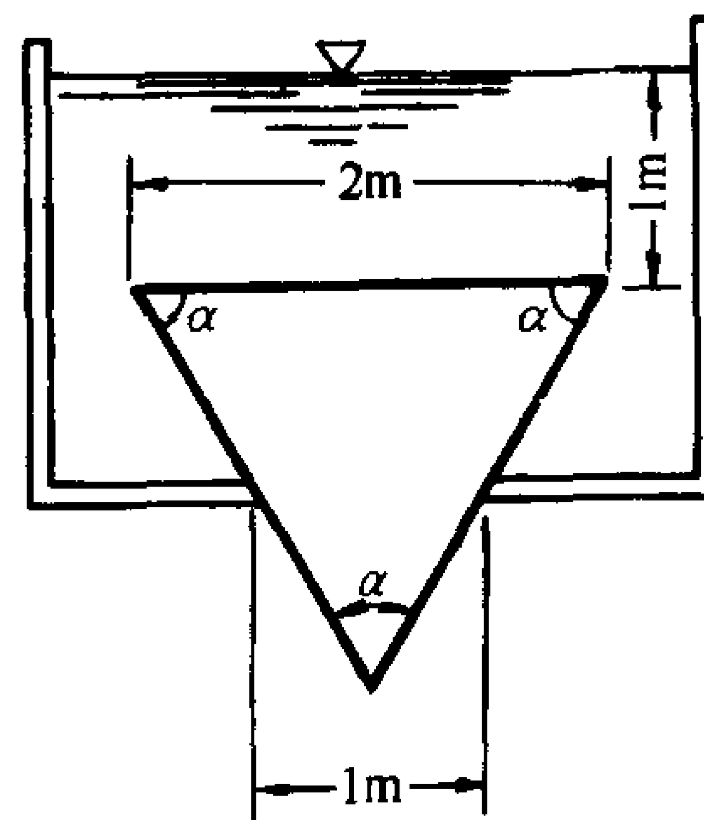
2-39　图(a)为圆筒,图(b)为圆球。试分别绘出压力体图并标出力的方向。

2-40　图示用一圆锥形体堵塞直径 $d=1\text{m}$ 的底部孔洞。求作用于此锥形体的水静压力。





题 2-39　图



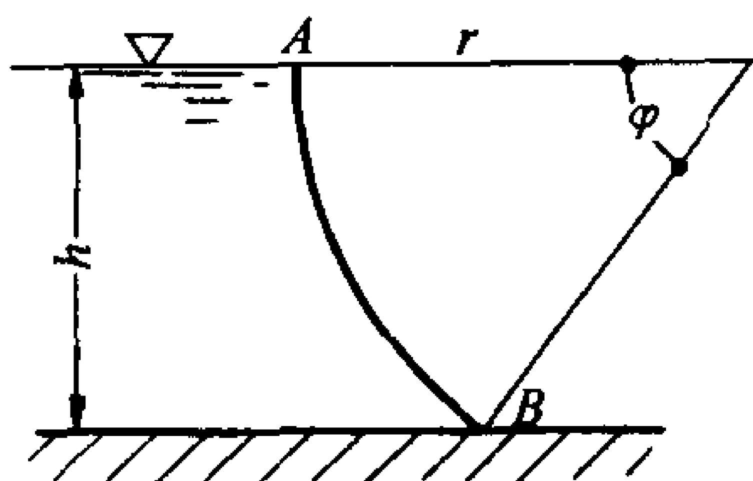
题 2-40　图

2-41　一弧形闸门 AB,宽 $b=4\text{m}$,圆心角 $\varphi=45°$,半径 $r=2\text{m}$,闸门转轴恰与水面齐平,求作用于闸门的水静压力及作用点。

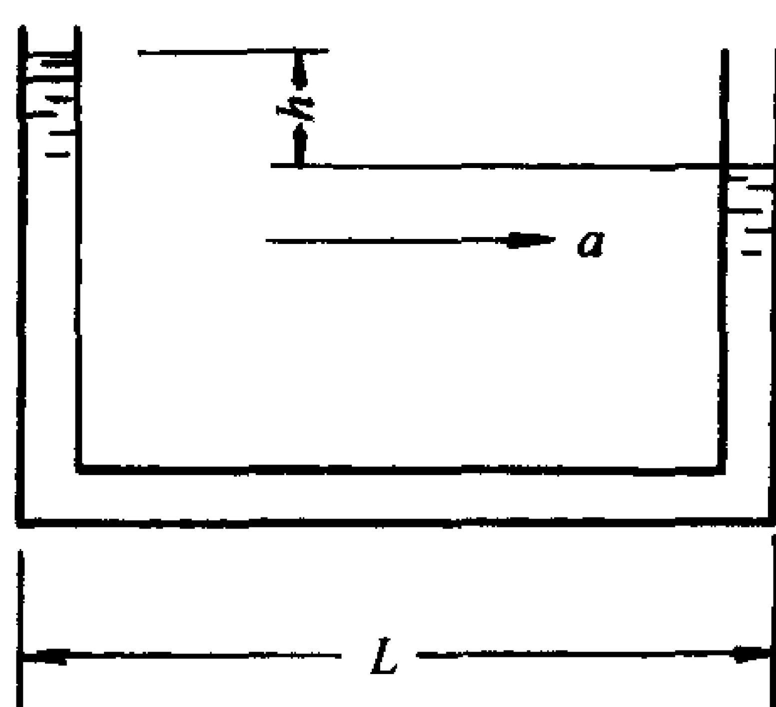
2-42　为了测定运动物体的加速度,在运动物体上装一直径为 d 的 U 形管,测得管中液面差 $h=0.05\text{m}$,两管的水平距离 $l=0.3\text{m}$,求加速度 a。

2-43　一封闭容器内盛水,水面压强 p_0,求容器自由下落时,水静压强分布规律。

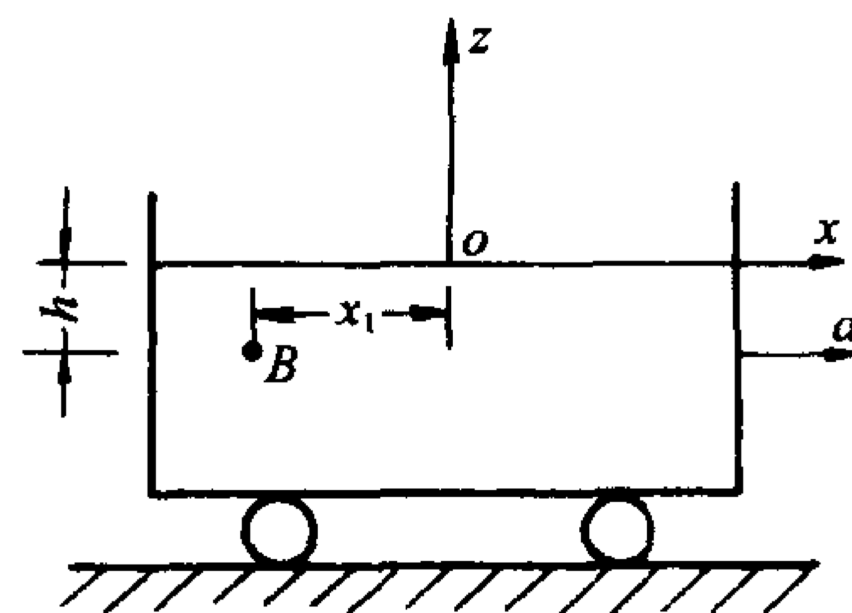
2-44　一洒水车以等加速度 $a=0.98\text{m/s}^2$ 在平地行驶,水车静止时,B 点位置为$x_1=1.5\text{m}$,水深 $h=1\text{m}$,求运动后该点的水静压强。



题 2-41　图



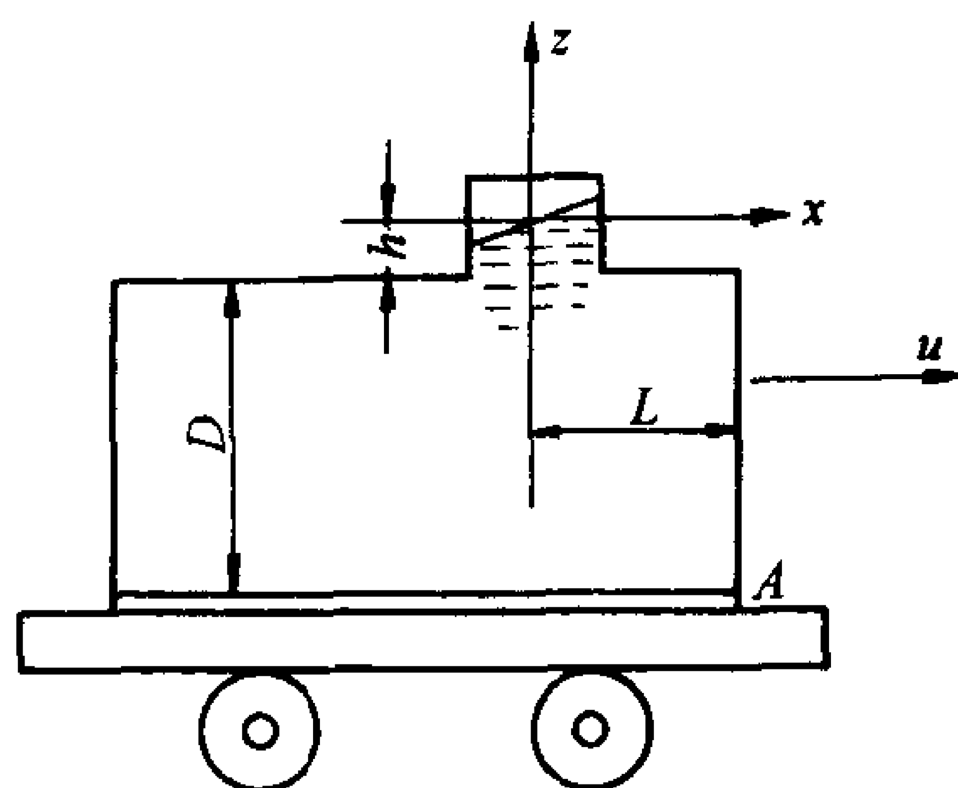
题 2-42　图



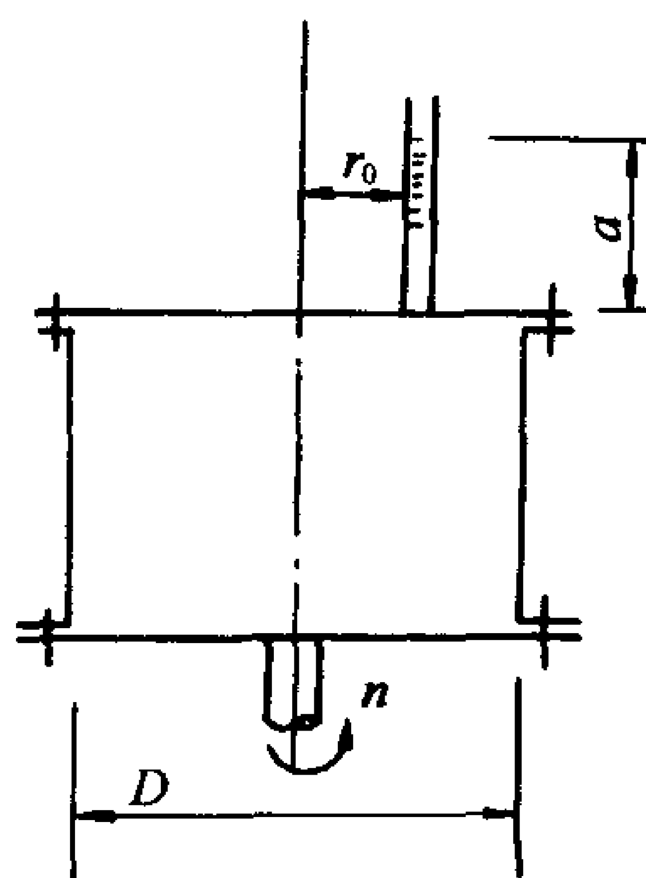
题 2-44　图

2-45　油罐车内装着 $\gamma=9807\text{N/m}^3$ 的液体,以水平直线速度 $u=10\text{m/s}$ 行驶。油罐车的尺寸为直径 $D=2\text{m}$,$h=0.3\text{m}$,$L=4\text{m}$。在某一时刻开始减速运动,经 100m 距离后完全停下。若考虑为均匀制动,求作用在侧面 A 上的作用力。

2-46　一圆柱形容器,直径 $D=1.2\text{m}$,完全充满水,顶盖上在 $r_0=0.43\text{m}$ 处开一小孔,敞口测压管中的水位 $a=0.5\text{m}$。问此容器绕其立轴旋转的转速 n 多大时,顶盖所受的静水总压力为零?



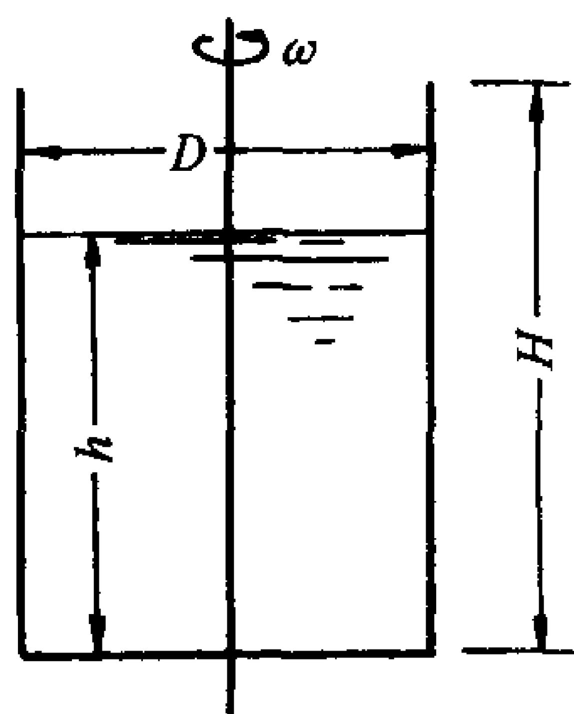
题 2-45　图



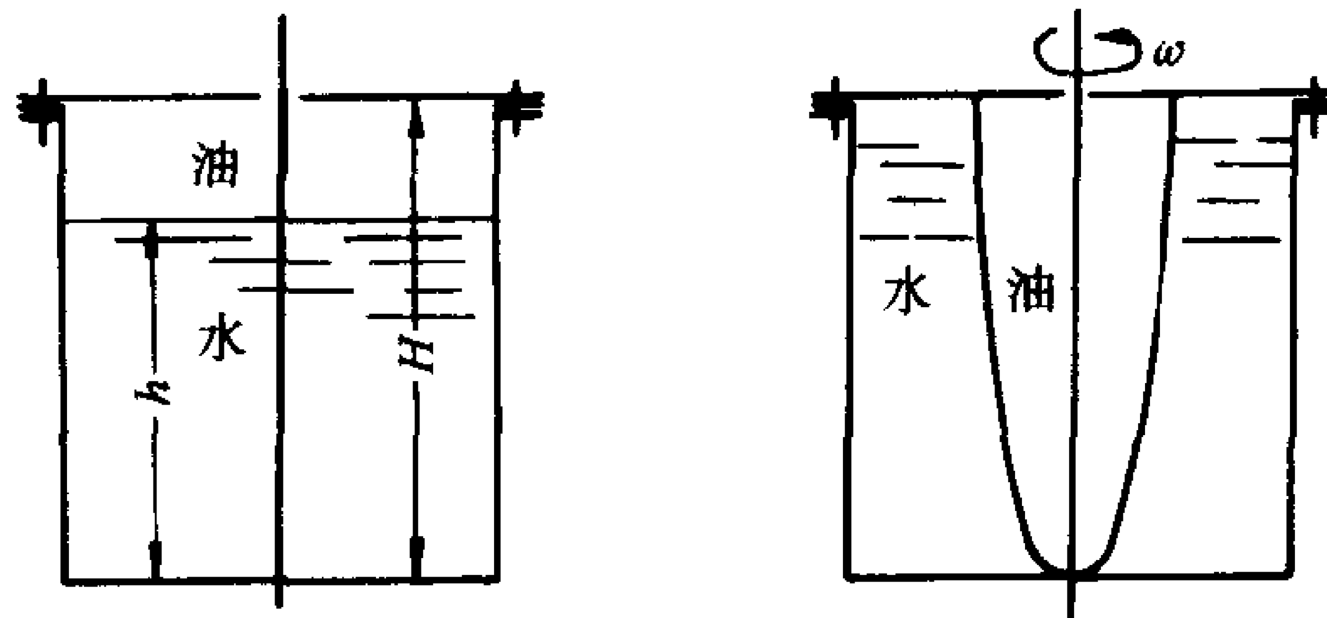
题 2-46　图

2-47　在 $D=30\text{cm}$，高度 $H=50\text{cm}$ 的圆柱形容器中盛水深至 $h=30\text{cm}$，当容器绕中心轴等角速旋转时，求使水恰好上升到 H 时的转数。

2-48　直径 $D=600\text{mm}$，高度 $H=500\text{mm}$ 的圆柱形容器，盛水深至 $h=0.4\text{m}$，剩余部分装以比重为0.8的油，封闭容器上部盖板中心有一小孔。假定容器绕中心轴等角速旋转时，容器转轴和分界面的交点下降0.4m，直至容器底部。求必须的旋转角速度及盖板，器底上最大最小压强。



题2-47　图



题2-48　图

第三章　一元流体动力学基础

无论在自然界或工程实际中,流体的静止总是相对的,运动才是绝对的。流体最基本的特征就是它的流动性。因此,进一步研究流体的运动规律便具有更重要,更普遍的意义。

流体动力学研究的主要问题是流速和压强在空间的分布。两者之中,流速又更加重要。这不仅因为流速是流动情况的数学描述,还因为流体流动时,在破坏压力和质量力平衡的同时,出现了和流速密切相关的惯性力和粘性力。其中,惯性力是由质点本身流速变化所产生,而粘性力是由于流层与流层之间,质点与质点间存在着流速差异所引起的。这样,流体由静到动所产生的两种力,是由流速在空间的分布和随时间的变化所决定。因此,流体动力学的基本问题是流速问题。有关流动的一系列概念和分类,也都是围绕着流速而提出的。

流体从静止到运动,质点获得流速,由于粘滞力的作用,改变了压强的静力特性。任一点的压强,不仅与该点所在的空间位置有关,也与方向有关。这就与流体静压强有所区别。但粘滞力对压强随方向变化的影响很小,在工程上可以忽略不计。而且,理论推导还可证明,任何一点在三个正交方向的压强的平均值是一个常数,不随这三个正交方向的选取而变化(见第七章)。这个平均值就作为点的压强值。以后,流体流动时的压强和流体静压强,一般在概念和命名上不予区别,一律称为压强。

第一节　描述流体运动的两种方法

流体运动一般是在固体壁面所限制的空间内、外进行。例如,空气在室内流动,水在管内流动,风绕建筑物流动。这些流动,都是在房间墙壁,水管管壁,建筑物外墙等固体壁面所限定的空间内、外进行。我们把流体流动占据的空间称为流场,流体力学的主要任务,就是研究流场中的流动。

研究流动,存在着两种方法。一种是承袭固体力学的方法,把流场中流体看作是无数连续的质点所组成的质点系,如果能对每一质点的运动进行描述,那末整个流动就被完全确定了。

在这种思路的指导下,我们把流体质点在某一时间 t_0 时的坐标(a、b、c)作为该质点的标志,则不同的(a、b、c)就表示流动空间的不同质点。这样,流场中的全部质点,都包含在(a、b、c)变数中。

随着时间的迁移,质点将改变位置,设(x、y、z)表示时间 t 时质点(a、b、c)的坐标,则下列函数形式:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a、b、c、t) \\ y &= y(a、b、c、t) \\ z &= z(a、b、c、t) \end{aligned}\right\} \tag{3-1-1}$$

就表示全部质点随时间 t 的位置变动。如果表达式(3-1-1)能够写出,那末,流体流动就完

全被确定了。这种通过描述每一质点的运动达到了解流体运动的方法，称为拉格朗日法。表达式中的自变量(a、b、c、t)，称为拉格朗日变量。

显然全部质点的速度也易于写出：

$$\left.\begin{aligned}u_x&=\frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t}\\u_y&=\frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t}\\u_z&=\frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{3-1-2}$$

式中，u_x、u_y、u_z 为质点流速在 x、y、z 方向的分量。

拉格朗日法的基本特点是追踪流体质点的运动，它的优点就是可以直接运用理论力学中早已建立的质点或质点系动力学来进行分析。但是这样的描述方法过于复杂，实际上难于实现。而绝大多数的工程问题并不要求追踪质点的来龙去脉，只是着眼于流场的各固定点，固定断面或固定空间的流动。例如，扭开龙头，水从管中流出；打开窗门，风从窗门流入；开动风机，风从工作区间抽出。我们并不追踪水的各个质点的前前后后，也不探求空气的各个质点的来龙去脉，而是要知道：水从管中以怎样的速度流出；风经过门窗，以什么流速流入；风机抽风，工作区间风速如何分布。也就是只要知道一定地点(水龙头处)，一定断面(门窗洞口断面)，或一定区间(工作区间)的流动状况。而不需要了解某一质点，某一流体集团的全部流动过程。

按照这个观点，我们可以用“流速场”这个概念来描述流体的运动。它表示流速在流场中的分布和随时间的变化。也就是要把流速 u 在各坐标轴上的投影 u_x、u_y、u_z 表为 x、y、z、t 四个变量的函数。即

$$\left.\begin{aligned}u_x&=u_x(x、y、z、t)\\u_y&=u_y(x、y、z、t)\\u_z&=u_z(x、y、z、t)\end{aligned}\right\}\tag{3-1-3}$$

这样通过描述物理量在空间的分布来研究流体运动的方法称为欧拉法。式中变量 x、y、z、t 称为欧拉变量。

对比拉格朗日法和欧拉法的不同变量，就可以看出两者的区别：前者以 a、b、c 为变量，是以一定质点为对象；后者以 x、y、z 为变量，是以固定空间点为对象。只要对流动的描述是以固定空间，固定断面，或固定点为对象，应采用欧拉法，而不是拉格朗日法。本书以下的流动描述均采用欧拉法。

第二节　恒定流动和非恒定流动

当我们用欧拉方法来观察流场中各固定点、固定断面、或固定区间流动的全过程时，我们可以看出，流速经常要经历若干阶段的变化：打开龙头，破坏了静止水体的重力和压力的平衡，在打开的过程以及打开后的短暂时间内，水从喷口流出。喷口处流速从零迅速增加，到达某一流速后，即维持不变。这样，流体从静止平衡(流体静止)，通过短时间的运动不平衡(喷口处流体加速)，达到新的运动平衡(喷口处流速恒定不变)，出现三阶段性质不同的过

程。运动不平衡的流动，在流场中各点流速随时间变化，各点压强，粘性力和惯性力也随着速度的变化而变化。这种流速等物理量的空间分布与时间有关的流动称为非恒定流动。室内空气在打开窗门和关闭窗门瞬间的流动，河流在涨水期和落水期的流动，管道在开闭时间所产生的压力波动，都是非恒定流动。前节提出的函数：

$$\left.\begin{aligned}u_x&=u_x(x、y、z、t)\\u_y&=u_y(x、y、z、t)\\u_z&=u_z(x、y、z、t)\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}2\text{-}1)$$

就是非恒定流的全面描述。这里，不仅反映了流速在空间的分布，也反映了流速随时间的变化。

运动平衡的流动，流场中各点流速不随时间变化，由流速决定的压强，粘性力和惯性力也不随时间变化。这种流动称为恒定流动。在恒定流动中，欧拉变量不出现时间 t，(3-1-3)式简化为

$$\left.\begin{aligned}u_x&=u_x(x、y、z)\\u_y&=u_y(x、y、z)\\u_z&=u_z(x、y、z)\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}2\text{-}2)$$

这样，要描述恒定流动，只需了解流速在空间的分布即可，这比非恒定流还要考虑流速随时间变化简单得多。

我们以后的研究，主要是针对恒定流动。这并不是说非恒定流没有实用意义，某些专业中常见的流体现象，例如水击现象，必须用非恒定流进行计算。但工程中大多数流动，流速等参数不随时间而变，或变化甚缓，只需用恒定流计算，就能满足实用要求。

第三节　流线和迹线

在采用欧拉法描述流体运动时，为了反映流场中的流速，分析流场中的流动，常用形象化的方法直接在流场中绘出反映流动方向的一系列线条，这就是流线，如图 3-1。

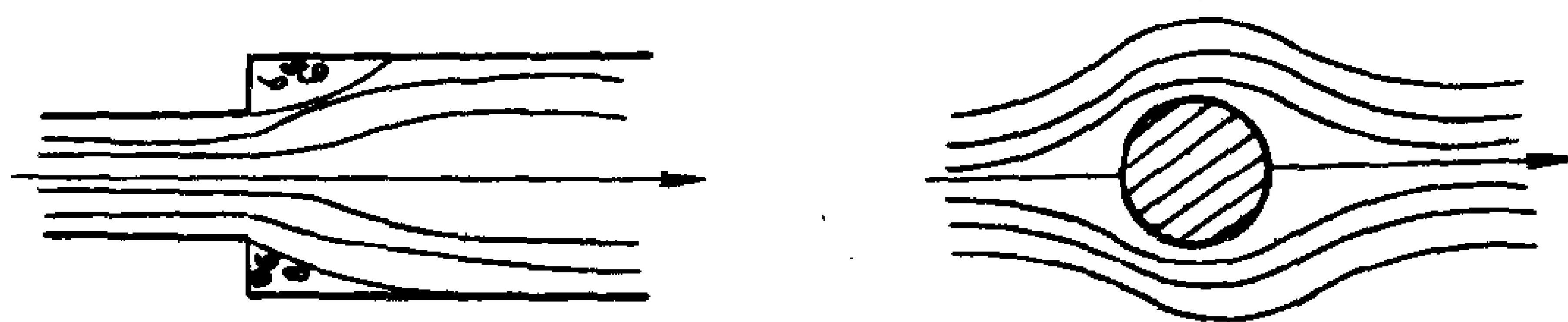


图 3-1　流线

在学习流线时，要注意和迹线相区别。在某一时刻，各点的切线方向与通过该点的流体质点的流速方向重合的空间曲线称为流线。而同一质点在各不同时刻所占有的空间位置联成的空间曲线称为迹线。流线是欧拉法对流动的描绘，迹线是拉格朗日法对流动的描绘。由于流体力学中大多问题都采用欧拉法研究流体运动，因此我们将侧重于研究流线。

用几何直观的方法可以说明流线的概念。流线总是针对某一瞬时的流场绘制的。想象地从流场中某一点 a 开始，在指定的时间 t，通过 a 点绘该点的流速方向线。沿此方向线距 a 点为无限小距离取 b 点，又绘出 t 时刻 b 点的流速方向线……依此类推，我们便得到一条折线 ab……当折线上各点距离趋于零时，便得到一条光滑曲线，这就是流线。如图 3-2 所示。

由于通过流场中的每一点都可以绘一条流线，所以，流线将布满整个流场。在流场中绘

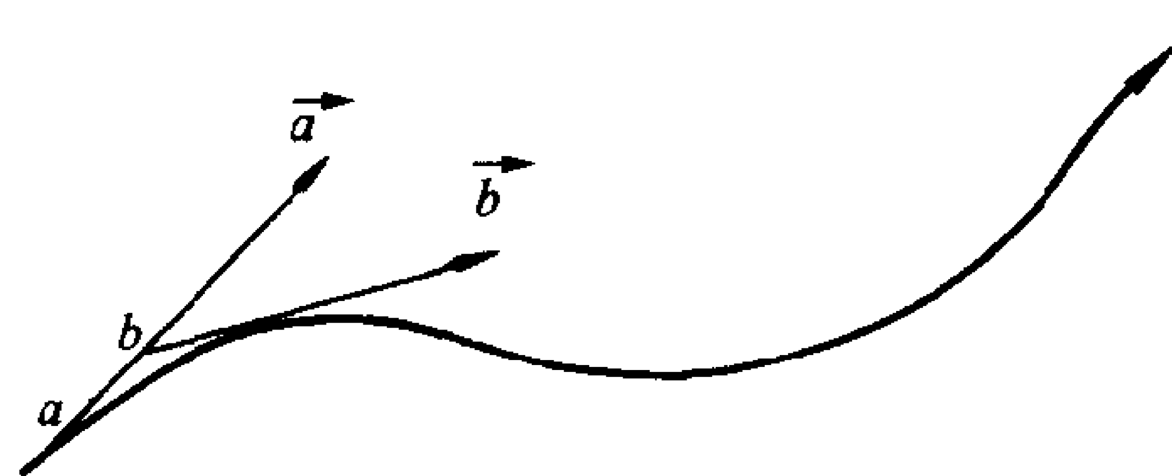


图 3-2　流线的定义

出流线簇后，流体的运动状况就一目了然了。某点流速的方向便是流线在该点的切线方向。流速的大小可以由流线的疏密程度反映出来。流线越密处流速越大，流线越稀疏处流速越小。

根据流线的定义，流线上任一点的速度方向和曲线在该点的切线方向重合，可以写出它的微分方程式。沿流线的流动方向取微元距离 $\mathrm{d}s$，由于流速向量 $\vec{u}$ 的方向和距离向量 $\vec{\mathrm{d}s}$ 的动方向重合，根据矢量代数，前者的三个轴向分量 u_x、u_y、u_z 必然和后者的三个轴向分量 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 成比例，即：

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x}=\frac{\mathrm{d}y}{u_y}=\frac{\mathrm{d}z}{u_z} \tag{3-3-1}$$

这就是流线的微分方程式。

流线不能相交(驻点处除外)，也不能是折线，因为流场内任一固定点在同一瞬时只能有一个速度向量。流线只能是一条光滑的曲线或直线。

在恒定流中，流线和迹线是完全重合的。在非恒定流中，流线和迹线不重合，因此，只有在恒定流中才能用迹线来代替流线。

第四节　一元流动模型

用欧拉法描写流动，虽然经过恒定流假设的简化，减少了欧拉变量中的时间变量，但还存在着 x、y、z 三个变量，是三元流动。问题仍然非常复杂。因此，下面我们将发展流线的概念，把某些流动简化为一元流动。

为此，在流场内，取任意非流线的封闭曲线 l。经此曲线上全部点作流线，这些流线组成的管状流面，称为流管。流管以内的流体，称为流束(图 3-3)。垂直于流束的断面，称为流束的过流断面。当流束的过流断面无限小时，这根流束就称为元流。元流的边界由流线组成，因此外部流体不能流入，内部流体也不能流出。元流断面既为无限小，断面上流速和压强就可认为是均匀分布，任一点的流速和压强代表了全部断面的相应值。如果从元流某起始断面，沿流动方向取坐标 s，则全部元流问题，简化为断面流速 u 随坐标 s 而变。u 是 s 的函数，即求 $u=f(s)$ 的问题。欧拉三个变量简化为一个变量，三元问题简化为一元问题。

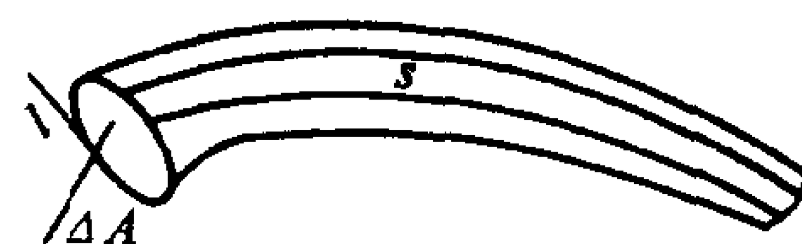


图 3-3　流束

能不能将元流这个概念推广到实际流场中去，要看流场本身的性质。在本专业实际中，用以输送流体的管道流动，由于流场具有长形流动的几何形态，整个流动可以看作无数元流相加，这样的流动总体称为总流(图 3-4)。处处垂直于总流中全部流线的断面，是总流的过流断面。断面上的流速一般是不相等的，中点的流速较大，边沿流速较低。假定过流断面流速分布如图 3-5 所示。在断面上取元面积 $\mathrm{d}A$，u 为 $\mathrm{d}A$ 上的流速，因为断面 A 为过流断面，u 方向必为 $\mathrm{d}A$ 的法向，则 $\mathrm{d}A$ 断面上全部质点单位时间的位移将为 u。而流入体积为 $u\mathrm{d}A$。以 $\mathrm{d}Q$ 表示，

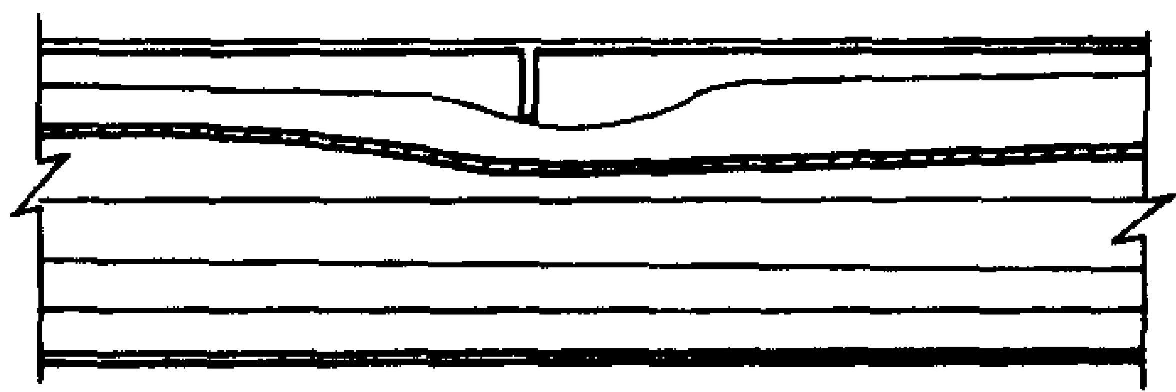


图 3-4　元流是总流的一个微分流动

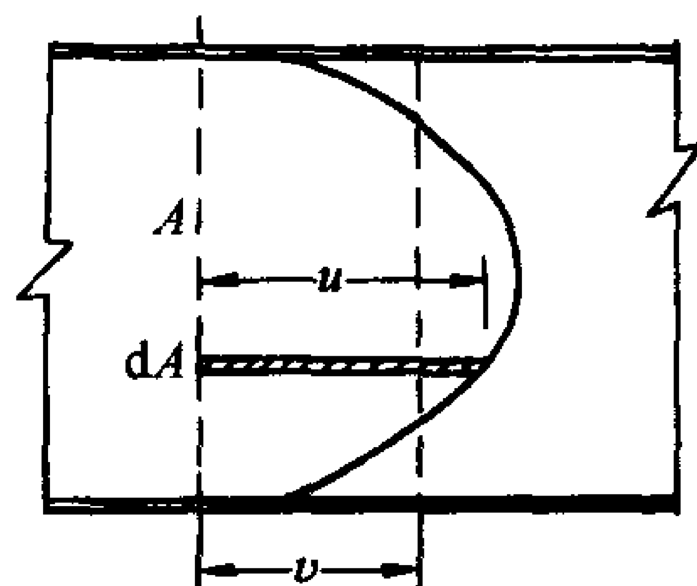


图 3-5　断面平均流速

$$dQ = u\mathrm{d}A$$

而单位时间流过全部断面 A 的流体体积 Q 是 $\mathrm{d}Q$ 在全部断面上的积分:

$$Q = \int_A u\mathrm{d}A \tag{3-4-1}$$

称为该断面的流量。以后如不加说明,所说断面均指过流断面。

流量是一个重要的物理量。它具有普遍的实际意义。通风就是输送一定流量的空气到被通风的地区。供热就是输送一定流量的带热流体到需要热量的单位去。管道设计问题是流体输送问题,也是流量问题。

流量既有实际意义,我们就从计算流量的要求出发,来定义断面平均流速:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A u\mathrm{d}A}{A} \tag{3-4-2}$$

这就使流量公式可简化为:

$$Q = Av \tag{3-4-3}$$

图 3-5 绘出了实际断面流速和平均流速的对比。可以看出,用平均流速代替实际流速,就是把图中虚线的均匀流速分布,代替实线的实际流速分布。这样,流动问题就简化为断面平均流速如何沿流向变化问题。如果仍以总流某起始断面沿流动方向取坐标 s,则断面平均流速是 s 的函数,即 $v = f(s)$。流速问题简化为一元问题。

第五节　连 续 性 方 程

在总流中,断面平均流速究竟如何沿流向变化呢?现在我们由质量守恒定律出发,研究流体的质量平衡来解决这个问题。

在总流中取面积为 A_1 和 A_2 的 1、2 两断面,探讨两断面间流动空间(即两端面为 1、2 断面,中部为管壁侧面所包围的全部空间)的质量收支平衡(图3-6)。设 A_1 的平均流速为 v_1,A_2 的平均流速为 v_2,则 $\mathrm{d}t$ 时间内流入断面 1 的流体质量为 $\rho_1 A_1 v_1 \mathrm{d}t = \rho_1 Q_1 \mathrm{d}t$,流出断面 2 的流体质量为 $\rho_2 A_2 v_2 \mathrm{d}t = \rho_2 Q_2 \mathrm{d}t$。在恒定流时两断面间流动空间内流体质量不变,流动是连续的,根据质量守恒定律流入断面 1 的流体质量必等于流出断面 2 的流体质量。

$$\rho_1 Q_1 \mathrm{d}t = \rho_2 Q_2 \mathrm{d}t$$

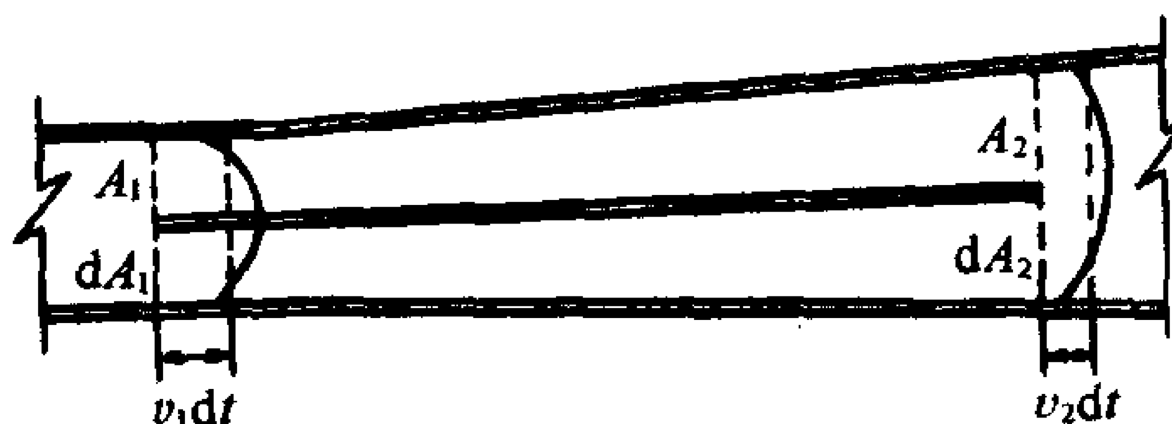


图 3-6　总流的质量平衡

消去 dt,便得出不同断面上密度不相同时反映两断面间流动空间的质量平衡的连续性方程,即可压缩流体的连续性方程:

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \tag{3-5-1}$$

或

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \tag{3-5-2}$$

当流体不可压缩时密度为常数,$\rho_1 = \rho_2$。因此,不可压缩流体的连续性方程为:

$$Q_1 = Q_2 \tag{3-5-3}$$

或

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \tag{3-5-4}$$

不难证明,沿任一元流,上述各方程也成立。即

可压缩时:

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 dQ_1 &= \rho_2 dQ_2\\ \rho_1 u_1 dA_1 &= \rho_2 u_2 dA_2\end{aligned}\right\} \tag{3-5-5}$$

不可压缩时:

$$\left.\begin{aligned}dQ_1 &= dQ_2\\ u_1 dA_1 &= u_2 dA_2\end{aligned}\right\} \tag{3-5-6}$$

(3-5-3),(3-5-4),(3-5-6)都是不可压缩流体恒定流连续性方程式的各种形式。方程式表明:在不可压缩流体一元流动中,平均流速与断面积成反比变化。

由于断面 1、2 是任意选取的,上述关系可以推广至全部流动的各个断面。即

$$\left.\begin{aligned}Q_1 = Q_2 = \cdots\cdots = Q\\ v_1 A_1 = v_2 A_2 = \cdots\cdots = vA\end{aligned}\right\} \tag{3-5-7}$$

而流速之比和断面之比有下列关系:

$$v_1 : v_2 : \cdots\cdots v = \frac{1}{A_1} : \frac{1}{A_2} : \cdots\cdots \frac{1}{A} \tag{3-5-8}$$

从(3-5-8)式可以看出,连续性方程确立了总流各断面平均流速沿流向的变化规律。

单纯依靠连续性方程式,虽然并不能求出断面平均流速的绝对值,但它的相对比值是完全确定了的。所以,只要总流的流量已知,或任一断面的流速已知,则其它任何断面的流速均可算出。

【例 3-1】 图 3-7 所示的管段,$d_1 = 2.5$cm,$d_2 = 5$cm,$d_3 = 10$cm。(1)当流量为 4L/s 时,求各管段的平均流速。(2) 旋动阀门,使流量增加至 8L/s 或使流量减少至 2L/s 时,平均流速如何变化?

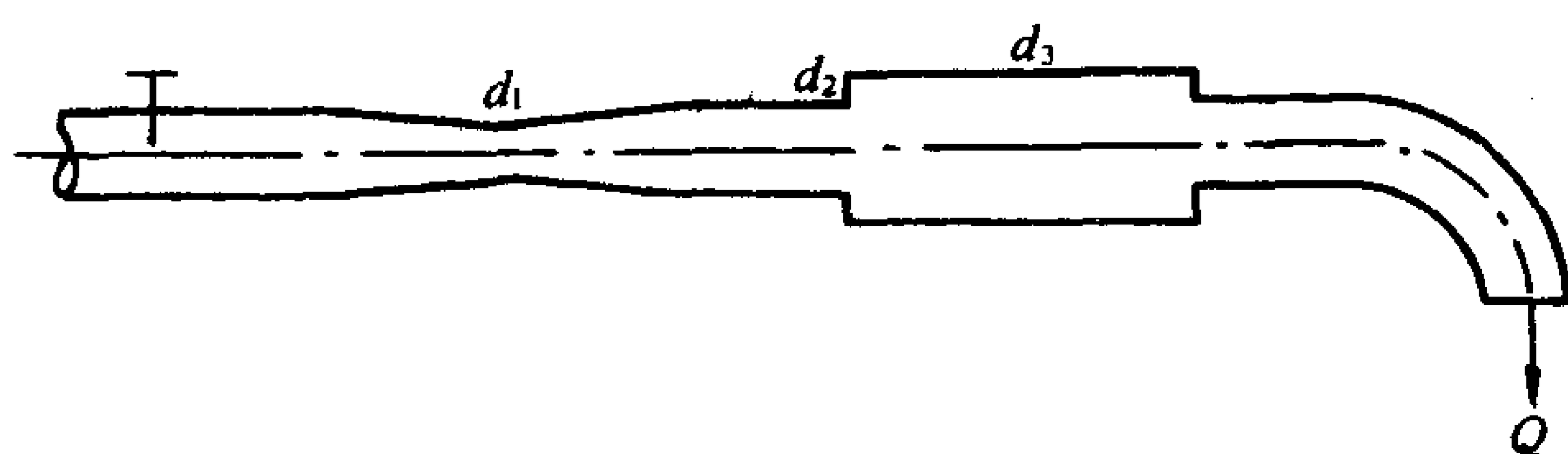


图 3-7

【解】 (1) 根据连续性方程

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_3 A_3,$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4} \times (2.5 \times 10^{-2})^2} = 8.16\text{m/s}$$

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 8.16 \times \left(\frac{2.5}{5}\right)^2 = 2.04\text{m/s}$$

$$v_3 = v_1\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^2 = 8.16 \times \left(\frac{2.5}{10}\right)^2 = 0.51\text{m/s}$$

(2) 各断面流速比例保持不变，流量增加至 8L 时，即流量增加为 2 倍，则各段流速亦增加至 2 倍。即

$$v_1 = 16.32\text{m/s}, v_2 = 4.08\text{m/s}, v_3 = 1.02\text{m/s}$$

流量减小至 2L 时，即流量减小至 1/2，各流速亦为原值的 1/2。即

$$v_1 = 4.08\text{m/s}, v_2 = 1.02\text{m/s}, v_3 = 0.255\text{m/s}$$

以上所列连续性方程，只反映了两断面之间的空间的质量收支平衡。应当注意，这个质量平衡的观点，还可以推广到任意空间。三通管的合流和分流，车间的自然换气，管网的总管流入和支管流出，都可以从质量平衡和流动连续观点，提出连续性方程的相应形式。例如三通管道在分流和合流时，根据质量守恒定律，显然可推广如下：

分流时：

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$v_1A_1 = v_2A_2 + v_3A_3$$

合流时：

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$v_1A_1 + v_2A_2 = v_3A_3$$

【例 3-2】 断面为 $(50 \times 50)\text{cm}^2$ 的送风管，通过 a, b, c, d 四个 $(40 \times 40)\text{cm}^2$ 的送风口向室内输送空气(图 3-8)。送风口气流平均速度均为 5m/s，求通过送风管 1-1，2-2，3-3 各断面的流速和流量。

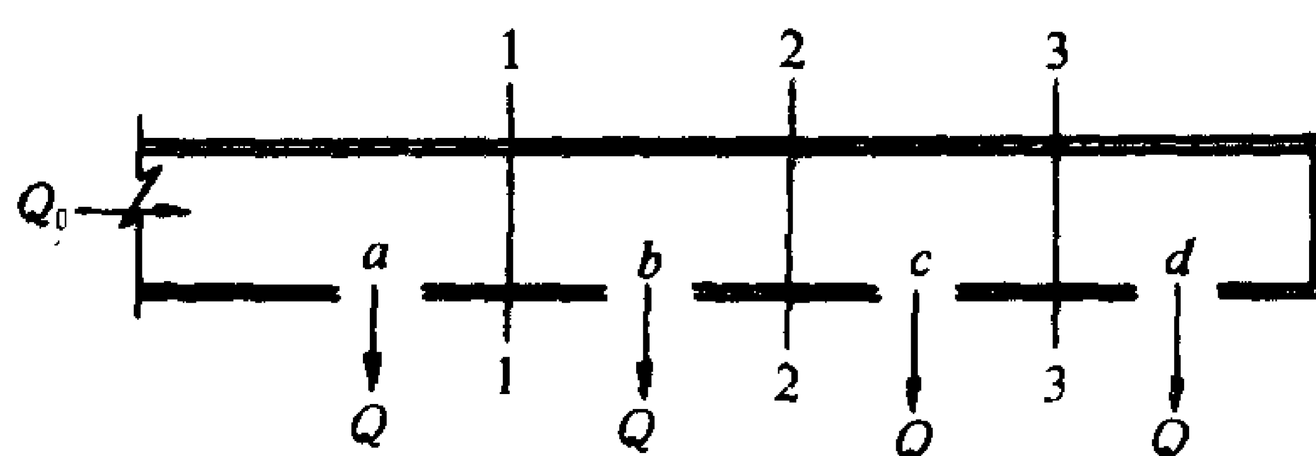


图 3-8

【解】 每一送风口流量 $Q = 0.4 \times 0.4 \times 5 = 0.8\text{m}^3/\text{s}$

分别以 1-1、2-2、3-3 各断面以右的全部管段作为质量平衡收支运算的空间，写连续性方程。

$$Q_1 = 3Q = 3 \times 0.8 = 2.4\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 2Q = 2 \times 0.8 = 1.6\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = Q = 1 \times 0.8 = 0.8\text{m}^3/\text{s}$$

各断面流速

$$v_1 = \frac{2.4}{0.5 \times 0.5} = 9.6\text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{1.6}{0.5 \times 0.5} = 6.4\text{m/s}$$

$$v_3 = \frac{0.8}{0.5 \times 0.5} = 3.2\text{m/s}$$

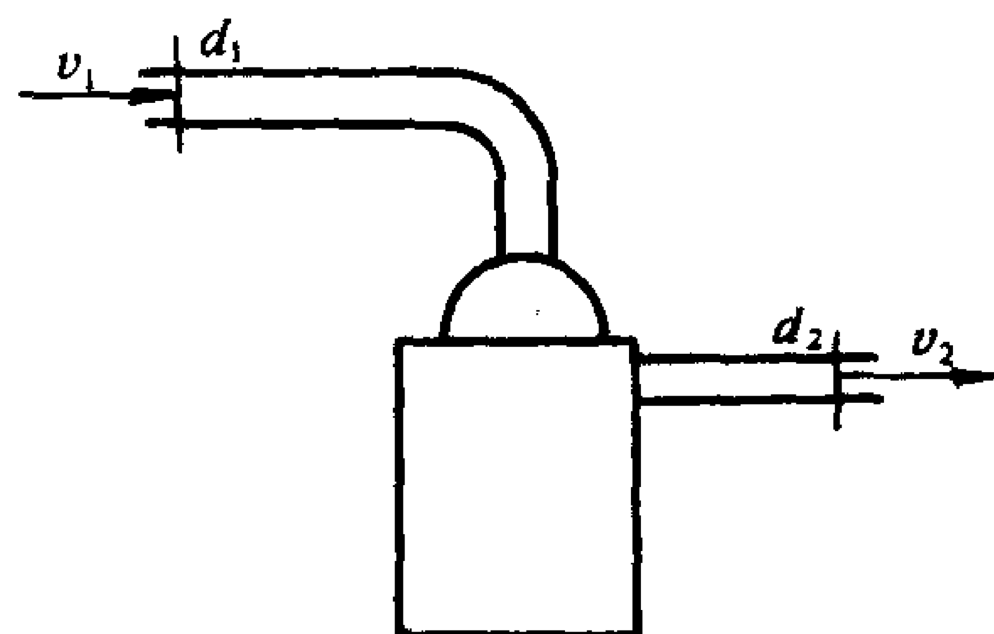


图 3-9 气流经过压缩机

【例 3-3】 图 3-9 的氨气压缩机用直径 $d_1 = 76.2\text{mm}$ 的管子吸入密度 $\rho_1 = 4\text{kg/m}^3$ 的氨气，经压缩后，由直径

$d_2 = 38.1\text{mm}$ 的管子以 $v_2 = 10\text{m/s}$ 的速度流出，此时密度增至 $\rho_2 = 20\text{kg/m}^3$。求(1)质量流量；(2) 流入流速 v_1。

【解】 (1) 可压缩流体的质量流量为：

$$G = \rho Q = \rho_2 v_2 A_2 = 20 \times 10 \times \frac{\pi}{4} \times (0.0381)^2 = 0.228\text{kg/s}$$

(2) 根据连续性方程

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = 0.228\text{kg/s}$$

$$v_1 = \frac{0.228}{4 \times \frac{\pi}{4}(0.0762)^2} = 9.83\text{m/s}$$

第六节　恒定元流能量方程

连续性方程是运动学方程，它只给出了沿一元流长度上，断面流速的变化规律。完全没有涉及流体的受力性质。所以它只能决定流速的相对比例，却不能给出流速的绝对数值。如果需要求出流速的绝对值，还必须从动力学着眼，考虑外力作用下，流体是按照什么规律来运动的。

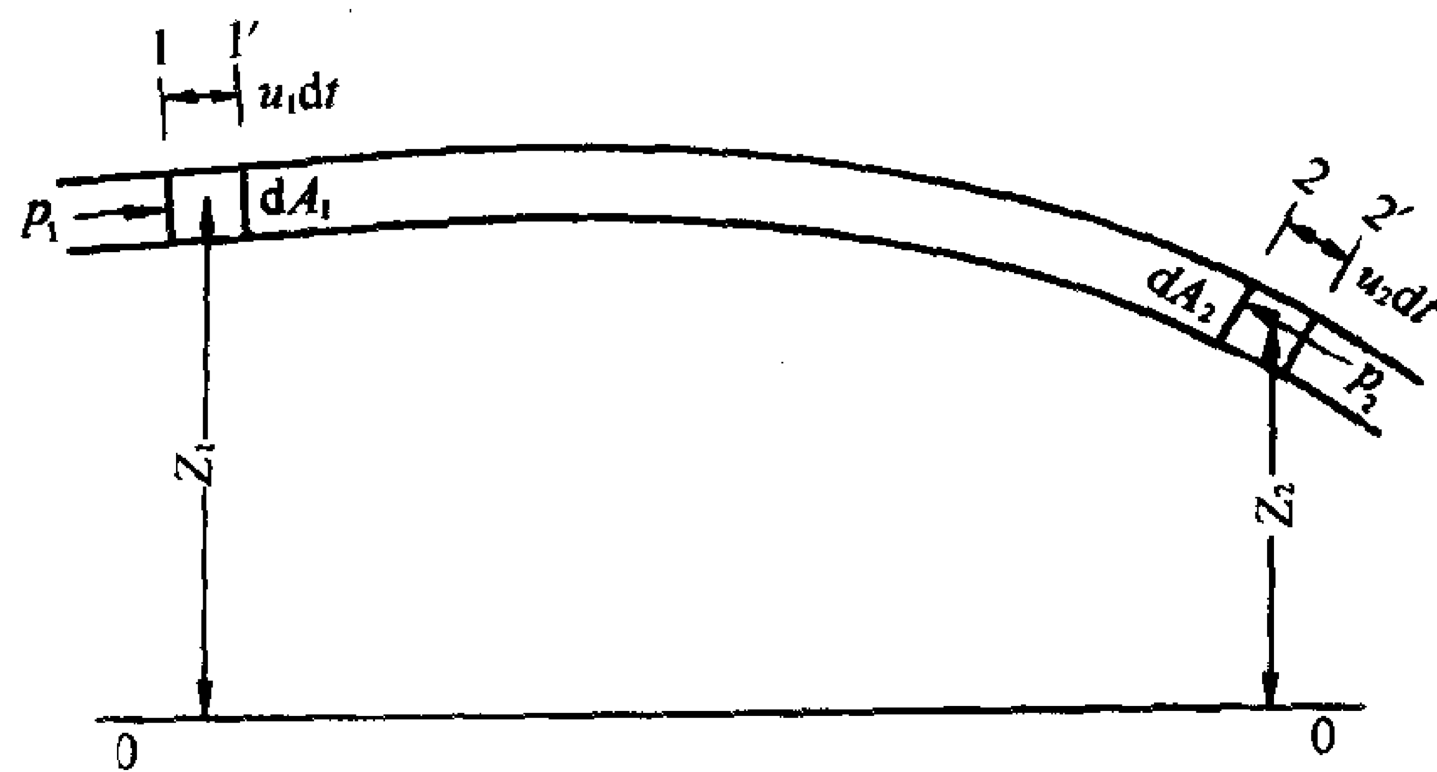


图 3-10　元流能量方程的推证

我们现在从功能原理出发，取不可压缩无粘性流体恒定流动这样的力学模型，推证元流的能量方程式。

在流场中选取元流如图 3-10 所示。在元流上沿流向取 1、2 两断面，两断面的高程和面积分别为 Z_1、Z_2 和 dA_1、dA_2，两断面的流速和压强分别为 u_1、u_2 和 p_1、p_2。

以两断面间的元流段为对象，写出 dt 时间内，该段元流外力(压力)作功等于流段机械能量增加的方程式。

dt 时间内断面 1、2 分别移动 u_1dt、u_2dt 的距离，到达断面 1′、2′。

压力作功，包括断面 1 所受压力 p_1dA_1，所作的正功 $p_1dA_1u_1dt$，和断面 2 所受压力 p_2dA_2，所作的负功 $p_2dA_2u_2dt$。作功的正或负，根据压力方向和位移方向是否相同或相反。元流侧面压力和流段正交，不产生位移，不作功。所以压力作功为

$$p_1dA_1u_1dt - p_2dA_2u_2dt = (p_1 - p_2)dQdt \qquad (a)$$

流段所获得的能量，可以对比流段在 dt 时流段前后所占有的空间。流段在 dt 时段前后所占有的空间虽然有变动，但 1′、2 两断面间空间则是 dt 时段前后所共有。在这段空间内的流体，不但位能不变，动能也由于流动的恒定性，各点流速不变，也保持不变。所以，能量的增加，只应就流体占据的新位置 2-2′所增加的能量，和流体离开原位置 1-1′所减少的能量来计算。

由于流体不可压缩，新旧位置 1-1′、2-2′所占据的体积等于 $dQdt$，质量等于 $\rho dQdt =$

$\frac{\gamma dQdt}{g}$。根据物理公式，动能为$\frac{1}{2}mu^2$，位能为 mgz。所以，动能增加为：

$$\frac{\gamma dQdt}{g}\left(\frac{u_2^2}{2}-\frac{u_1^2}{2}\right)=\gamma dQdt\left(\frac{u_2^2}{2g}-\frac{u_1^2}{2g}\right) \qquad (b)$$

位能的增加为：

$$\gamma dQdt(z_2-z_1) \qquad (c)$$

根据压力作功等于机械能量增加原理，$(a)=(b)+(c)$。即

$$(p_1-p_2)dQdt=\gamma dQdt(Z_2-Z_1)+\gamma dQdt\left(\frac{u_2^2}{2g}-\frac{u_1^2}{2g}\right)$$

各项除以 dt，并按断面分别列入等式两方：

$$\left(p_1+\gamma Z_1+\gamma\frac{u_1^2}{2g}\right)dQ=\left(p_2+\gamma Z_2+\gamma\frac{u_2^2}{2g}\right)dQ \qquad (3\text{-}6\text{-}1)$$

称为总能量方程式。表示全部流量的能量平衡方程。

将上式除以 γdQ，得出单位重量的能量方程，或简称为单位能量方程。

$$\frac{p_1}{\gamma}+Z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+Z_2+\frac{u_2^2}{2g} \qquad (3\text{-}6\text{-}2)$$

这就是理想不可压缩流体恒定流元流能量方程，或称为伯努利方程。在方程的推导过程中，两断面的选取是任意的。所以，很容易把这个关系推广到元流的任意断面。即对元流的任意断面

$$\frac{p}{\gamma}+Z+\frac{u^2}{2g}=\text{常数} \qquad (3\text{-}6\text{-}3)$$

式中，各项值都是断面值，它的物理意义，水头名称，和能量解释，分述如下：

Z 是断面对于选定基准面的高度，水力学中称为位置水头，表示单位重量的位置势能，称为单位位能。

$\frac{p}{\gamma}$是断面压强作用使流体沿测压管所能上升的高度，水力学中称为压强水头，表示压力作功所能提供给单位重量流体的能量，称为单位压能。

$\frac{u^2}{2g}$是以断面流速 u 为初速的铅直上升射流所能达到的理论高度，水力学中称为流速水头，表示单位重量的动能，称为单位动能。

前两项相加，以 H_p 表示：

$$H_p=\frac{p}{\gamma}+Z \qquad (3\text{-}6\text{-}4)$$

表示断面测压管水面相对于基准面的高度，称为测压管水头，表明单位重量流体具有的势能称为单位势能。

三项相加，以 H 表示：

$$H=\frac{p}{\gamma}+Z+\frac{u^2}{2g} \qquad (3\text{-}6\text{-}5)$$

称为总水头，表明单位重量流体具有的总能量，称为单位总能量。

能量方程式说明，理想不可压缩流体恒定元流中，各断面总水头相等，单位重量的总能量保持不变。

元流能量方程式，确立了一元流动中，动能和势能，流速和压强相互转换的普遍规律。提出了理论流速和压强的计算公式。在水力学和流体力学中，有极其重要的理论分析意义和极其广泛的实际运算作用。

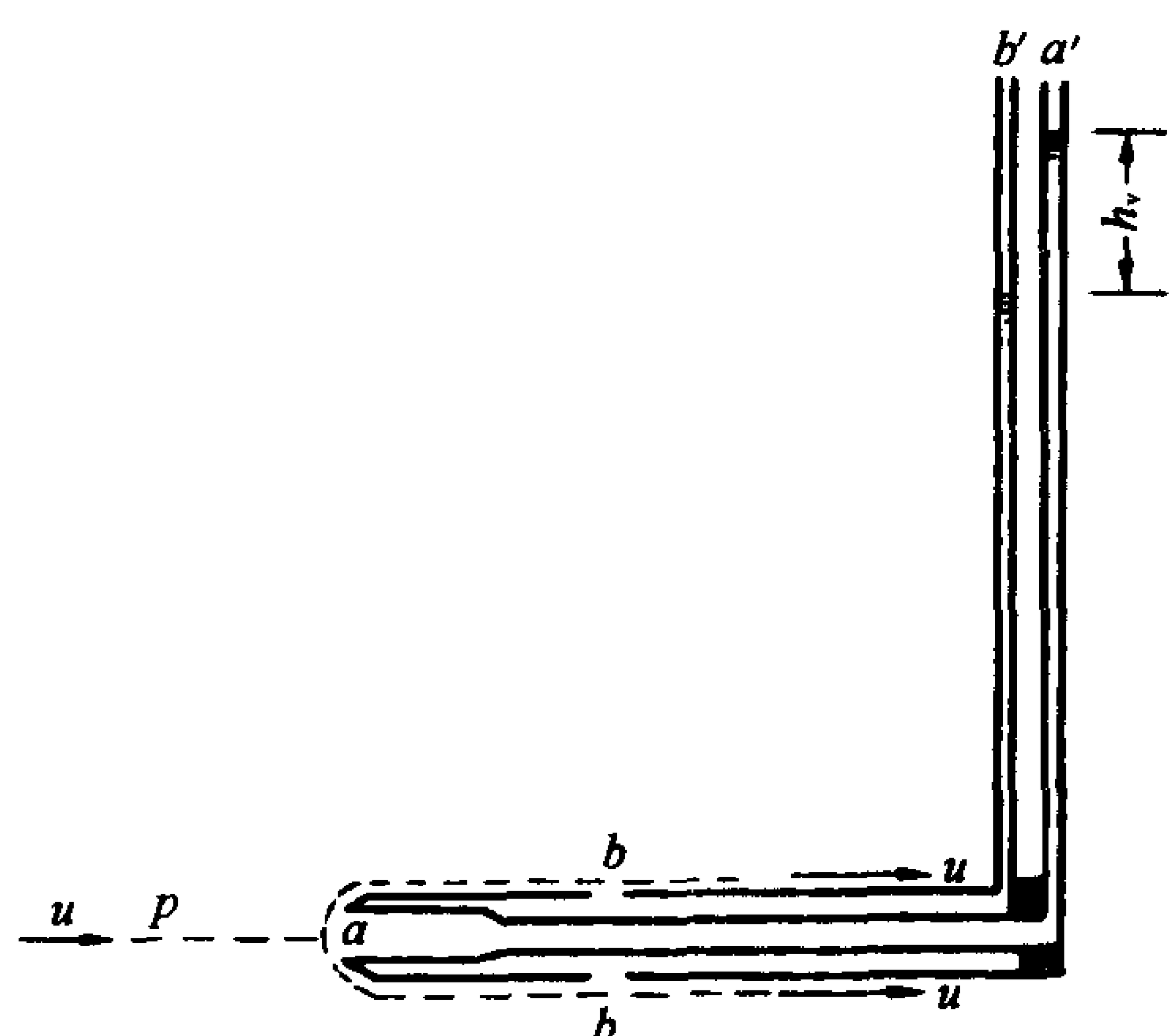


图 3-11　毕托管的原理

现在以毕托管为例说明元流能量方程的应用。

毕托管是广泛用于测量水流和气流的一种仪器，如图 3-11 所示。管前端开口 a 正对气流或水流。a 端内部有流体通路与上部 a' 端相通。管侧有多个开口 b，它的内部也有流体通路与上部 b' 端相通。当测定水流时，a'、b' 两管水面差 h_v 即反映 a、b 两处压差。当测定气流时，a'，b' 两端接液柱差压计，以测定 a、b 两处的压差。

液体流进 a 端开口，水流最初从开口处流入。沿管上升，a 端压强受上升水柱的作用而升高，直到该处质点流速降低到零，其压强为 p_a。然后由 a 分路，流经 b 端开口，流速恢复原有速度 u，压强也降至原有压强。

沿 ab 流线写元流能量方程

$$\frac{p_a}{\gamma} + 0 = \frac{p_b}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

得出

$$u = \sqrt{2g\frac{p_a - p_b}{\gamma}} \tag{3-6-6}$$

由管的开口端液柱差 h_v，测定 $\frac{p_a - p_b}{\gamma}$，用下式计算速度

$$u = \varphi\sqrt{2gh_v}$$

式中，φ 为经实验校正的流速系数，它与管的构造和加工情况有关，其值近似等于 1。

如果用毕托管测定气流，则根据液体压差计所量得的压差，$p_a - p_b = \gamma' h_v$，代入式(3-6-6)计算气流速度

$$u = \varphi\sqrt{2g \times \frac{\gamma'}{\gamma}h_v} \tag{3-6-7}$$

式中　γ'——液体压差计所用液体的容重；

　　　γ——流动气体本身的容重。

【例 3-4】　用毕托管测定(1)风道中的空气流速；(2) 管道中水流速。两种情况均测得水柱 $h_v = 3\text{cm}$。空气的容重 $\gamma = 11.8\text{N/m}^3$；$\varphi$ 值取 1，分别求流速。

【解】 (1) 风道中空气流速

$$u=\sqrt{2g\times\frac{9807}{11.8}\times 0.03}=22.1\text{m/s}$$

(2) 水管中的水流速

$$u=\sqrt{2g\times 0.03}=0.766\text{m/s}$$

实际流体的流动中，元流的粘性阻力作负功，使机械能量沿流向不断衰减。以符号 $h'_{l1\text{-}2}$ 表示元流 1、2 两断面间单位能量的衰减。$h'_{l1\text{-}2}$ 称为水头损失。则单位能量方程式(3-6-2)将改变为

$$\frac{p_1}{\gamma}+Z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+Z_2+\frac{u_2^2}{2g}+h'_{l1\text{-}2} \tag{3-6-8}$$

第七节 过流断面的压强分布

有了元流能量方程，结合连续性方程，可以算出压强沿流线的变化。为了从元流能量方程推出总流能量方程，还必须进一步研究压强在垂直于流线方向，即压强在过流断面上的分布问题。

要对压强进行分析，首先牵涉到流体内部作用的力。这就是重力、粘性力和惯性力。压力是平衡其它三力的结果。重力是不变的，粘性力和惯性力则与质点流速有关。所以，首先要研究流速的变化。

流速是向量，它的变化包括大小的变化和方向的变化。一个质点，从一种直径管子流入另一种直径的管子，流速大小要改变。从一个方向的管子转弯流入另一个方向的管子，流速方向要改变。前一种变化，出现直线惯性力，引起压强沿流向变化。这一点，元流能量方程可以说明。后一种变化，出现了离心惯性力，引起压强沿断面变化，这正是我们要研究的。事实上，总流的流速变化，总是存在着大小的变化和方向的变化，总是出现直线惯性力和离心惯性力。

从以上分析出发，我们根据流速是否随流向变化，分为均匀流动和不均匀流动。不均匀流动又按流速随流向变化的缓急，分为渐变流动和急变流动。如图 3-12。

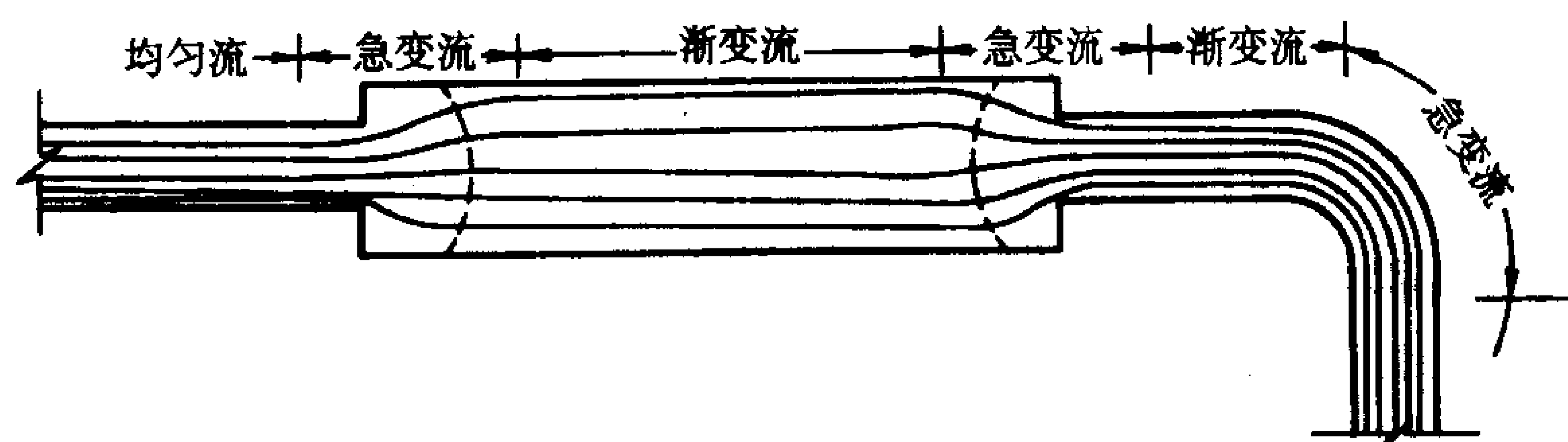


图 3-12 均匀流和不均匀流

质点流速的大小和方向均不变的流动叫均匀流动。均匀流的流线是相互平行的直线，因而它的过流断面是平面。在断面不变的直管中的流动，是均匀流动最常见的例子。

由于均匀流中不存在惯性力。和静止流体受力对比，只多一粘滞阻力。说明这种流动是重力、压力和粘滞阻力的平衡。但是，三力平衡是对均匀流空间来说的。对于均匀流过流断面，情况有所不同，粘滞阻力对垂直于流速方向的过流断面上压强的变化不起作用。所以

沿过流断面只考虑压力和重力的平衡，和静止流体所考虑的一致。

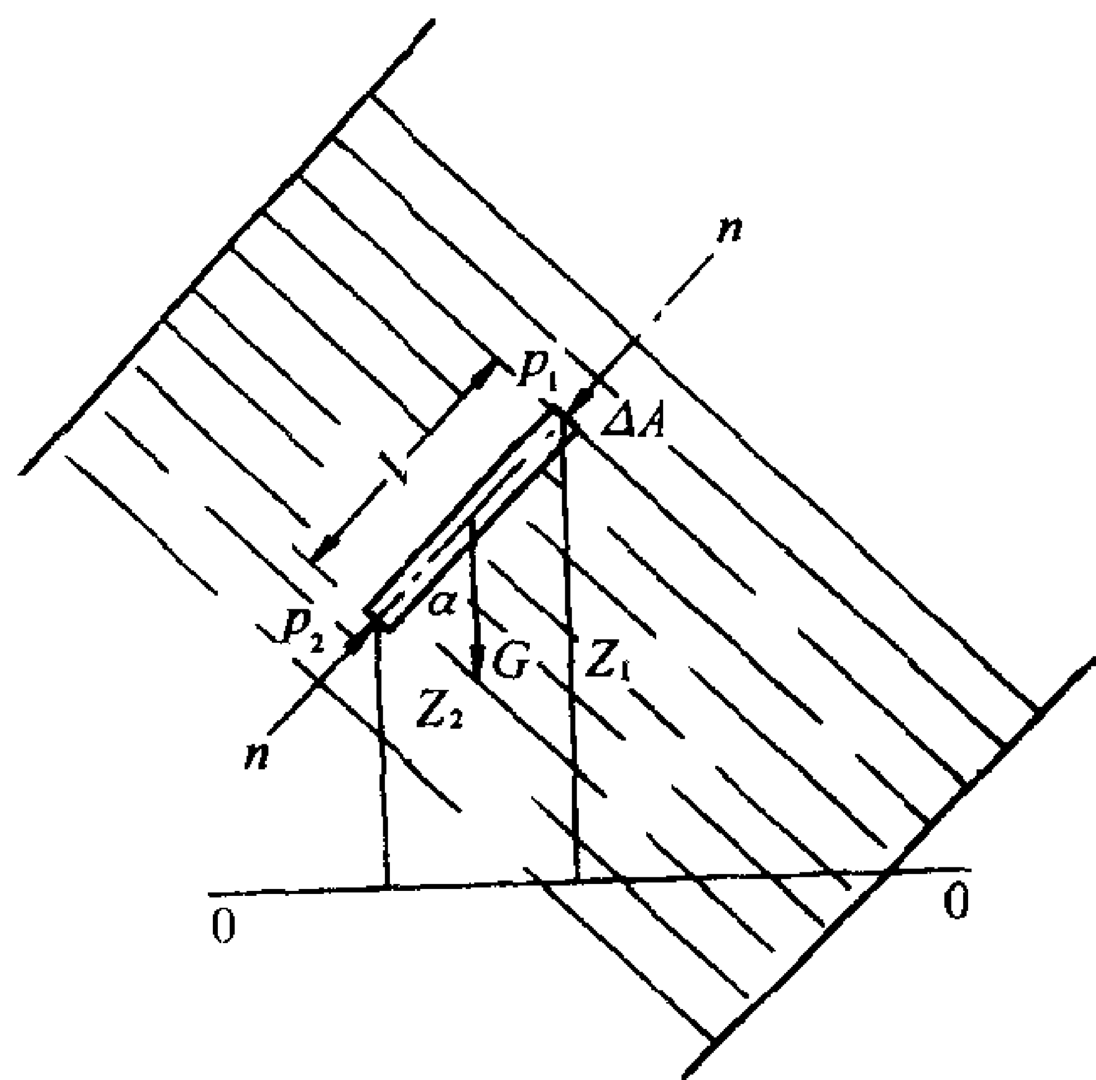


图 3-13　均匀流断面上微小柱体的平衡

为了进一步说明，我们任取轴线 n-n 位于均匀流断面的微小柱体为隔离体(图 3-13)，分析作用于隔离体上的力在 n-n 方向的分力。柱体长为 l，横断面为 $\mathrm{d}A$，铅直方向的倾角为 α，两断面的高程为 Z_1 和 Z_2，压强为 p_1 和 p_2。

(1) 柱体重力在 n-n 方向的分力 $G\cos\alpha = \gamma l\Delta A\cos\alpha$；

(2) 作用在柱体两端的压力 $p_1\Delta A$ 和 $p_2\Delta A$，侧表面压力垂直于 n-n 轴，在 n-n 轴上的投影为零。

(3) 作用在柱体两端的切力垂直于 n-n 轴，在 n-n 轴上投影为零；由于小柱体端面积无限小，在小柱体任一横断面上关于轴线对称的两点上的切应力可认为大小相等，而方向相反，因此，柱体侧面切力在 n-n 轴上投影之和也为零。

因此，微小柱体的平衡：

$$p_1\mathrm{d}A + \gamma l\,\mathrm{d}A\cos\alpha = p_2\mathrm{d}A$$

但

$$l\cos\alpha = Z_1 - Z_2$$

则

$$p_1 + \gamma(Z_1 - Z_2) = p_2$$

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

即均匀流过流断面上压强分布服从于水静力学规律。

如图 3-14 的均匀流断面上，想象地插上若干测压管。同一断面上测压管水面将在同一水平面上，但不同断面有不同的测压管水头(比较图中断面 1 和断面 2)。这是因为粘性阻力作负功，使下游断面的水头减低了。

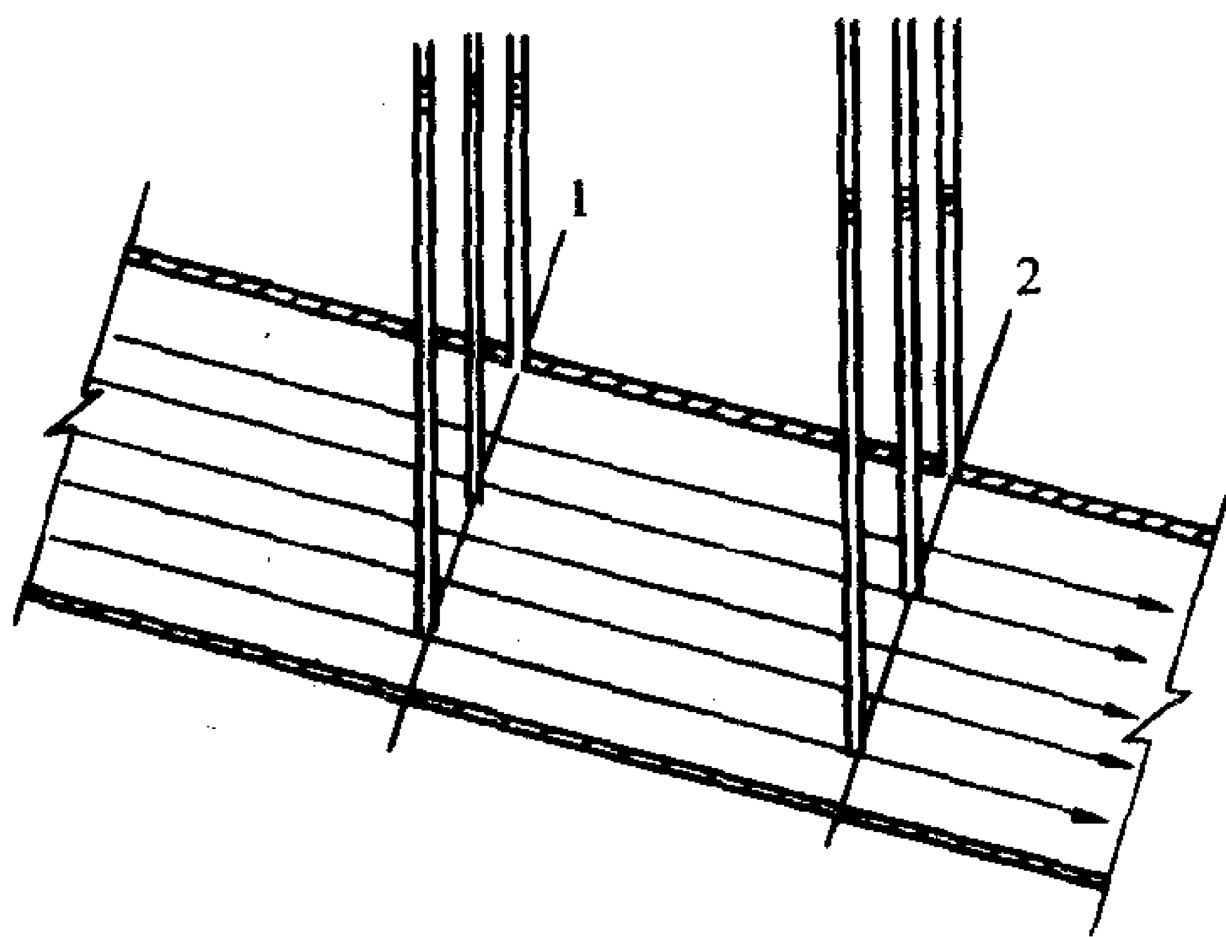


图 3-14　均匀流过流断面的压强分布

许多流动情况虽然不是严格的均匀流，但接近于均匀流，这种流动称为渐变流动。渐变流的流线近乎平行直线，流速沿流向变化所形成的惯性小，可忽略不计。过流断面可认为是平面，在过流断面上，压强分布也可认为服从于流体静力学规律。也就是说，渐变流可近似地按均匀流处理。

【例 3-5】 水在水平长管中流动，在管壁 B 点安置测压管(图 3-15)。测压管中水面 C 相对于管中点 A 的高度是 30cm，求 A 点的压强。

【解】 在测压管内，从 C 到 B，整个水柱是静止的，压强服从于流体静力学规律。从 B 到 A，水虽是流动的，但 B、A 两点同在一渐变流过流断面，因此，A、C 两点压差，也可以用静力学公式来求：

$$p_A = \gamma h = 9807 \times 0.3 = 2942\text{N/m}^2$$

【例 3-6】 水在倾斜管中流动，用U形水银压力计测定 A 点压强。压力计所指示的读数如图3-16，求 A 点压强。

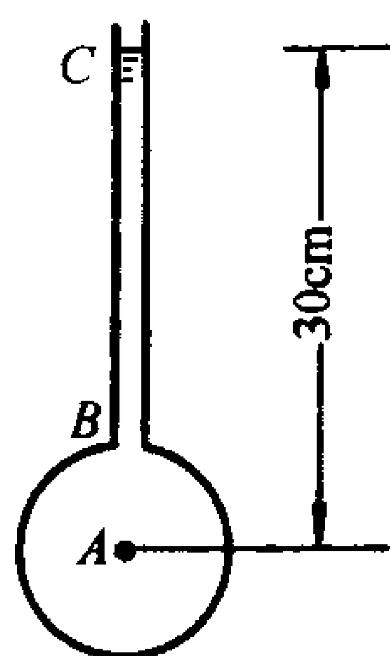


图 3-15 测压管

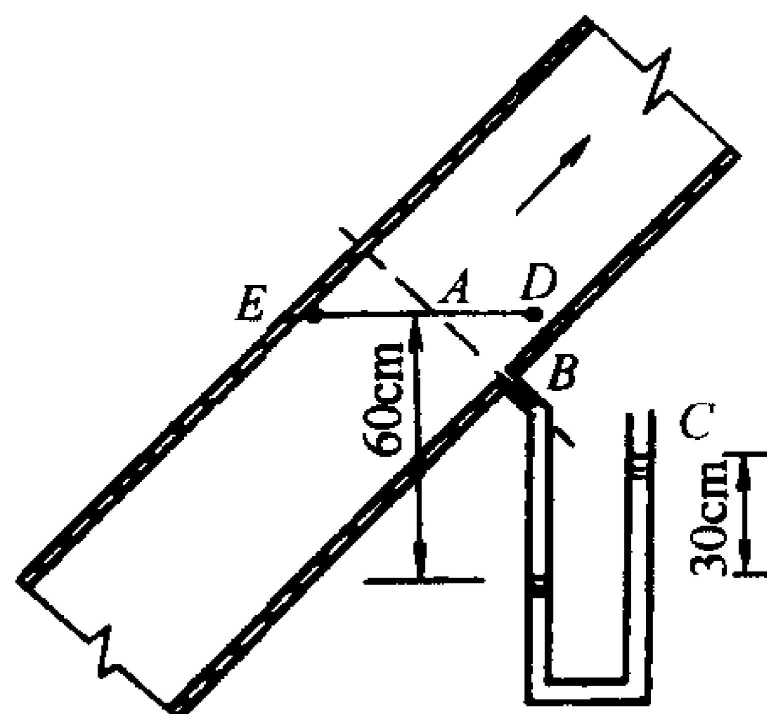


图 3-16 均匀流断面的压强测定

【解】 因 A,B 两点在均匀流同一过流断面上，其压强分布应服从流体静力学分布。U形管中流体也是静止的，所以从 A 点经 B 点到 C 点，压强均按流体静压强分布。因此，可以从 C 点开始直接推得 A 点压强：

$$0 + 0.3 \times \gamma' - 0.6 \times \gamma = p_A$$

$$p_A = 0.3 \times 9807 \times 13.6 - 0.6 \times 9807 = 34.23\text{kN/m}^2$$

这里要指出，在图中用流体静力学方程不能求出管壁上 E、D 两点的压强，尽管这两点和 A 点在同一水平面上，它们的压强不等于 A 点压强。因为测压管和 B 点相接，利用它只能测定和 B 点同在一过流断面上任一点的压强，而不能测定其它点的压强。也就是说，流体静力关系，只存在于每一个渐变流断面上，而不能推广到不在同一断面的空间。图中 D 点在 A 点的下游断面上，压强将低于 A 点；E 点在 A 点的上游断面，压强将高于 A 点。

流速沿流向变化显著的流动，是急变流动。急变流动是渐变流动的对立概念，这两者之间没有明显的分界，而是要根据具体情况，看在具体问题中，惯性力是否可以略而不计。

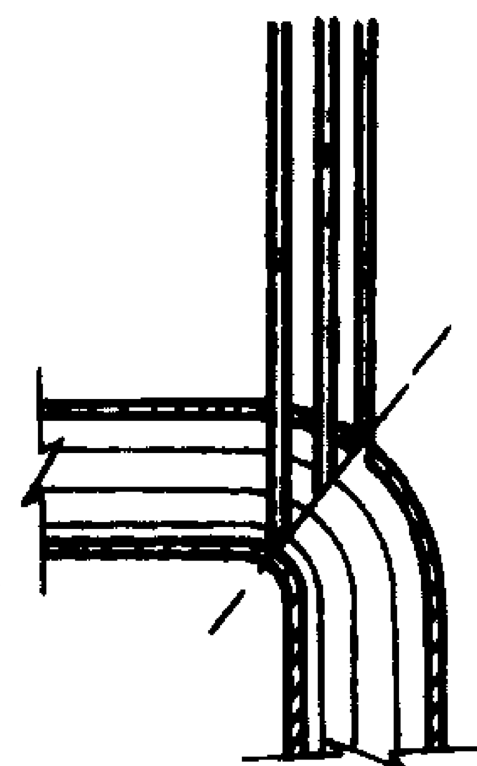


图 3-17 弯曲段断面的压强分布

流体在弯管中的流动，流线呈显著的弯曲，是典型的流速方向变化的急变流问题。在这种流动的断面上，离心力沿断面作用。和流体静压强的分布相比，沿离心力方向压强增加，例如在图 3-17 的断面上，沿弯曲半径的方向，测压管水头增加，流速则沿离心力方向减小了。

流体通过水箱上的孔口的流动，图 3-18，是典型的流速大小变化的急变流动。当孔口边缘为锐缘时，流线在边沿处也呈现显著的弯曲。边缘 A 点和大气相连，压强为零。沿离心力方向，压强迅速提高，流速急剧降低。到达孔口流束中心，流速接近于零，而压强几乎达到水箱底部压强值，如图所示的压强水头分布曲线。

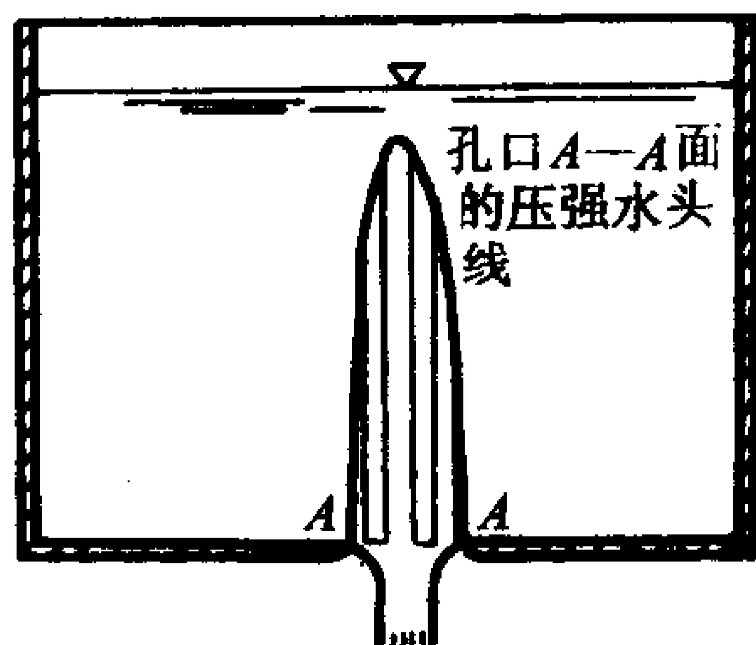


图 3-18 锐缘孔口的出流

在明渠中，当水流绕曲面流动时，根据流线弯曲的方向，判断出离心惯性力引起附加压强的方向，可以绘出此种急变流段的压强分布。如图 3-19 所示为水流沿向上凸曲面和向下凹曲面

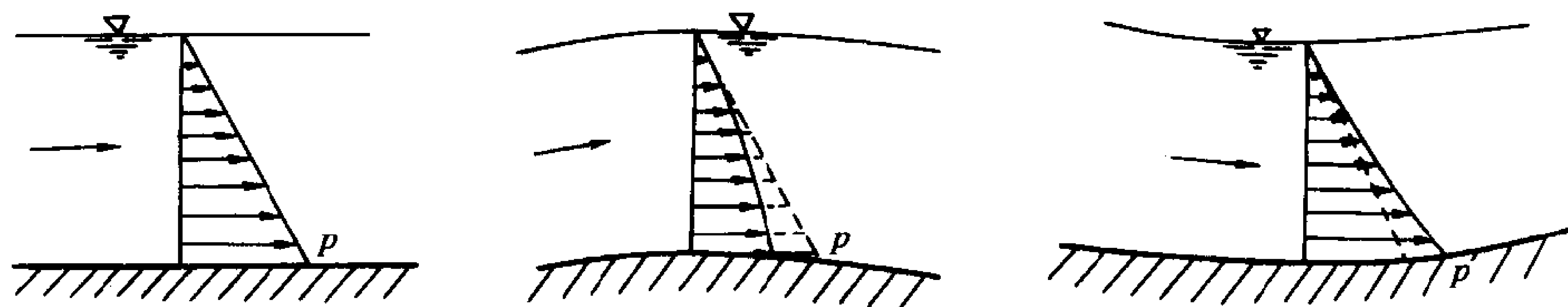


图 3-19　明渠断面的压强分布

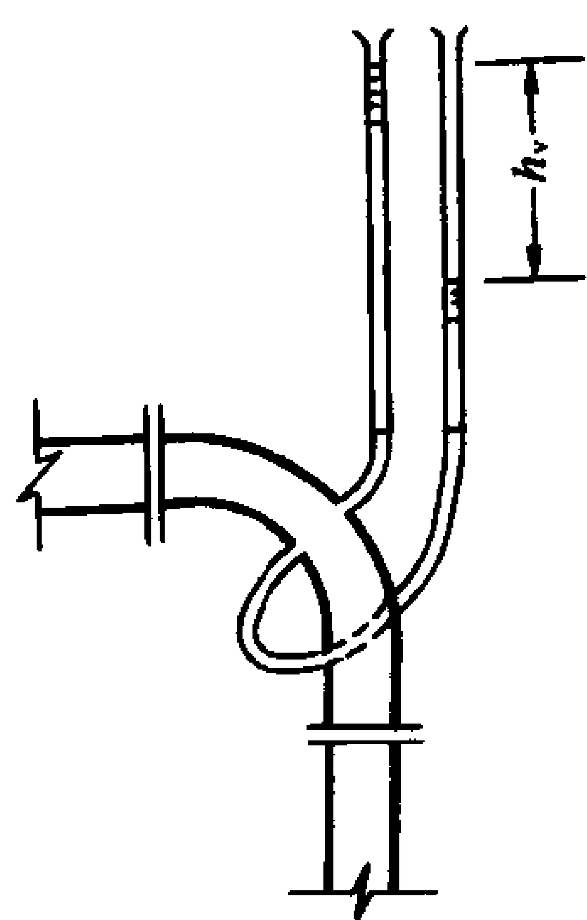


图 3-20　弯管流量计原理

流动时压强分布和均匀流时压强分布（服从静力学分布）的比较。图中虚线表示静力学分布。

急变流断面压强的不均匀分布，在实际中也有应用。弯管流量计就是利用急变流断面上压强差与离心力相平衡，而离心力又与速度的平方成正比这个原理设计的。图 3-20 为弯管流量计的原理图。流量的大小，随 h_v 的大小而变化。

以上所述流速沿程变化情况的分类，不是针对流动的全体，而是指总流中某一流段。一般说来，流动的均匀和不均匀，渐变和急变，是交替地出现于总流中，共同组成流动的总体。

第八节　恒定总流能量方程式

我们已经提出了元流能量方程式。现在进一步把它推广到总流，以得出在工程实际中，对平均流速和压强计算极为重要的总流能量方程式。

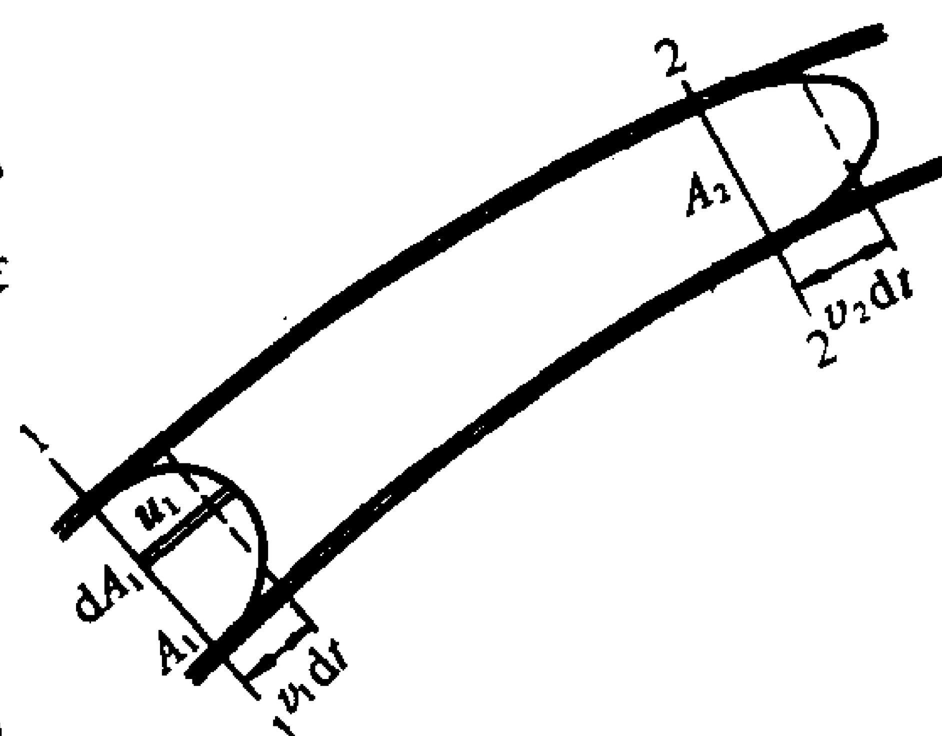


图 3-21　总流能量方程的推证

在图 3-21 的总流中，选取两个渐变流断面 1-1 和 2-2。总流既然可以看作无数元流之和，总流的能量方程就应当是元流能量方程(3-6-8)在两断面范围内的积分：

$$\int_{A1}\left(p_1+\gamma Z_1+\gamma\frac{u_1^2}{2g}\right)dQ=\int_{A2}\left(p_2+\gamma Z_2+\gamma\frac{u_2^2}{2g}\right)dQ+\int_Q\gamma h'_{l1-2}\,dQ \qquad (a)$$

现在将以上七项，按能量性质，分为三种类型，分别讨论各类型的积分。

（一）势能积分

$$\int(p+\gamma Z)dQ=\int\left(\frac{p}{\gamma}+Z\right)\gamma dQ$$

表示单位时间通过断面的流体势能。由于断面在渐变流段，根据上节的论证，$\frac{p}{\gamma}+Z$ 在断面上保持不变，可以提出积分符号以外。则两断面的势能积分可写为：

$$\int(p_1+\gamma Z_1)dQ=\left(\frac{p_1}{\gamma}+Z_1\right)\int\gamma dQ=\left(\frac{p_1}{\gamma}+Z_1\right)\gamma Q \qquad (b)$$

$$\int(p_2+\gamma Z_2)\mathrm{d}Q=\left(\frac{p_2}{\gamma}+Z_2\right)\int\gamma\mathrm{d}Q=\left(\frac{p_2}{\gamma}+Z_2\right)\gamma Q \tag{b'}$$

（二）动能积分

$$\int_Q\gamma\frac{u^2}{2g}\mathrm{d}Q=\int_A\gamma\frac{u^3}{2g}\mathrm{d}A=\frac{\gamma}{2g}\int_A u^3\mathrm{d}A$$

表示单位时间通过断面的流体动能。我们建立方程的目的，是要求出断面平均流速，必须使平均流速 v 出现在方程内。为此，断面动能流量也应当用 v 表示，即以 $\frac{\gamma}{2g}\int_A v^3\mathrm{d}A$ 来代替 $\frac{\gamma}{2g}\int_A u^3\mathrm{d}A$ 。但实际上 $\int_A v^3\mathrm{d}A$ 并不等于 $\int_A u^3\mathrm{d}A$ ，为此，需要乘以修正系数 α。

$$\alpha=\frac{\int u^3\mathrm{d}A}{\int v^3\mathrm{d}A}=\frac{\int u^3\mathrm{d}A}{v^3A} \tag{c}$$

称为动能修正系数。有了修正系数，两断面动能可写为：

$$\frac{\gamma}{2g}\int u_1^3\mathrm{d}A=\frac{\gamma}{2g}\int_{A1}\alpha_1v_1^3\mathrm{d}A=\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}\gamma Q \tag{d}$$

$$\frac{\gamma}{2g}\int u_2^3\mathrm{d}A=\frac{\gamma}{2g}\int_{A2}\alpha_2v_2^3\mathrm{d}A=\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}\gamma Q \tag{d'}$$

α 值根据流速在断面上分布的均匀性来决定。流速分布均匀，$\alpha=1$；流速分布愈不均匀，α 值愈大。在管流的紊流流动中，$\alpha=1.05\sim1.1$。在实际工程计算中，常取 α 等于 1。

（三）能量损失积分

$$\int_Q\gamma h'_{l1-2}\mathrm{d}Q$$

表示单位时间内流过断面的流体克服 1～2 流段的阻力作功所损失的能量。总流中各元流能量损失也是沿断面变化的。为了计算方便，设 h_{l1-2}为平均单位能量损失。则

$$\int_Q\gamma h'_{l1-2}\mathrm{d}Q=h_{l1-2}\gamma Q \tag{e}$$

现在将以上各个积分值代入原积分式(a)

$$\left(Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}\right)\gamma Q=\left(Z_1+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}\right)\gamma Q+h_{l1-2}\gamma Q \tag{3-8-1}$$

这就是总流总能量方程式。方程式表明，若以两断面之间的流段作为能量收支平衡运算的对象，则单位时间流入上游断面的能量，等于单位时间流出下游断面的能量，加上流段所损失的能量。

如用 $H=Z+\frac{p}{\gamma}+\frac{\alpha v^2}{2g}$表示断面全部单位机械能量，则两断面间能量的平衡可表示为：

$$H_1\gamma Q=H_2\gamma Q+h'_{l1-2}\gamma Q \tag{3-8-2}$$

现将(3-8-1)式各项除以 γQ，得出单位重量流体的能量方程：

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{l1-2} \tag{3-8-3}$$

这就是实用上极其重要的恒定总流能量方程式，或恒定总流伯努利方程式。

式中 Z_1、Z_2——选定的1、2渐变流断面上任一点相对于选定基准面的高程；

p_1、p_2——相应断面同一选定点的压强，同时用相对压强或同时用绝对压强；

v_1、v_2——相应断面的平均流速；

α_1、α_2——相应断面的动能修正系数；

h_{l1-2}——1、2两断面间的平均单位水头损失。

水头损失 h_{l1-2} 一般分为沿管长均匀发生的均匀流损失，称为沿程水头损失。和局部障碍(如管道弯头、各种接头、闸阀、水表等)引起的急变流损失，称为局部水头损失。两种损失均为流速水头的倍数，具体计算将在下章讨论。

恒定总流能量方程式，在应用上有很大的灵活性和适应性。

(一) 方程的推导是在恒定流前提下进行的。客观上虽然并不存在绝对的恒定流，但多数流动，流速随时间变化缓慢，由此所导致的惯性力较小，方程仍然适用。

(二) 方程的推导又是以不可压缩流体为基础的。但它不仅适用于压缩性极小的液体流动，也适用于专业上所碰到的大多数气体流动。只有压强变化较大，流速甚高，才需要考虑气体的可压缩性。

(三) 方程的推导是将断面选在渐变流段。这在一般条件下是要遵守的，特别是断面流速甚大时，更应严格遵守。例如，管路系统进口处在急变流段，一般不能选作立能量方程的断面。但在某些问题中，断面流速不大，离心惯性力不显著，或者断面流速项在能量方程中所占比例很小，也允许将断面划在急变流处，近似地求流速或压强。

(四) 方程的推导是在两断面间没有能量输入或输出的情况下提出的。如果有能量的输出(例如中间有水轮机或汽轮机)或输入(例如中间有水泵或风机)，则可以将输入的单位能量项 H_i 加在方程(3-8-3)的左方：

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+H_i=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{l1-2} \tag{3-8-4}$$

或将输出的单位能量项 H_0，加在方程(3-8-3)的右方：

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+H_0+h_{l1-2} \tag{3-8-5}$$

以维持能量收支的平衡。将单位能量乘以 γQ，回到总能量的形式，则换算为功率。在前一种情况下，流体机械的输入功率为 $P_i=\gamma QH_i$。在后一种情况下，流体机械的输出功率为 $P_0=\gamma QH_0$。

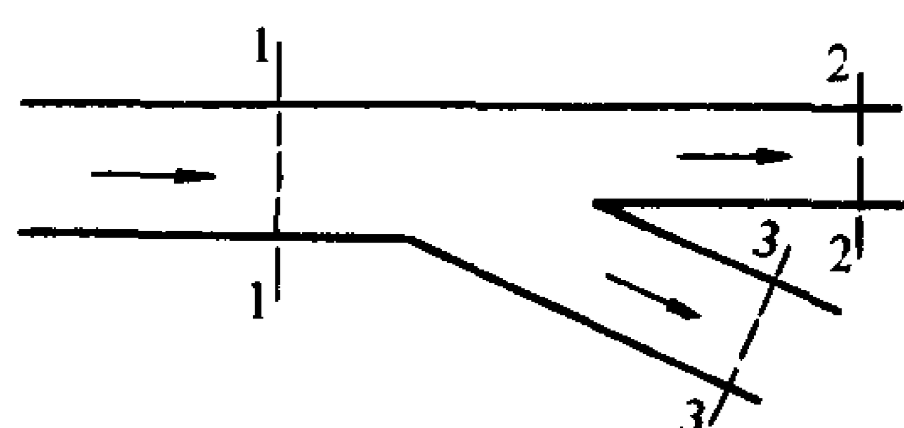


图 3-22 流动分流

(五) 方程的推导是根据两断面间没有分流或合流的情况下推得的。如果两断面之间有分流或合流，应当怎样建立两断面的能量方程呢？

若1、2断面间有分流，如图3-22所示。纵然分流点是非渐变流断面，而离分流点稍远的1、2或3断面都是均匀流或

渐变流断面，可以近似认为各断面通过流体的单位能量在断面上的分布是均匀的。而 $Q_1 = Q_2 + Q_3$，即 Q_1 的流体一部分流向 2 断面，一部分流向 3 断面。无论流到哪一个断面的流体，在 1 断面上单位重量流体所具有的能量都是 $Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$，只不过流到 2 断面时产生的单位能量损失是 h_{l1-2}，而流到 3 断面的流体的单位能量损失是 h_{l1-3}而已。能量方程是两断面间单位能量的关系，因此可以直接建立 1 断面和 2 断面的能量方程：

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{l1-2}$$

或 1 断面和 3 断面的能量方程：

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{l1-3}$$

可见，两断面间虽分出流量，但能量方程的形式并不改变。自然，分流对单位能量损失 h_{l1-2}的值是有影响的。

同样，可以得出合流时的能量方程。

（六）由于方程的推导用到了均匀流过流断面上的压强分布规律，因此，断面上的压强 p 和位置高度 Z 必须取同一点的值，但该点可以在断面上任取。例如在明渠流中，该点可取在液面，也可取在渠底等，但必须在同一点取值。

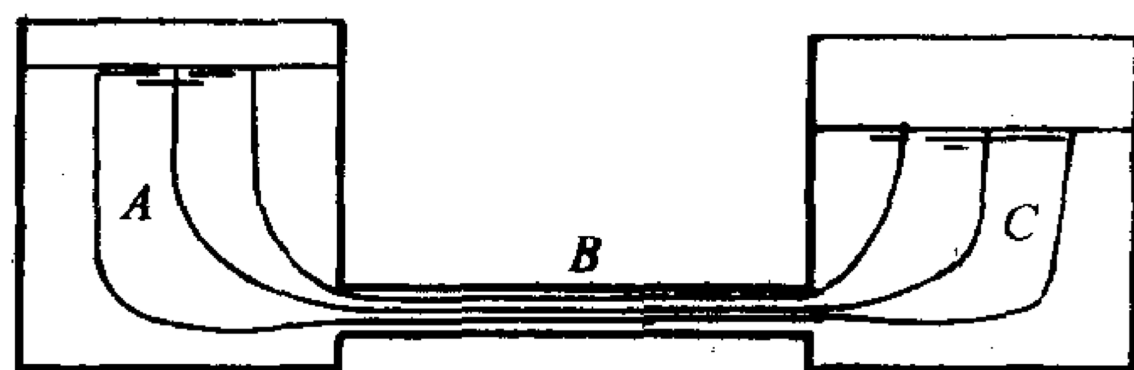
第九节　能量方程的应用

能量方程在解决流体力学问题上有决定性的作用，它和连续性方程联立，全面地解决一元流动的断面流速和压强的计算。

一般来讲，实际工程问题，不外乎三种类型：一是求流速，二是求压强，三是求流速和压强。这里，求流速是主要的，求压强必须在求流速的基础上，或在流速已知的基础上进行。其他问题，例如流量问题，水头问题，动量问题，都是和流速、压强相关联的。

求流速的一般步骤是：分析流动，划分断面，选择基面，写出方程。

分析流动，要明确流动总体。就是要把需要研究的局部流动和流动总体联系起来。例如图3-23中水从大水箱 A 经管道 B 流入水箱 C，气体从静压箱 A 经管道 B 流入大气 C。我们研究对象是管中水流和气流，但是我们应当把管中的水流和气流这些局部和总体联系起来。也就是，要把管中水流和上游水箱 A 的水体以及下游水箱 C 的水体联系起来；要把管中气流和上游静压箱 A 的气体以及下游大气 C 联系起来。图中的 A、B、C 三部分构成不可分离的流动总体。这就是说，为求流速压强而划分的断面，不仅可以划在 B 管中，而且可以划在水箱水体中，静压箱中，或者大气中。



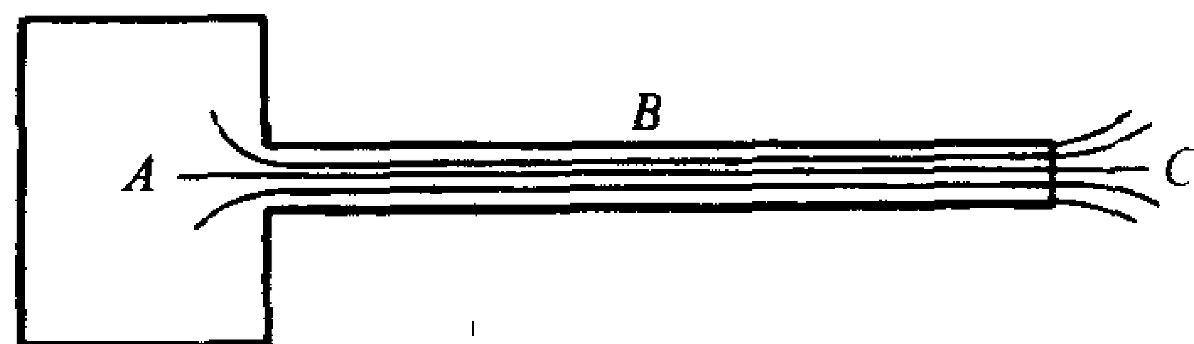


图 3-23　管中水流和气流

划分断面，是在分析流动的基础上进行。两

断面应划分在压强已知或压差已知的渐变流段上，应使我们所需要的未知量出现在方程中。

选择基面要选择一个基准水平面作为写方程中 Z 值的依据。基准水平面原则上可任意选择。一般通过总流的最低点。或通过两断面中较低一断面的形心。这样就使一个断面的 Z 值为零，而另一断面的 Z 值保持正值。

写出方程，就是选择适当的方程式，并将各已知数代入。如果方程中出现两个流速项，则应用连续性方程式联立。能量方程式要根据问题的要求来选择，是气体流动还是液体流动，是考虑损失还是不考虑损失。

最后解出方程，求出流速和压强。一般是先求出流速水头和压强水头。这是因为，水头值本身就有它自己的力学意义。另一方面，由于水头损失一般表为流速水头的倍数，求出流速水头，就易于计算各段损失。

应当注意，若断面取在管流出口以后，流体便不受固体边壁的约束。流动由有压流转变为整个断面都处于大气中的射流。根据射流的周边直接和大气相接的边界条件，断面上各点压强可假定为均匀分布，并且都等于外界大气压强。此时断面上压强分布不再服从静力学规律，即在射流断面上压强分布图形不是梯形。而是矩形，如图 3-24(a)所示。选取管流出口断面列能量方程时，应选断面中心点作为写能量方程的代表点。它的位置高度代表整个断面位能的平均值。

当断面取在有压管流中时，断面上压强分布图形是梯形(服从静力学分布)。如图 3-24(b)所示。

【例 3-7】 如图 3-25 用直径 $d=100\text{mm}$ 的管道从水箱中引水。如水箱中的水面恒定，水面高出管道出口中心的高度 $H=4\text{m}$，管道的损失假设沿管长均匀发生，$h_1=3\dfrac{v^2}{2g}$。要求(1)通过管道的流速 v 和流量 Q；(2) 管道中点 M 的压强 p_M。

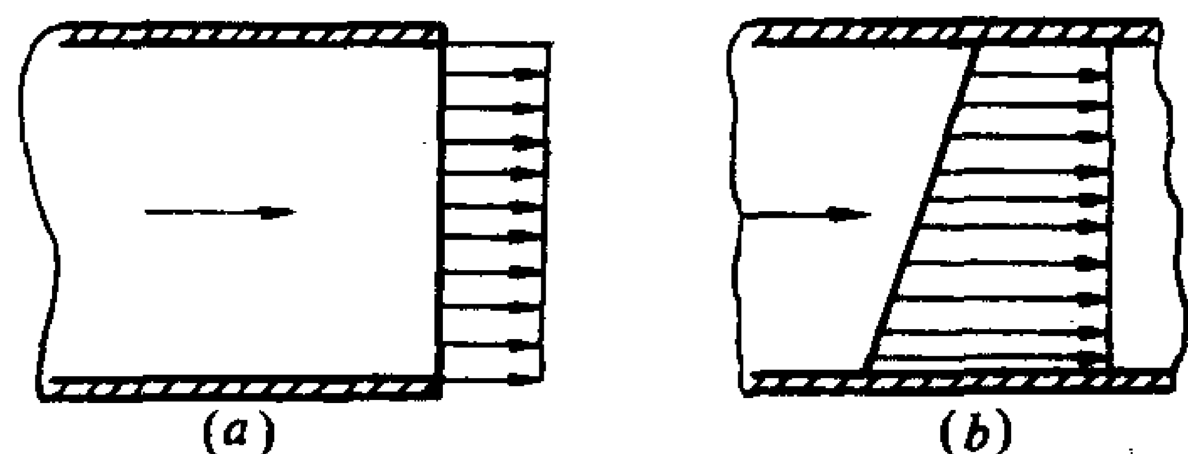


图 3-24 管流出口及管中断面的压强分布

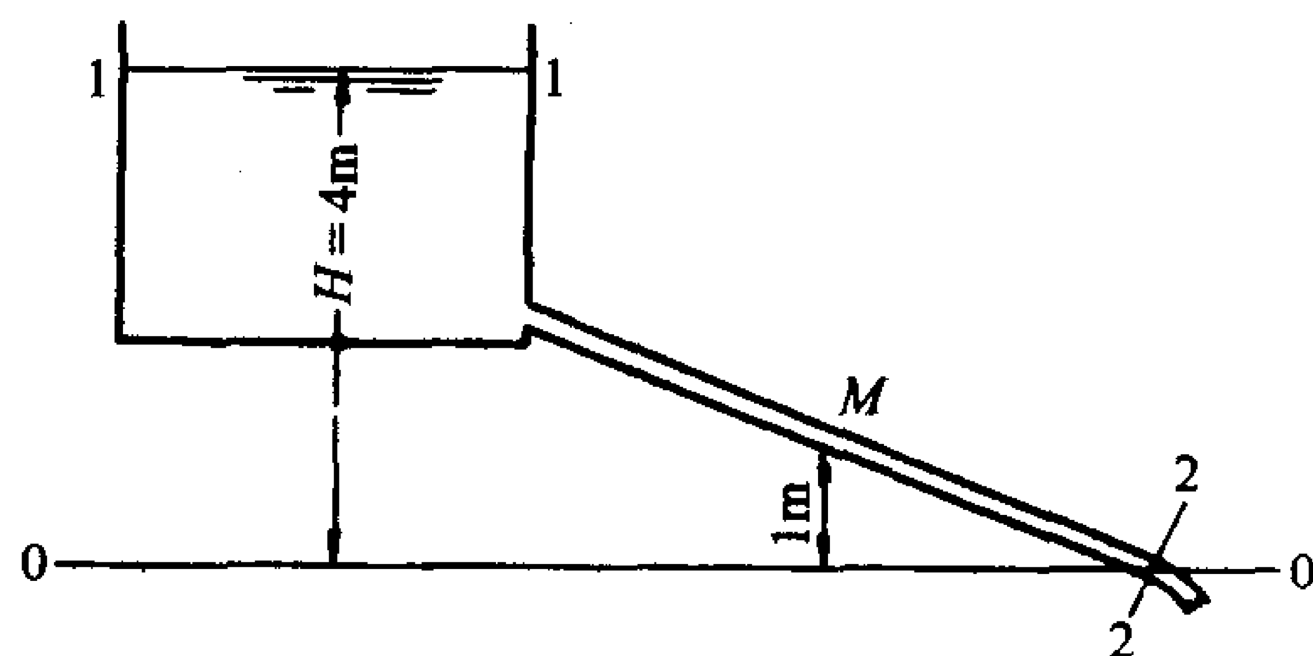


图 3-25 管中流速和压强的计算

【解】 整个流动是从水箱水面通过水箱水体经管道流入大气中，它和大气相接的断面是水箱水面 1-1 和出流断面 2-2，这就是我们取断面的对象。基准水平面 0-0 通过出口断面形心，是流动的最低点。

(1) 写 1-1、2-2 的能量方程：

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{l1-2}$$

式中，$Z_1=4\text{m}$，$Z_2=0$，$\dfrac{p_1}{\gamma}=0$，因 2 断面为射流断面$\dfrac{p_2}{\gamma}=0$，1 断面的速度水头即水箱中的速度水头，对于管流而言常称为行近流速水头。当水箱断面积比管道断面积大得多时，行近流

速较小，行近流速水头数值更小，一般可忽略不计，则

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx 0, \qquad \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = \frac{\alpha v^2}{2g}, \qquad h_{l1-2} = 3\frac{v^2}{2g}$$

代入方程

$$4 + 0 + 0 = 0 + 0 + \alpha\frac{v^2}{2g} + 3\frac{v^2}{2g}$$

取 $\alpha = 1$，则

$$4 = 4\frac{v^2}{2g}, \qquad \frac{v^2}{2g} = 1\text{m}$$

$$v = \sqrt{2g \times 1} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 1} = 4.43\text{m/s}$$

$$Q = vA = 4.43 \times \frac{3.14 \times (0.1)^2}{4} = 0.0348\text{m}^3/\text{s}$$

（2）为求 M 点的压强，必须在 M 点取断面。另一断面取在和大气相接的水箱水面或管流出口断面，现在选择在出口断面。则

$$Z_1 = 1\text{m}, \qquad \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_M}{\gamma}, \qquad \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = 1\text{m}$$

$$Z_2 = 0, \quad \frac{p_2}{\gamma} = 0, \quad \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = 1\text{m}, \quad h_{l1-2} = \frac{1}{2} \times 3\frac{v^2}{2g} = 1.5\text{m}$$

代入能量方程

$$1 + \frac{p_M}{\gamma} + 1 = 0 + 0 + 1 + 1.5$$

$$\frac{p_M}{\gamma} = 0.5\text{m}, \qquad p_M = 4.904\text{kN/m}^2$$

根据上述的流动分析，只要我们能在流动中，选择两压强已知或压差已知的断面，就有可能算出流速。文丘里流量计就是利用这个原理，在管道中造成流速差，引起压强变化，通过压差的量测来求出流速和流量。

文丘里流量计如图 3-26 所示，是由一段渐缩管，一段喉管和一段渐扩管，前后相连所组成。将它连接在主管中，当主管水流通过此流量计时，由于喉管断面缩小，流速增加，压强相应减低，用差压计测定压强水头的变化 Δh，即可计算出流速和流量。

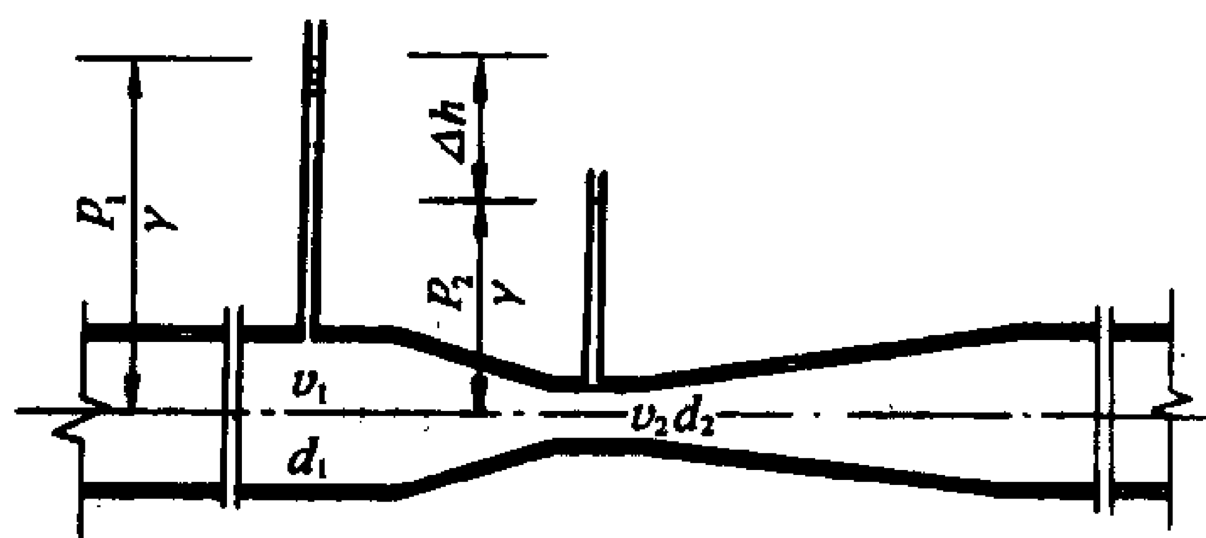


图 3-26 文丘里流量计原理

取 1、2 两渐变流断面，写理想流体能量方程式：

$$0 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

移项

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \Delta h$$

出现两个流速，和连续性方程式联立：

$$v_1 \times \frac{\pi}{4} d_1^2 = v_2 \times \frac{\pi}{4} d_2^2$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2, \qquad \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{\frac{v_2^2}{2g}}{\frac{v_1^2}{2g}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$$

代入能量方程

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \Delta h$$

解出流速

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{(\frac{d_1}{d_2})^4 - 1}}$$

流量为

$$Q = v_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4} d_1^2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}$$

但$\frac{\pi}{4} d_1^2 \sqrt{\frac{2g}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]}}$只和管径 d_1 和 d_2 有关，对于一定的流量计，它是一个常数，以 K 表之。即

$$K = \frac{\pi}{4} d_1^2 \sqrt{\frac{2g}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]}} \tag{3-9-1}$$

则

$$Q = K\sqrt{\Delta h}$$

由于推导过程采用了理想流体的力学模型，求出的流量值较实际为大。为此，乘以 μ 值来修正。μ 值根据实验确定，称为文丘里流量系数。它的值约在 0.95～0.98 之间。则

$$Q = \mu K\sqrt{\Delta h} \tag{3-9-2}$$

【例 3-8】 设文丘里管的两管直径为 $d_1 = 200\text{mm}$，$d_2 = 100\text{mm}$，测得两断面的压强差 $\Delta h = 0.5\text{m}$，流量系数 $\mu = 0.98$，求流量。

【解】

$$K = \frac{\pi}{4} \times (0.2)^2 \sqrt{\frac{2 \times 9.8}{\left[\left(\frac{200}{100}\right)^4 - 1\right]}} = 0.036\text{m}^{2.5}/\text{s}$$

$$Q = 0.98 \times 0.036 \times \sqrt{0.5} = 0.0249\text{m}^3/\text{s} = 24.9\text{l}/\text{s}$$

在文丘里流量计的喉管中，或在某些水流的局部区域中，由于出现巨大的流速，会发生压强在该处局部显著地降低，可能达到和水温相应的汽化压强，这时水迅速汽化，使一部分

液体转化为蒸汽，出现了蒸汽气泡的区域，气泡随水流流入压强较高的区域而破灭，这种现象称为空化。空化限制了压强的继续降低和流速的增大，减少了通流面积，从而限制了流量的增加，影响到测量的准确性。空化现象在设计中是必须注意避免的。空化对水力机械的有害作用称为气蚀，将在下篇讨论。

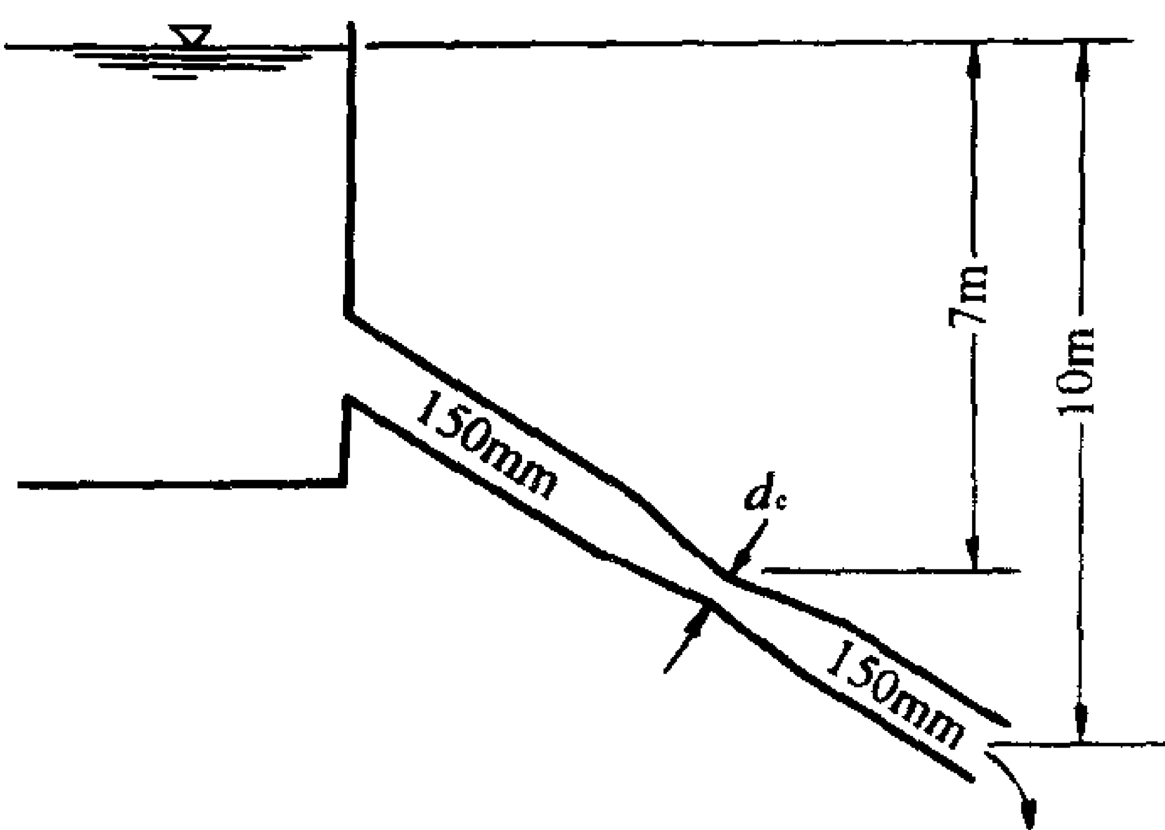


图 3-27 不出现空化的计算例

【例 3-9】 如图 3-27 大气压强为 97kN/m^2，收缩段的直径应当限制在什么数值以上，才能保证不出现空化。水温为 40℃，不考虑损失。

【解】 已知水温为 40℃ 时，$\gamma = 9.73\text{kN/m}^3$，$\rho = 992.2\text{kg/m}^3$，汽化压强 $p' = 7.38\text{kN/m}^2$。求出

$$\frac{p_a}{\gamma} = \frac{97}{9.73} = 10\text{m} \qquad \frac{p'}{\gamma} = \frac{7.38}{9.73} = 0.75\text{m}$$

列水面和收缩断面的能量方程时，为了不出现空化，以 40℃ 时水的汽化压强 p' 作为最小压强值，求出对应的收缩段直径 d_c。当收缩段直径大于 d_c 时，收缩段压强一定大于 p'，可以避免产生汽化。能量方程如下：

$$10 + 10 = 3 + \frac{v_c^2}{2g} + 0.75, \qquad \frac{v_c^2}{2g} = 16.25\text{m} \tag{1}$$

列水面和出口断面的能量方程：

$$\frac{v^2}{2g} = 10\text{m} \tag{2}$$

根据连续性方程：

$$\frac{v_c}{v} = \frac{d^2}{d_c^2}$$

则

$$\left(\frac{v_c}{v}\right)^2 = \frac{16.25}{10} = \frac{150^4}{d_c^4}$$

得出

$$d_c = 133\text{mm}$$

第十节 总水头线和测压管水头线

用能量方程计算一元流动，能够求出水流某些个别断面的流速和压强。但并未回答一元流的全线问题。现在，我们用总水头线和测压管水头线来求得这个问题的图形表示。

总水头线和测压管水头线，直接在一元流上绘出，以它们距基准面的铅直距离，分别表示相应断面的总水头和测压管水头，如图 3-28 所示。它们是在一元流的流速水头已算出后绘出的。

我们知道，位置水头，压强水头和流速水头之和，$H = Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$，称为总水头。能量方程写为上下游两断面总水头 H_1、H_2 的形式是：

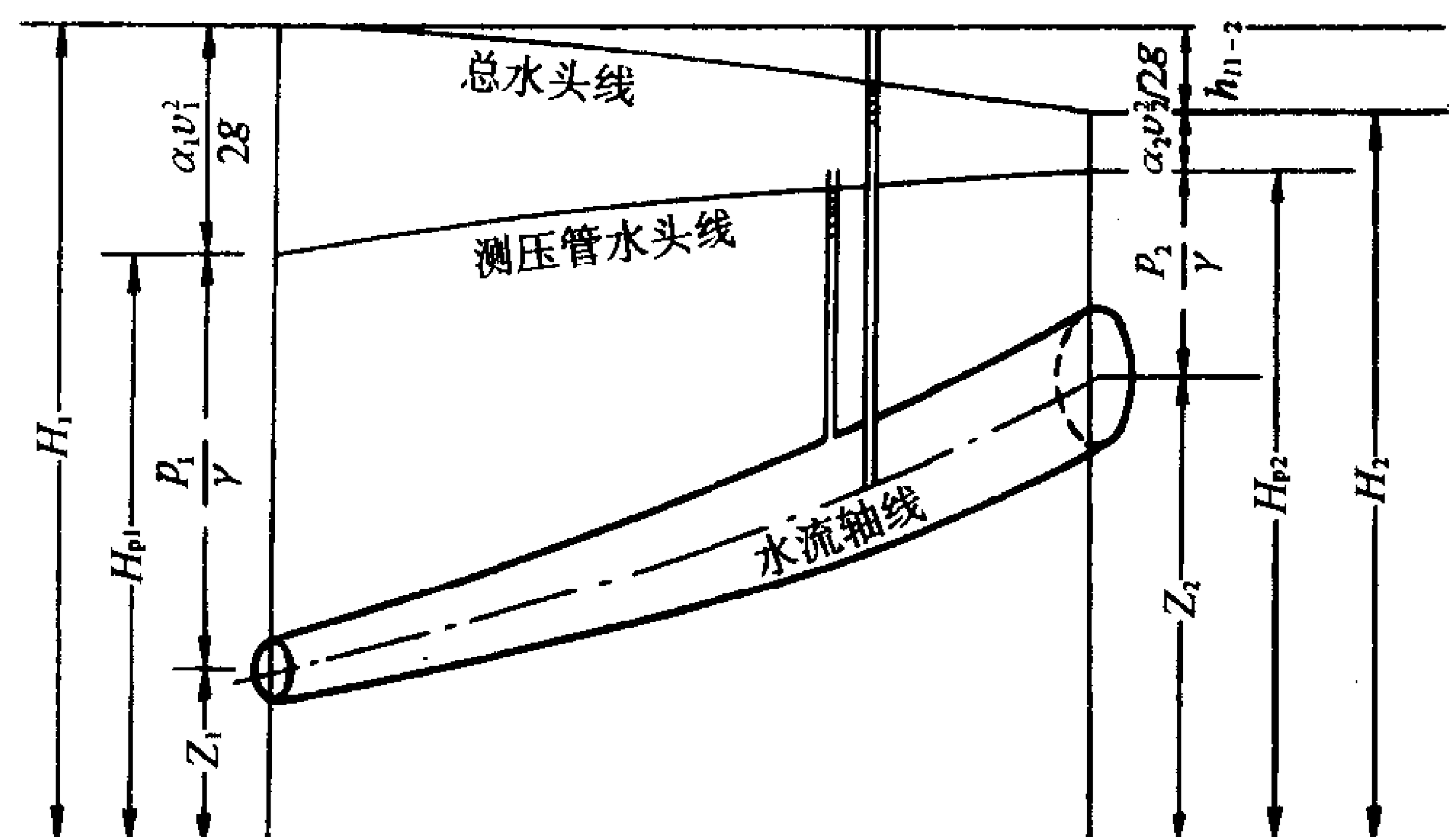


图 3-28 总水头线和测压管水头线

$$H_1 = H_2 + h_{l1-2}$$

或

$$H_2 = H_1 - h_{l1-2}$$

即每一个断面的总水头，是上游断面总水头，减去两断面之间的水头损失。根据这个关系，从最上游断面起，沿流向依次减去水头损失，求出各断面的总水头，一直到流动的结束。将这些总水头，以水流本身高度的尺寸比例，直接点绘在水流上。这样联成的线，就是总水头线。由此可见，总水头线是沿水流逐段减去水头损失绘出来的。

在绘制总水头线时，需注意区分沿程损失和局部损失在总水头线上表现形式的不同。沿程损失假设为沿管线均匀发生，表现为沿管长倾斜下降的直线。局部损失假设为在局部障碍处集中作用，一般地表现为在障碍处铅直下降的直线。对于渐扩管或渐缩管等，也可近似处理成损失在它们的全长上均匀分布，而非集中在一点。

测压管水头是同一断面总水头与流速水头之差。

$$H = H_p + \frac{v^2}{2g}$$

$$H_p = H - \frac{v^2}{2g}$$

根据这个关系，从断面的总水头减去同一断面的流速水头，即得该断面的测压管水头。将各断面的测压管水头联成的线，就是测压管水头线。所以，测压管水头线是根据总水头线减去流速水头绘出的。

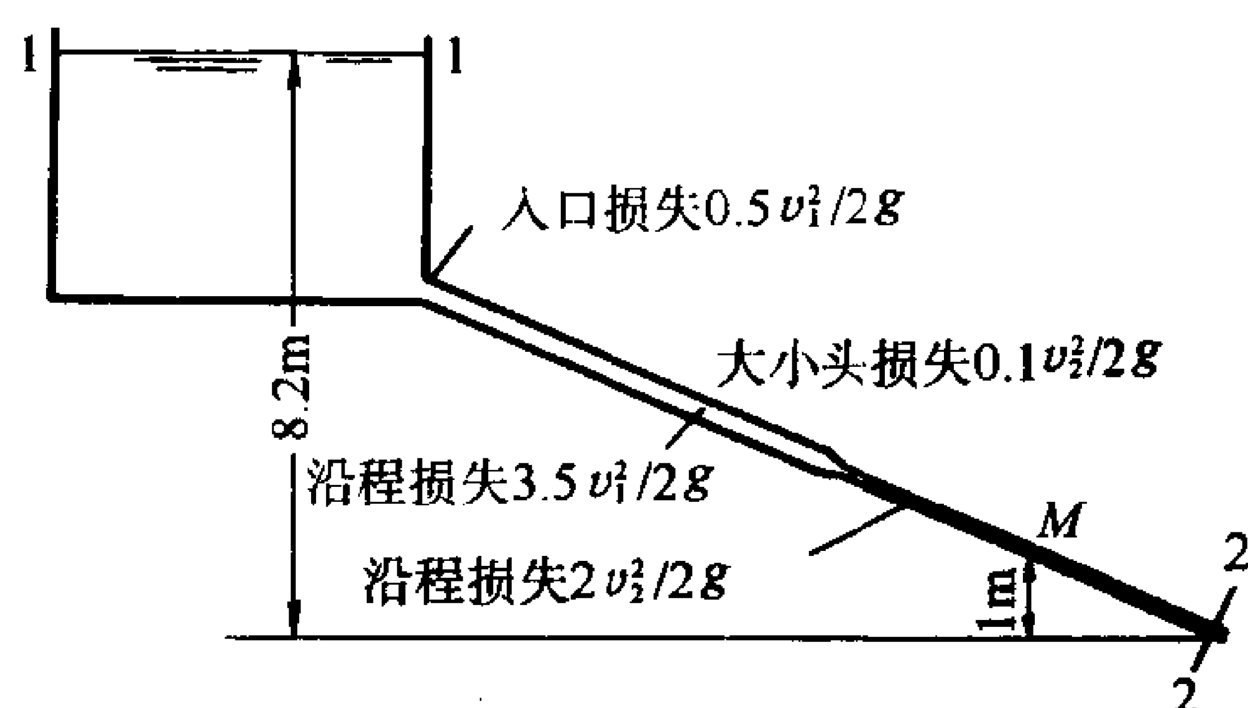


图 3-29 水头损失的计算

【例 3-9】 水流由水箱经前后相接的两管流出大气中。大小管断面的比例为 2∶1。全部水头损失的计算式参见图 3-29。(1) 求出口流速 v_2；(2) 绘总水头线和测压管水头线；(3) 根据水头线求 M 点的压强 p_M。

【解】 (1) 划分水面 1-1 断面及出流断面 2-2，基准面通过管轴出口。则

$$p_1 = 0 \quad Z_1 = 8.2\text{m} \quad v_1 = 0$$

$$p_2 = 0 \quad Z_2 = 0$$

写能量方程

$$8.2+0+0=0+0+\frac{v_2^2}{2g}+h_{l1-2}$$

根据图 3-29

$$h_{l1-2}=0.5\frac{v_1^2}{2g}+0.1\frac{v_2^2}{2g}+3.5\frac{v_1^2}{2g}+2\frac{v_2^2}{2g}$$

由于两管断面之比 2:1,两管流速之比为 1:2,即 $v_2=2v_1$,则$\frac{v_2^2}{2g}=4\frac{v_1^2}{2g}$。代入

$$h_{l1-2}=3.1\frac{v_2^2}{2g}$$

则

$$8.2=4.1\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{v_2^2}{2g}=2\text{m}\quad v_2=\sqrt{19.6\times2}=6.25\text{m/s}$$

$$\frac{v_1^2}{2g}=0.5\text{m}$$

(2) 现在从 1-1 断面开始绘总水头线,水箱静水水面高 $H=8.2$m,总水头线就是水面线。入口处有局部损失,$0.5\frac{v_1^2}{2g}=0.5\times0.5=0.25$m。则 1-$a$ 的铅直向下长度为 0.25m。从 A 到B 的沿程损失为 $3.5\frac{v_1^2}{2g}=1.75$m,则 b 低于 a 的铅直距离为 1.75m。以此类推,直至水流出口,图 3-30 中 1-a-b-b_0-c 即为总水头线。

测压管水头线在总水头线之下,距总水头线的铅直距离:在 A-B 管段为$\frac{v_1^2}{2g}=0.5$m,在 B-C 管段的距离为$\frac{v_2^2}{2g}=2$m。由于断面不变,流速水头不变。两管段的测压管水头线,分别与各管段的总水头线平行。图 3-30 中 1-a'-b'-b'_0-c'即为测压管水头线。

(3) 测量图中测压管水头线至 BC 管中点的铅直距离,求出 M 点的压强。量得$\frac{p_M}{\gamma}=1$m,$p_M=9807\text{N/m}^2$。

从上例可以看出,绘制测压管水头线和总水头线之后,图形上出现四根有能量意义的线:总水头线,测压管水头线,水流轴线(管轴线)和基准面线。这四根线的相互铅直距离,反映了全线各断面的各种水头值。这样,水流轴线到基准线之间的铅直距离,就是断面的位置水头。测压管水头线到水流轴线之间的铅直距离,就是断面的压强水头。而总水头线到

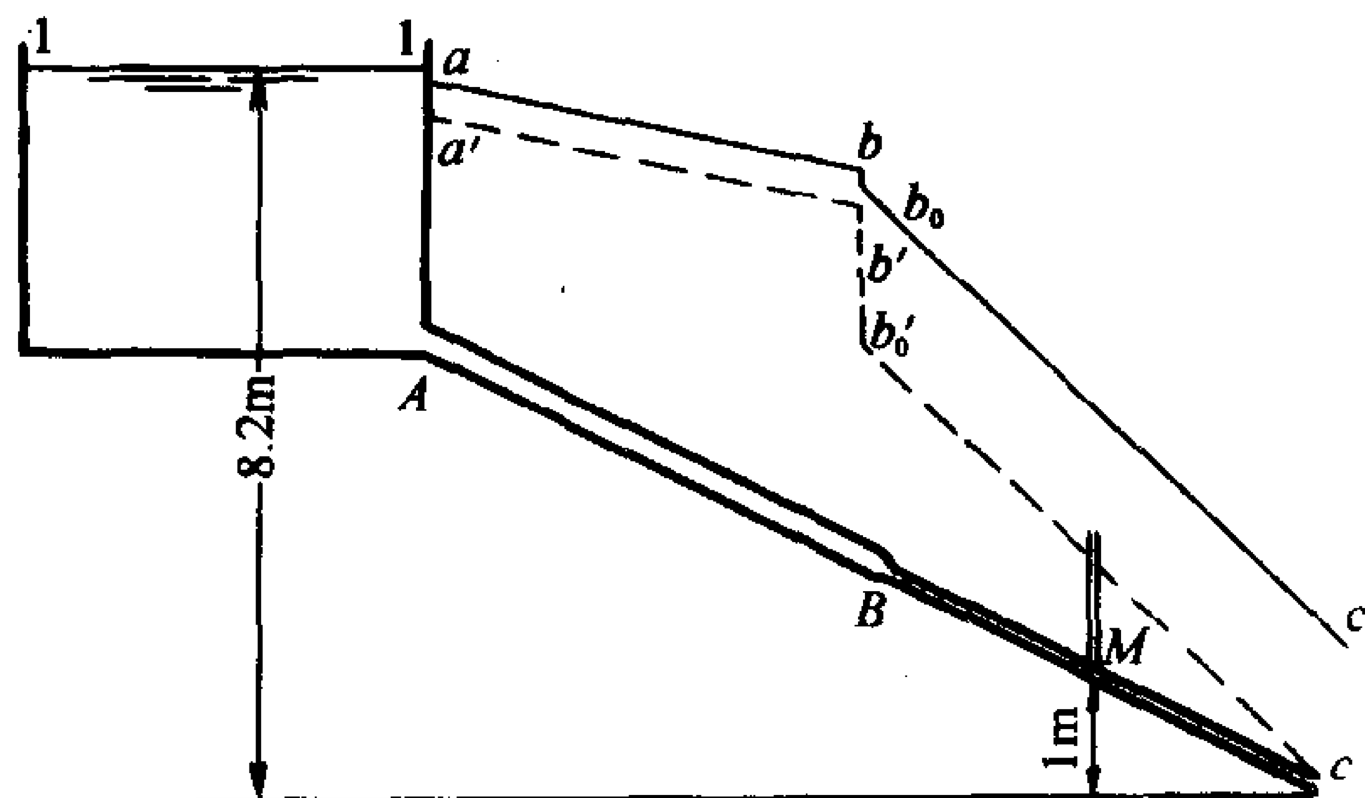


图 3-30 水头线的绘制

测压管水头线之间的铅直距离，就是断面流速水头。

第十一节　恒定气流能量方程式

前面已经讲到，总流能量方程式为：

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{l1-2} \tag{3-8-3}$$

虽然它是在不可压缩这样的流动模型基础上提出的，但在流速不高（小于 68m/s），压强变化不大的情况下，同样可以应用于气体。

当能量方程用于气体流动时，由于水头概念没有像液体流动那样明确具体，我们将方程各项乘以容重 γ，转变为压强的因次。现在应该指出，本章第六节式（a）中压强 p_1 和 p_2 应为绝对压强。这样，式(3-8-3)可改写为：

$$p_1'+\gamma Z_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2'+\gamma Z_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2} \tag{a}$$

其中，$\alpha_1=\alpha_2=1$，$p_{l1-2}=\gamma h_{l1-2}$，为两断面间的压强损失。

式中，两断面压强写为 p_1'、p_2'，表示它们是绝对压强，以与以后的相对压强 p_1、p_2 相区别。

但是，工程计算中需要求出的是相对压强而不是绝对压强。并且，工程中所用的压强计，绝大多数都是测定相对压强的。这样，水力计算也只能以相对压强为依据。

为了将（a）式中的绝对压强换算为相对压强，对于液流和气流应当区别对待。如前所述，液体在管中流动时，由于液体的容重远大于空气容重，一般可以忽略大气压强因高度不同的差异。此时绝对压强 $p_1'=p_a+p_1$，$p_2'=p_a+p_2$。将 p_1'和 p_2'代入（a）式中，消去 p_a 后得下式：

$$\gamma Z_1+p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=\gamma Z_2+p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2} \tag{b}$$

比较（a）、（b）两式可知，对于液体流动，能量方程中的压强用绝对压强或相对压强皆可。

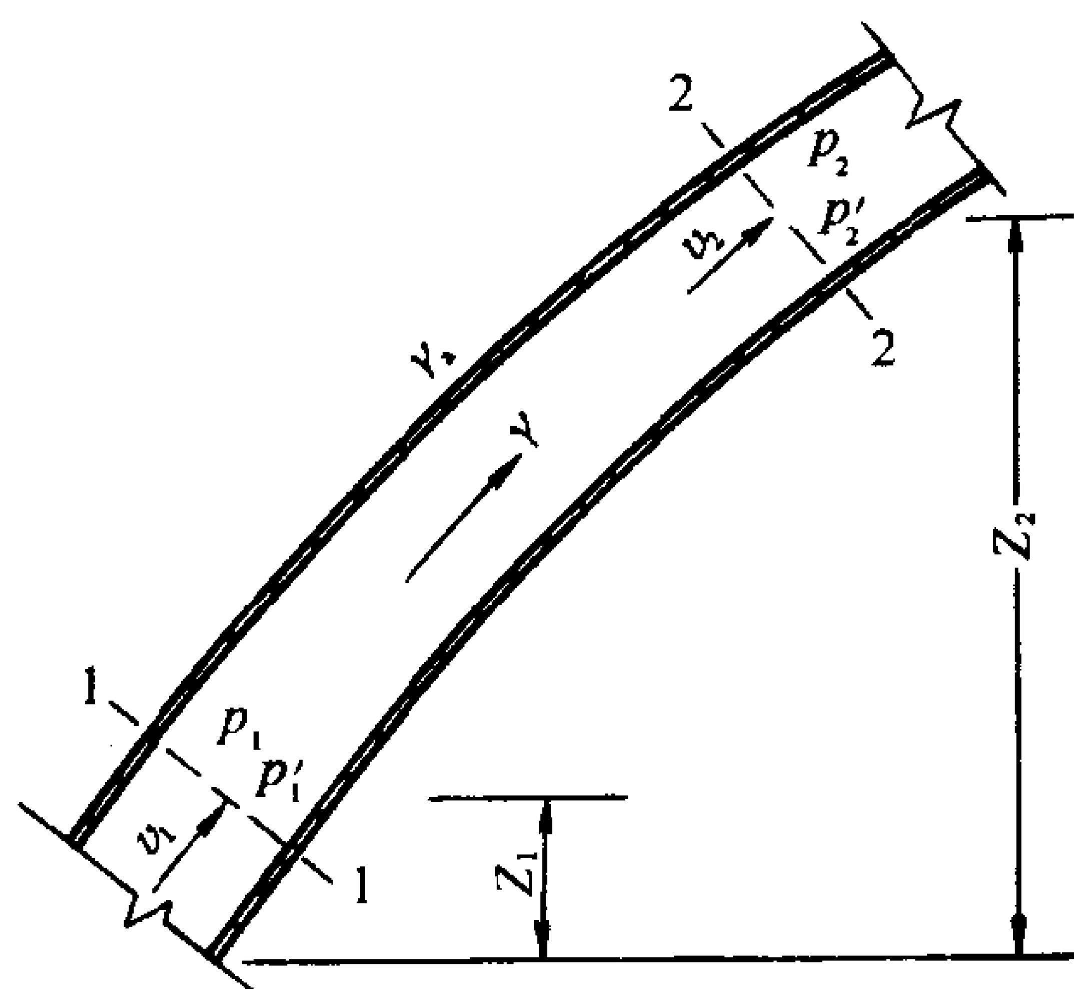


图 3-31　气流的相对压强与绝对压强

对于气体流动，特别是在高差较大，气体容重和空气容重不等的情况下，必须考虑大气压强因高度不同的差异。此时 1、2 断面绝对压强和相对压强的关系将不同。如图 3-31 所示。设断面在高程为 Z_1 处，大气压强为 p_a；在高程为 Z_2 的断面，大气压强将减至 $p_a-\gamma_a(Z_2-Z_1)$。式中，γ_a 为空气容重。因而，如果 1 断面绝对压强 p_1'和相对压强 p_1 之间的关系为：

$$p_1'=p_a+p_1$$

则 2 断面的绝对压强和相对压强的关系为：

$$p_2'=p_a-\gamma_a(Z_2-Z_1)+p_2$$

将 p_1'和p_2'代入(a)式得：

$$p_a+p_1+\gamma Z_1=\frac{\rho v_1^2}{2}+p_a-\gamma_a(Z_2-Z_1)+p_2+\gamma Z_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2}$$

消去 p_a，经整理得出：

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}+(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2} \tag{3-11-1}$$

上式即用相对压强表示的气流能量方程式。方程与液体能量方程比较，除各项单位为压强，表示气体单位体积的平均能量外，对应项有基本相近的意义：

p_1、p_2——断面 1、2 的相对压强，专业上习惯称为静压。但不能理解为静止流体的压强。它与管中水流的压强水头相对应。应当注意，相对压强是以同高程处大气压强为零点计算的，不同的高程引起大气压强的差异，已经计入方程的位压项了。

$\frac{\rho_1 v_1^2}{2}$，$\frac{\rho_2 v_2^2}{2}$——专业中习惯称为动压。它反映断面流速无能量损失地降低至零所转化的压强值。

$(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)$——容重差与高程差的乘积，称为位压，与水流的位置水头差相应。位压是以 2 断面为基准量度的 1 断面的单位体积位能。我们知道，$(\gamma_a-\gamma)$为单位体积气体所承受的有效浮力，气体从 Z_1 至 Z_2，顺浮力方向上升(Z_2-Z_1)铅直距离时，气体所损失的位能为$(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)$。因此$(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)$即为断面 1 相对于断面 2 的单位体积位能。式中$(\gamma_a-\gamma)$的正或负，表征有效浮力的方向为向上或向下；(Z_2-Z_1)的正或负表征气体向上或向下流动。位压是两者的乘积，因而可正可负。当气流方向(向上或向下)与实际作用力(重力或浮力)方向相同时，位压为正。当二者方向相反时，位压为负。

在讨论 1、2 断面之间管段内气流的位压沿程变化时，任一断面 Z 的位压是$(\gamma_a-\gamma)\times(Z_2-Z)$，仍然以 2 断面为基准。

应当注意，气流在正的有效浮力作用下，位置升高，位压减小；位置降低，位压增大。这与气流在负的有效浮力作用下，位置升高，位压增大；位置降低，位压减小正好相反。

p_{l1-2}——1、2 两断面间的压强损失。

静压和位压相加，称为势压，以 p_s 表示。下标 s 表示“势压”的第一个注音符号。势压与管中水流的测压管水头相对应。显然

$$p_s=p+(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)$$

静压和动压之和，专业中习惯称为全压，以 p_q 表示。表示方法同前。

$$p_q=p+\frac{\rho v^2}{2}$$

静压，动压和位压三项之和以 p_z 表示，称为总压，与管中水流的总水头相对应。

$$p_z=p+\frac{\rho v^2}{2}\times(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)$$

由上式可知，存在位压时，总压等于位压加全压。位压为零时，总压就等于全压。

在多数问题中，特别是空气在管中的流动问题，或高差甚小，或容重差甚小，$(\gamma_a-\gamma)\times(Z_2-Z_1)$可以忽略不计，则气流的能量方程简化为：

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2} \quad (3\text{-}11\text{-}2)$$

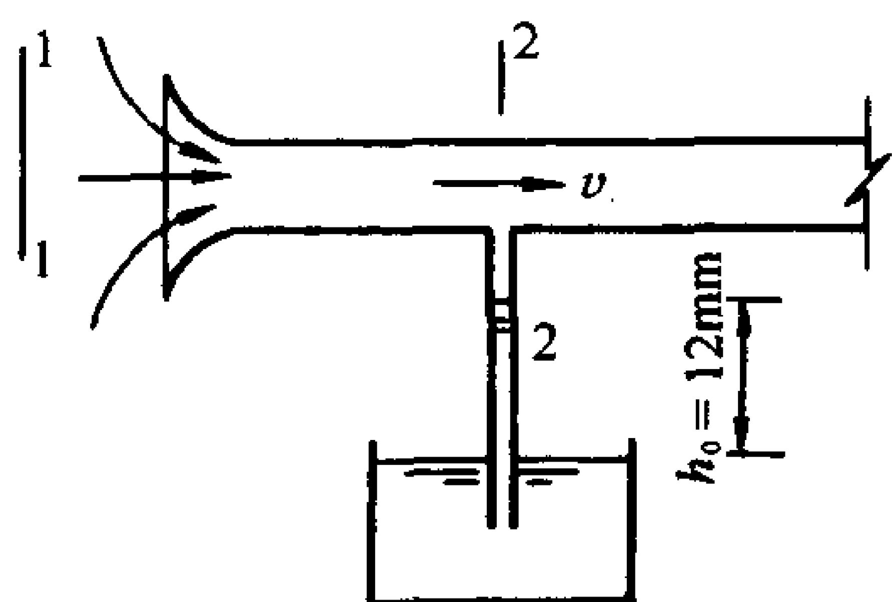


图 3-32　喇叭形进口的空气流量

【例 3-10】　密度 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$ 的空气，用风机吸入直径为 10cm 的吸风管道，在喇叭形进口处测得水柱吸上高度为 $h_0=12$mm(图 3-32)。不考虑损失，求流入管道的空气流量。

【解】　气体由大气中流入管道。大气中的流动也是气流的一个部分，但它的压强只有在距喇叭口相当远，流速接近零处，才等于零，此处取为 1-1 断面。2-2 断面也应该选取在接有测压管的地方，因为这是压强已知，和大气压有联系的断面。12mmH$_2$O 等于 118N/m^2。

取 1-1、2-2 断面写能量方程：

$$0+0=1.2\times\frac{v^2}{2}-118$$

$$v=\sqrt{118/0.6}=14\text{m/s}$$

$$Q=vA=14\times\frac{\pi}{4}\times0.1^2=0.11\text{m}^3/\text{s}$$

【例 3-11】　气体由压强为 12mmH$_2$O 的静压箱 A，经过直径为 10cm，长度为 100m 的管 B 流出大气中，高差为 40m，如图 3-33 所示。沿程均匀作用的压强损失为 $p_l=9\frac{\rho v^2}{2}$。当(1)气体为与大气温度相同的空气时；(2) 气体为 $\rho=0.8\text{kg/m}^3$ 的燃气时，分别求管中流速，流量，及管长一半处 B 点的压强。

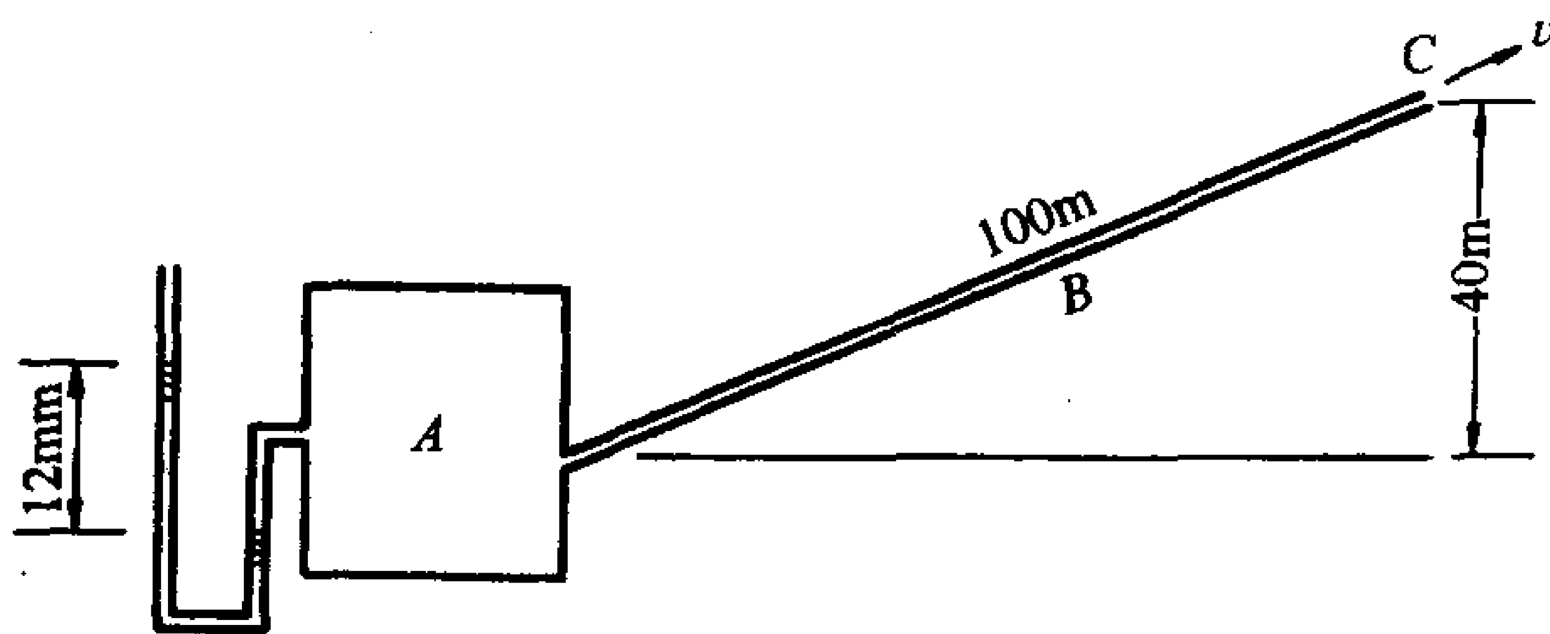


图 3-33　求管中流速及压强例

【解】　(1) 气体为空气时，用(3-11-2)式计算流速，取 A、C 断面列能量方程。此时气体密度 $\rho=\rho_a=1.2\text{kg/m}^3$。

$$12\times9.8+0=0+1.2\times\frac{v^2}{2}+9\times1.2\times\frac{v^2}{2}12\times\frac{v^2}{2}=117.6\text{N/m}^2$$

$$v=\sqrt{2\times117.6/12}=4.43\text{m/s}$$

$$Q=4.43\times0.1^2\times\frac{\pi}{4}=0.0348\text{m}^3/\text{s}$$

B 点压强计算，取 B、C 断面列方程：

$$p_B+1.2\times\frac{v^2}{2}=0+9\times1.2\times\frac{v^2}{2}\times\frac{1}{2}+1.2\times\frac{v^2}{2}$$

$$p_B=4.5\times1.2\times\frac{v^2}{2}=52.92\text{N/m}^2$$

(2) 气体为煤气时，用(3-11-1)式计算流速

$$12\times9.8+0+40\times9.8(1.2-0.8)=0+0.8\times\frac{v^2}{2}+9\times0.8\times\frac{v^2}{2}$$

$$8\times\frac{v^2}{2}=274.4\text{N/m}^2$$

$$v=\sqrt{274.4/4}=8.28\text{m/s}$$

$$Q=8.28\times\frac{\pi}{4}\times0.1^2=0.065\text{m}^3/\text{s}$$

B 点压强计算

$$p_B=9\times0.8\times\frac{v^2}{2}\times\frac{1}{2}-20\times9.8\times0.4=45\text{N/m}^2$$

【例 3-12】 如图 3-34 所示，空气由炉口 a 流入，通过燃烧后，废气经 b、c、d 由烟囱流出。烟气 $\rho=0.6\text{kg/m}^3$，空气 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$，由 a 到 c 的压强损失换算为出口动压为 $9\times\frac{\rho v^2}{2}$，$c$ 到 d 的损失为 $20\frac{\rho v^2}{2}$。求(1) 出口流速 v；(2) c 处静压 p_c。

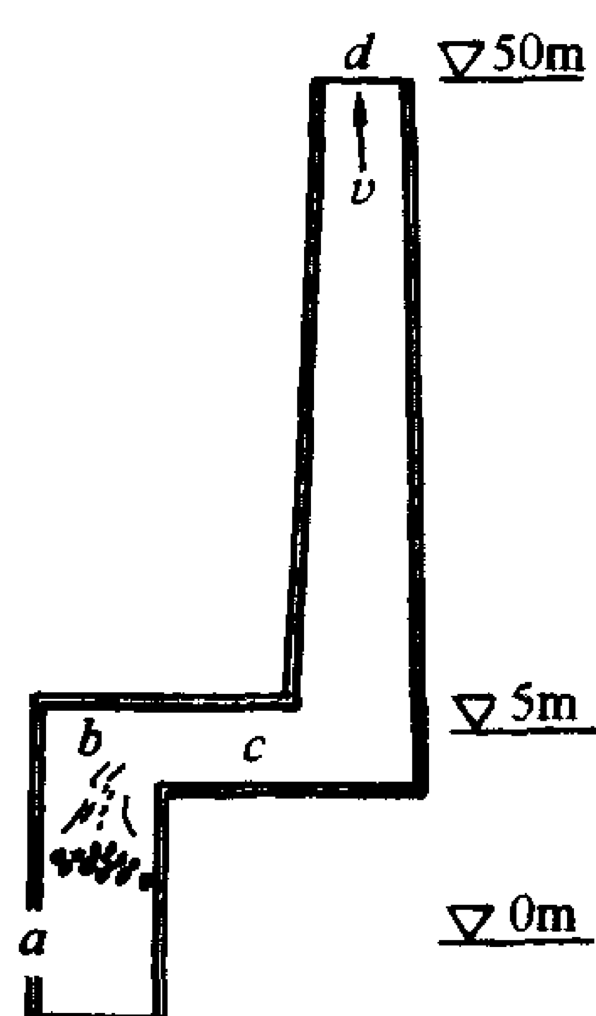


图 3-34 炉子及烟囱

【解】 (1) 在进口前零高程和出口 50m 高程处两断面写能量方程：

$$0+0+9.8\times(1.2-0.6)\times50=20\times0.6\times\frac{v^2}{2}+9\times0.6\times\frac{v^2}{2}+0.6\times\frac{v^2}{2}+0$$

$$30\times0.6\times\frac{v^2}{2}=294\text{N/m}^2$$

$$0.6\times\frac{v^2}{2}=9.8\text{N/m}^2$$

$$v=\sqrt{9.8\times2/0.6}=5.7\text{m/s}$$

(2) 计算 p_c，取 c、d 断面

$$0.6\times\frac{v^2}{2}+p_c+(50-5)\times0.6\times9.8=0+20\times0.6\times\frac{v^2}{2}+0.6\times\frac{v^2}{2}$$

$$p_c=20\times0.6\times\frac{v^2}{2}-264.6=20\times9.75-264.6=-68.6\text{N/m}^2$$

第十二节 总压线和全压线

为了反映气流沿程的能量变化，我们用与总水头线和测压管水头线相对应的总压线和

势压线来求得其图形表示。

气流能量方程各项单位为压强，气流的总压线和势压线一般可在选定零压线（即第二断面相对压强为零的线）的基础上，对应于气流各断面进行绘制。

在选定零压线的基础上绘总压线时，根据方程 $p_{z1}=p_{z2}+p_{l1-2}$ 则：

$$p_{z2}=p_{z1}-p_{l1-2} \tag{3-12-1}$$

即第二断面的总压等于第一断面的总压减去两断面间的压强损失。依此类推，就可求得各断面的总压。将各断面的总压值连接起来，即得总压线。

在总压线的基础上可绘制势压线。因为

$$p_z=p_s+\frac{\rho v^2}{2} \tag{3-12-2}$$

则

$$p_s=p_z-\frac{\rho v^2}{2} \tag{3-12-3}$$

即势压等于该断面的总压减去动压。将各断面的势压连成线，便得势压线。显然，当断面面积不变时，总压线和势压线是相互平行的。

位压线的绘制。由方程(3-11-1)可知，第一断面的位压为 $(\gamma_a-\gamma)(Z_2-Z_1)$，第二断面的位压为零。1、2 断面之间的位压是直线变化。由 1、2 两断面位压连成线，即得位压线。

绘出上述各种压头线后，与液流的图示法类似，图上出现四条具有能量意义的线：总压线，势压线，位压线和零压线。总压线和势压线间铅直距离为动压；势压线和位压线间铅直距离为静压；位压线和零压线间铅直距离为位压。静压为正，势压线在位压线上方；静压为负，势压线在位压线下方。

【例 3-13】 利用例 3-11 的数据，(1) 绘制气体为空气时的各种压强线，并求中点 B 的相对压强；(2) 绘制气体为煤气时的各种压强线和 B 点的相对压强。

【解】 (1) 气体为空气时，由气流能量方程求动压

$$12\times 9.8+0=0+\frac{\rho v^2}{2}+9\frac{\rho v^2}{2}$$

得动压

$$\frac{\rho v^2}{2}=11.8\text{N/m}^2$$

压强损失

$$9\frac{\rho v^2}{2}=9\times 11.8=106.2\text{N/m}^2$$

选取零压线 ABC，如图 3-35b，并令它的上方为正。

绘全压线：A 断面全压 $p_{qA}=118\text{N/m}^2$，减去压强损失得 C 断面全压 $p_{qc}=118-106.2=11.8\text{N/m}^2$，将 p_{qA} 和 p_{qc} 按适当比例绘在 a 点和 c 点，用直线连接 ac 得全压线。因无位压，全压线也是总压线。

绘势压线：由势压 $p_s=p_q-\dfrac{\rho v^2}{2}$，在总压线 ac 的基础上向下减去动压 $\dfrac{\rho v^2}{2}$，即作平行于 ac 的直线 $a'c'$，则为势压线。因此时无位压，势压线也是静压线。

管路中点 B 的相对压强，直接由图上线段 Bb' 所表示的压强值求得。它在零压线上方，故 B 点的静压为正。

(2) 气体为燃气时，由能量方程求动压

$$12\times9.8+40(\gamma_a-\gamma)=0+\frac{\rho v^2}{2}+9\frac{\rho v^2}{2}$$

$$118\times158=10\times\frac{\rho v^2}{2}$$

动压 $$\frac{\rho v^2}{2}=27.6\text{N/m}^2$$

压强损失 $$9\frac{\rho v^2}{2}=248.4\text{N/m}^2$$

选取零压线 ABC 如图 3-35c 所示。

绘总压线：A 断面的总压 $p_{zA}=276\text{N/m}^2$，减去压强损失得 C 断面总压 $p_{zc}=276-248=27.6\text{N/m}^2$。按比例绘 a、c 点，用直线连接即得总压线。

绘势压线：由总压线 ac 向下作铅直距离等于动压$\frac{\rho v^2}{2}$的平行线，即得势压线 $a'c'$。

绘位压线：A 断面的位压为 158N/m^2，C 断面位压为零，分别绘出 a''和 c''点。用直线连接 $a''c''$即为位压线。此题中$(\gamma_a-\gamma)$为正，说明位压是由有效浮力的作用，(Z_2-Z_1)为正，说明气流向上流动。气流方向和浮力方向一致，位压为正。位压随断面高程的增加而减小。

图上线段 $b''b'$的距离所代表的压强值即 B 点的静压。B 点的静压位于位压线上方，故中点 B 的静压为正。

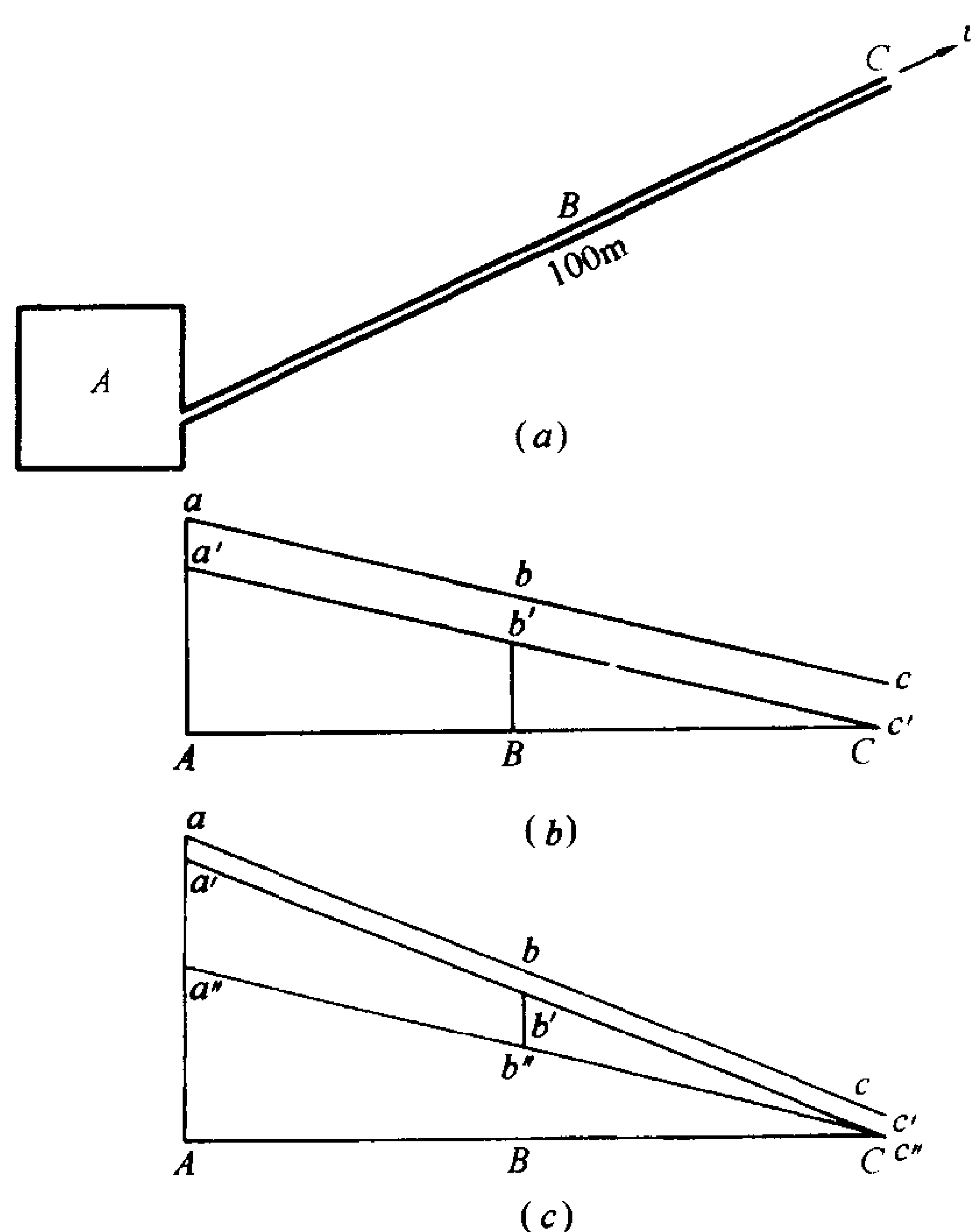


图 3-35 气流的各种压强线

(a)气体的流动；(b)气体为空气；(c)气体为燃气

【例 3-14】 利用例 3-12 的数据(1)绘制气流经过烟囱的总压线、势压线和位压线。(2)求 c 点的总压、势压、静压、全压。

【解】 根据原题的数据：

a 断面位压为 294N/m^2；

ac 段压强损失 $9\frac{\rho v^2}{2}=88.2\text{N/m}^2$；

cd 段压强损失 $20\frac{\rho v^2}{2}=196\text{N/m}^2$；

动压$\frac{\rho v^2}{2}=9.8\text{N/m}^2$

(1) 绘总压线，势压线及位压线

选取 0 压线，标出 a、b、c、d 各点。

a 断面总压为 $p_{za}=294\text{N/m}^2$，以后逐段减损失，绘出总压线 a'-c'-d'。$p_{zc}=294-88.2=205.8\text{N/m}^2$，$p_{zd}=205.8-196=9.8\text{N/m}^2$。

烟囱断面不变，各段势压低于总压的动压值相同，各段势压线与总压线分别平行，出口断面势压为零。绘出势压线 $a''b''c''d$。

a 断面位压为 294N/m^2，从 b 到 c 位压不变。位压值均为 $(\gamma_a-\gamma)\times 45=264.6\text{N/m}^2$，出口位压为零。绘出位压线 $a'b'''c'''d$。

(2) 求 c 点各压强值

总压和势压以零压线为基础量取：

$$p_{zc} = 205.8\text{N/m}^2$$

$$p_{sc} = 196\text{N/m}^2$$

全压、静压的起算点是位压位。从 c 点所对应的位压线上 c''' 到总压线、势压线的铅直线段 $c'''c'$ 及 $c'''c''$ 分别为 c 点的全压和静压值：

$$p_{qc} = -58.8\text{N/m}^2$$

$$p_c = -68.6\text{N/m}^2$$

由图 3-36 中看出，整个烟囱内部都处于负压区。

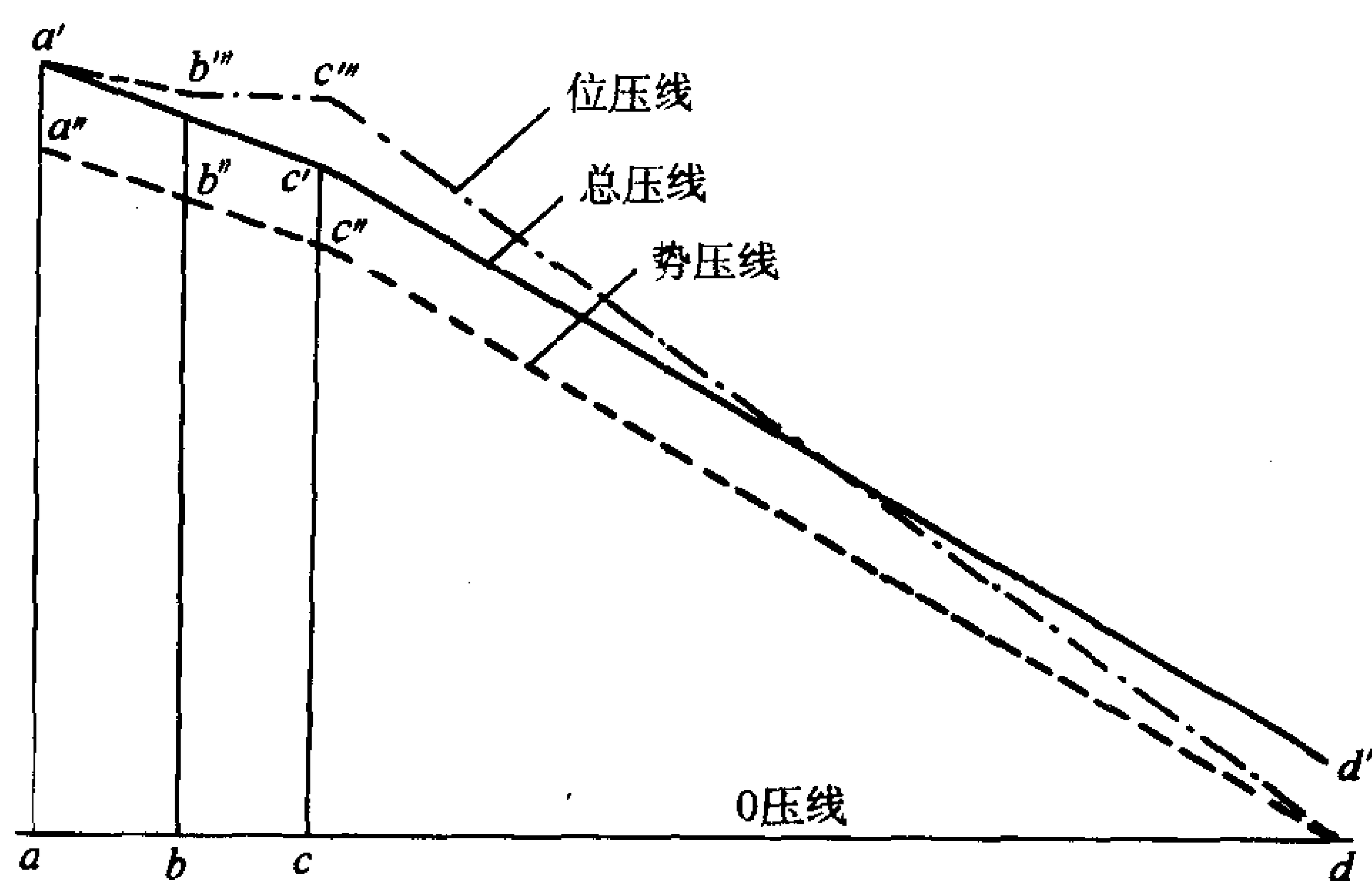


图 3-36 气流经过烟囱的各种压强线

第十三节 恒定流动量方程

前述能量方程和连续性方程的主要作用是解决一元流动的流速或压强。现在我们再提出第三个基本方程，它的主要作用是要解决作用力，特别是流体与固体之间的总作用力，这就是动量方程。

在固体力学中，我们知道，物体质量 m 和速度 v 的乘积 mv 称为物体的动量。作用于物体的所有外力的合力 ΣF 和作用时间 $\mathrm{d}t$ 的乘积 $\Sigma F\cdot\mathrm{d}t$ 称为冲量。动量定律指出，作用于物体的冲量，等于物体的动量增量，即

$$\Sigma\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{v})$$

动量定律是向量方程。为强调用符号→表示向量。

现将此方程用于一元流动。所考察的物质系统取某时刻两断面间的流体，参看图 3-10 和图 3-21，研究流体在 dt 时间内的动量增量和外力的关系。

为此，类似于元流能量方程的推导，在恒定总流中，取 1 和 2 两渐变流断面。两断面间流段 1-2 在 dt 时间后移动至 1′-2′。由于是恒定流，dt 时段前后的动量变化，应为流段新占有的 2-2′体积内的流体所具有的动量减流段退出的 1-1′体积内流体所具有的动量；而 dt 前后流段共有的空间 1′-2 内的流体，尽管不是同一部分流体，但它们在相同点的流速大小和方向相同，密度也未改变，因此，动量也相同。

仍用平均流速的流动模型，则动量增量为

$$
\begin{aligned}
d(m\vec{v}) &= \rho_2 A_2 v_2 \cdot dt \cdot \vec{v}_2 - \rho_1 A_1 v_1 \cdot dt \cdot \vec{v}_1 \\
&= \rho_2 Q_2 dt\, \vec{v}_2 - \rho_1 Q_1 dt\, \vec{v}_1
\end{aligned}
$$

由动量定理，

$$
\Sigma \vec{F} \cdot dt = d(m\vec{v}) = \rho_2 Q_2 dt\, \vec{v}_2 - \rho_1 Q_1 dt\, \vec{v}_1
$$

$$
\Sigma \vec{F} = \rho_2 Q_2 \vec{v}_2 - \rho_1 Q_1 \vec{v}_1
$$

这个方程是以断面各点的流速均等于平均流速这个模型来写出的。实际流速的不均匀分布使上式存在着计算误差，为此，以动量修正系数 α_0 来修正。α_0 定义为实际动量和按照平均流速计算的动量的比值。即

$$
\alpha_0 = \frac{\int_A \rho u^2 dA}{\rho Q v} = \frac{\int_A u^2 dA}{A v^2} \tag{3-13-1}
$$

α_0 取决于断面流速分布的不均匀性。不均匀性越大，α_0 越大。一般取 $\alpha_0 = 1.05 \sim 1.02$，为了简化计算，常取 $\alpha_0 = 1$。考虑了流速的不均匀分布，上式可写为

$$
\Sigma \vec{F} = \alpha_{02} \rho_2 Q_2 \vec{v}_2 - \alpha_{01} \rho_1 Q_1 \vec{v}_1 \tag{3-13-2}
$$

这就是恒定流动量方程。

方程表明，将物质系统的动量定理应用于流体时，动量定理的表述形式之一是：对于恒定流动，所取流体段（简称流段，它由流体构成）的动量在单位时间内的变化，等于单位时间内流出该流段所占空间的流体动量与流进的流体动量之差；该变化率等于流段受到的表面力与质量力之和，即外力之和。

动量定理本身是针对特定的物质系统而言的，是拉格朗日的描述方法，而(3-13-2)式的表述中，“流出”和“流进”的流体不属于同一系统，这种表述是欧拉法的。此外，虽然我们讨论的是一元流动，实际上，这种表述对三元流动同样适用，具有普遍性。

我们将流段占有的空间称为控制体。控制体的一般定义：控制体是根据问题的需要所选择的固定的空间体积。控制体的整个表面称为控制面。图 2-4 中的微小圆柱。图 2-34 中的正六面体和图 3-21 中的总流段 1-2 占有的空间等都是控制体。控制体可以是有限体积，也可以无限小，形状也可各异。实质上，在流体力学中，控制体是在对流动规律的拉格朗日描述转换到欧拉描述时所出现的一个概念，是欧拉法所采用的概念。在今后的章节中，还

将多次用到。

动量方程(3-13-2)式成立的条件是流动恒定，它对不可压缩流体和可压缩流体均适用。对于不可压缩流体，由于 $\rho_1=\rho_2=\rho$ 和连续性方程 $Q_1=Q_2$，其恒定流动量方程为

$$\Sigma \vec{F}=\alpha_{02}\rho Q\vec{v}_2-\alpha_{01}\rho Q\vec{v}_1 \tag{3-13-3}$$

在直角坐标系中的分量式为

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x&=\alpha_{02}\rho Qv_{2x}-\alpha_{01}\rho Qv_{1x}\\ \Sigma F_y&=\alpha_{02}\rho Qv_{2y}-\alpha_{01}\rho Qv_{1y}\\ \Sigma F_z&=\alpha_{02}\rho Qv_{2z}-\alpha_{01}\rho Qv_{1z}\end{aligned}\right\} \tag{3-13-4}$$

通常，在工程上近似取 $\alpha_{01}=\alpha_{02}=1$。

【例 3-15】 水在直径为 10cm 的 60°水平弯管中，以 5m/s 的流速流动(图 3-37)。弯管前端的压强为 0.1at。如不计水头损失，也不考虑重力作用，求水流对弯管 1-2 的作用力。

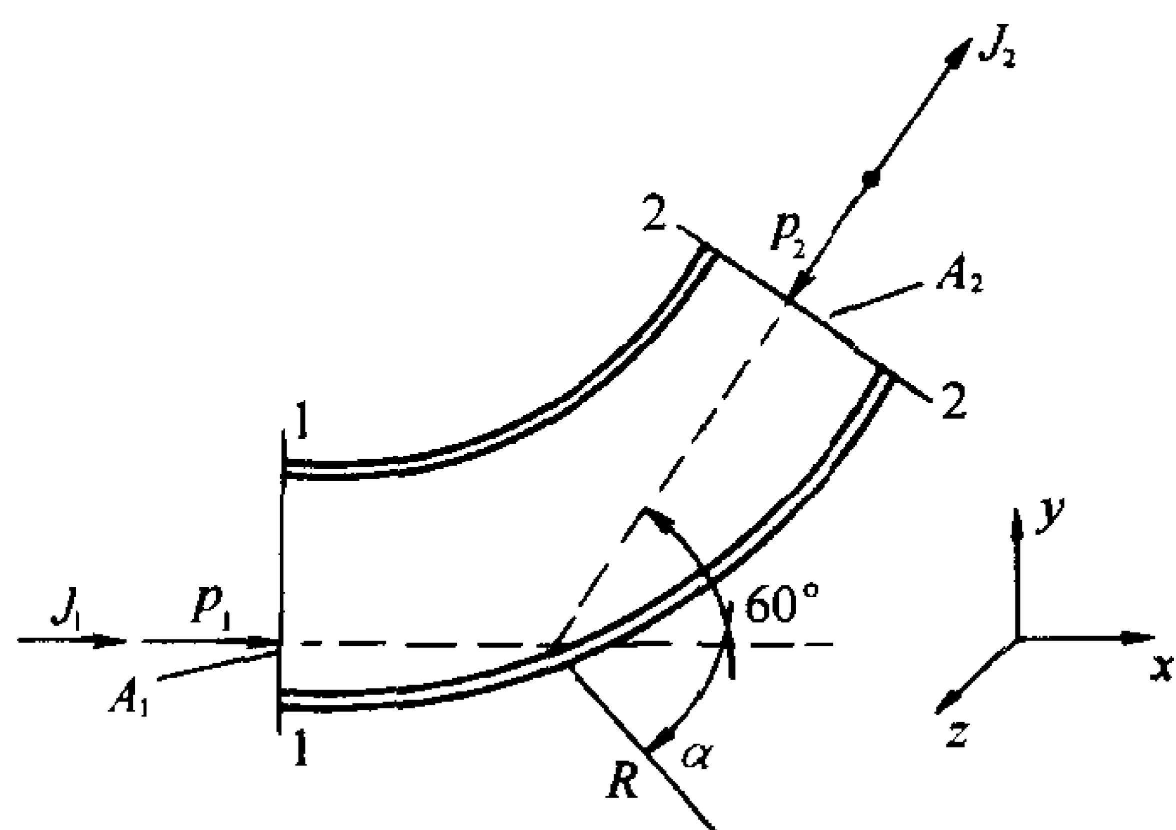


图 3-37 水流对弯管的作用力

【解】

1. 确定控制体。取控制体为 1-2 断面间弯管占有的空间。这样把受流体作用的弯管整个内表面包括在控制面内，又没有其它多余的固壁。

2. 选择坐标系。坐标系选择如图所示。x 轴为弯管进口前管道的轴线，z 轴为垂直方向，x-y 平面为水平面。

3. 流出和流进控制体的动量差。流出：$\rho Q\vec{v}_2$；流进：$\rho Q\vec{v}_1$。动量差：

$$\rho Q(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

由于断面积不变，$v_1=v_2=v=5\text{m/s}$。若断面积变化，求未知流速时，通常要运用连续性方程。

4. 控制体内流体受力分析。由于不考虑重力作用，质量力为零。表面力包括：

断面 1 上：$P_1=p_1A_1$　方向沿 x 轴正向；

断面 2 上：$P_2=p_2A_2$　方向垂直于断面 2，且指向控制体内；

其余表面：$\vec{R}$—弯管内表面对流体的作用力。由于 $\vec{R}$ 的方向未知，应任意假设某方向。不妨设 $\vec{R}$ 在 x-y 平面上的投影方向与 x 轴的夹角为 α。

未知压强 p_2 应根据能量方程

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$

求出。由于 $Z_1=Z_2$，$v_1=v_2=v$，故

$$p_1=p_2=p=9807\text{N/m}^2$$

一般地，求某一未知压强总要用到能量方程。

5. 联立动量方程并求解。根据(3-13-4)式

$$\Sigma F_x=p_1A_1-p_2A_2\cos60^\circ-R\cos\alpha=pA(1-\cos60^\circ)-R\cos\alpha$$

$$= \rho Q(v_{2x} - v_{1x}) = \rho v_1 A_1(v_2\cos60^\circ - v_1)$$
$$= \rho A v^2(\cos60^\circ - 1)$$
$$\Sigma F_y = -p_2A_2\sin60^\circ + R\sin\alpha = -pA\sin60^\circ + R\sin\alpha$$
$$= \rho Q(v_{2y} - v_{1y}) = \rho v A(v_2\sin60^\circ - 0)$$
$$= \rho A v^2\sin60^\circ$$
$$\Sigma F_z = R_z = \rho Q(v_{2z} - v_{1z})$$

也即

$$\begin{cases} pA(1-\cos60^\circ) - R\cos\alpha = \rho A v^2(\cos60^\circ - 1) \\ -pA\sin60^\circ + R\sin\alpha = \rho A v^2\sin60^\circ \\ R_z = \rho Q(v_{2z} - v_{1z}) \end{cases}$$

代入数据：

$$pA = 9807 \times \frac{\pi}{4} \times (0.1)^2 = 77.1\text{N}$$

$$\begin{cases} 77.1 \times (1-\cos60^\circ) - R\cos\alpha \\ \quad = 1000 \times \frac{\pi}{4} \times (0.1)^2 \times 5^2 \times (\cos60^\circ - 1) \\ -77.1\sin60^\circ + R\sin\alpha \\ \quad = 1000 \times \frac{\pi}{4} \times (0.1)^2 \times 5^2\sin60^\circ \\ R_z = 0 \end{cases}$$

联立求解，得

$$R = 272\text{N} \qquad \alpha = 60^\circ \qquad (R_z = 0)$$

6．答案及其分析。由于水流对弯管的作用力与弯管对水流的作用力大小相等方向相反。因此水流对弯管的作用力$\vec{F}$：

$$\vec{F} = -\vec{R}$$

$F = 272\text{N}$ 方向与 $\vec{R}$相反。

作用力 $\vec{F}$位于水平面内，这是由于弯管水平放置且不考虑重力作用所致。$\vec{F}$的大小和方向将对管路构件的承载能力产生影响，这是工程上所关注的。

上例的求解过程说明了运用动量方程的几个主要步骤。运用动量方程(3-13-4)式的注意点是：

1．所选的坐标系必须是惯性坐标系。这是由于牛顿第二定律在惯性坐标系内成立。在求解作相对运动的流动时，应谨慎。例如农田中旋转喷水装置的功率问题。

2．由于方程式是矢量式，应首先选择和在图上标明坐标系。坐标系选择不是唯一的，但应以使计算简便为原则。

3．正确选择控制体。由于动量方程解决的是固体壁面和流体之间相互作用的整体作用力或说作用力之和，因此，应使控制面既包含待求作用力的固壁，又不含其它的未知作用力的固壁。如上例中控制体不能包含弯管之外的直管段。由于往往要用到能量方程，以及

总流动量方程的成立条件，因此，应使控制面上有流体进出的部分处在渐变流段等。

4．必须明确地假定待求的固体壁面对流体的作用力的方向，并用符号表示，如 $\vec{R}$。如果求解结果 R 为负值，则表示实际方向与假设相反。计算时，$\vec{R}$ 也可用分量表示：(R_x, R_y)。

5．注意方程式本身各项的正负及压力和速度在坐标轴上投影的正负。特别是流进动量项。

6．问题往往求的是流体对固体壁面的作用力 $\vec{F}$，因此，最后应明确回答 $\vec{F}$ 的大小和方向。

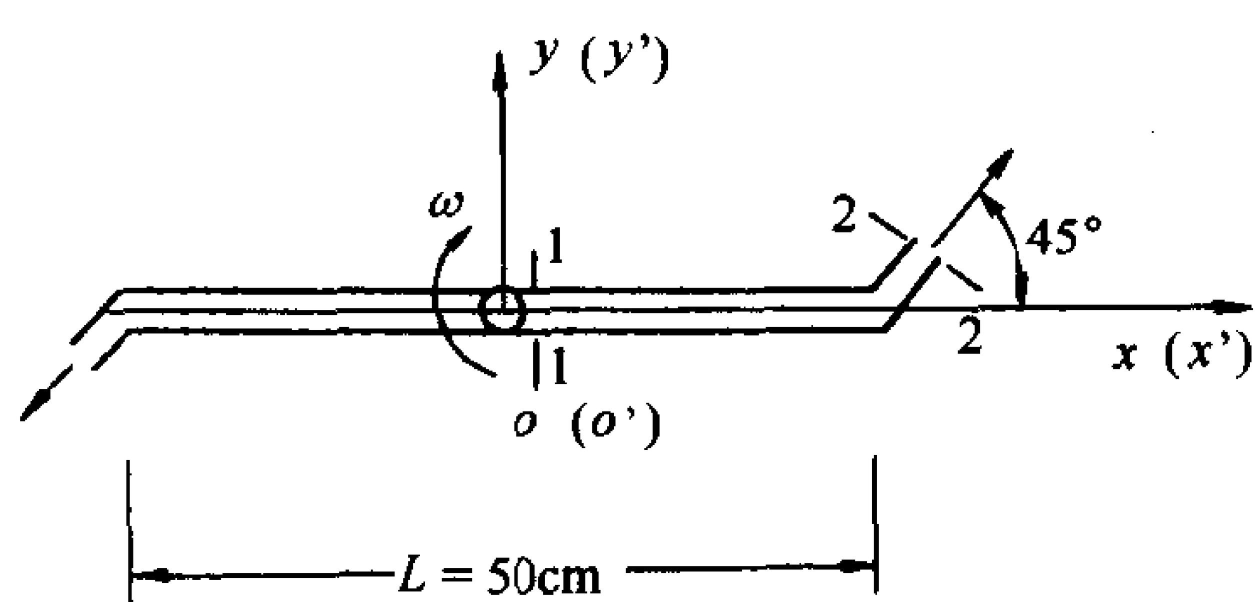


图 3-38

【例 3-16】 图 3-38 为一有对称臂的洒水器，设总体积流量为 $Q=5.6\times10^{-4}\mathrm{m^3/s}$，已知喷嘴面积 $A=0.93\mathrm{cm^2}$，如不计摩擦，求它的转速。

【解】 取控制体如图中断面 1-2 之间的管内空间。

惯性坐标系为 o-xy，动坐标系（非惯性系）o'-$x'y'$ 固联在洒水器上。为便于分析计算，由于洒水器等角速旋转，取两坐标系重合时的位置分析求解。

洒水器内水作相对运动。喷嘴出口相对流速 v_{2r} 的大小为

$$v_{2r}=\frac{Q/2}{A}=\frac{5.6\times10^{-4}/2}{0.93\times10^{-4}}=3.0\mathrm{m/s}$$

牵连速度 v_{2e} 大小为

$$v_{2e}=\omega r_2=\omega\times\frac{50\times10^{-2}}{2}=0.25\omega$$

绝对速度等于相对速度和牵连速度之和。考虑到各速度的方向，喷嘴出口绝对流速 v_2 在 y 坐标轴上的投影为

$$v_{2r}\sin45^\circ-v_{2e}=3.0\sin45^\circ-0.25\omega$$

显然，在断面 1 流进的流体速度沿 x 轴方向。

喷嘴喷水时，对洒水器有反击力的作用。在不计机械摩擦阻力矩的情况下，要维持洒水器等速旋转，此反击力对转轴的矩必须为零。

设洒水器对控制体内流体作用力 R 对转轴的矩为 M。应用动量矩定理，则有

$$M=\rho\frac{Q}{2}(v_{2y}-v_{1y})\frac{L}{2}=\frac{\rho}{4}QLv_{2y}=0$$

得 $$v_{2y}=0$$

即 $$3.0\sin45^\circ-0.25\omega=0$$

解得 $$\omega=8.5\mathrm{rad/s}$$

洒水器转速为

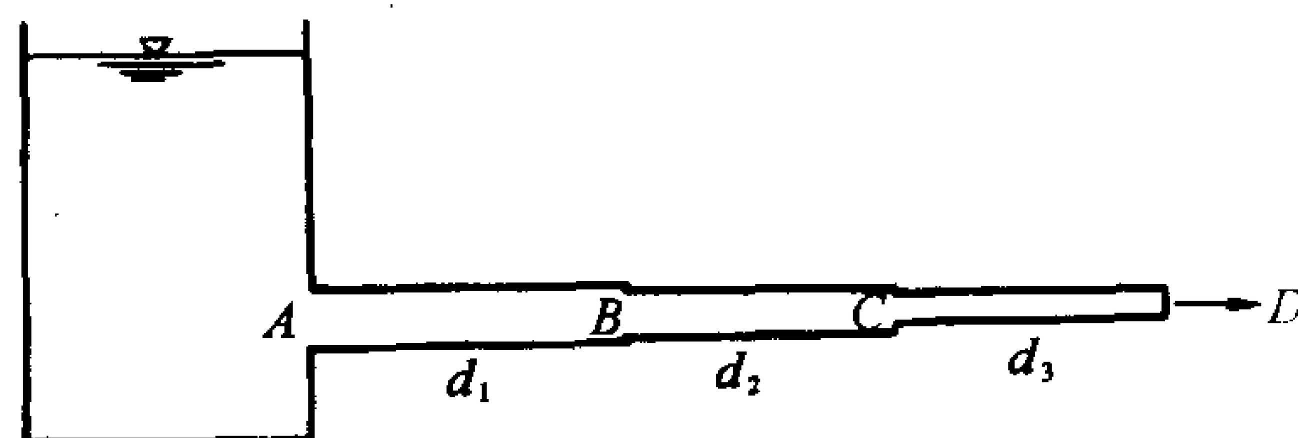
$$n=\frac{\omega}{2\pi}\times60=81\mathrm{r/min}$$

习　题

3-1　直径为 150mm 的给水管道，输水量为 980.7kN/h，试求断面平均流速。

3-2　断面为 300mm×400mm 的矩形风道，风量为 2700m^3/h，求平均流速。如风道出口处断面收缩为 150mm×400mm，求该断面的平均流速。

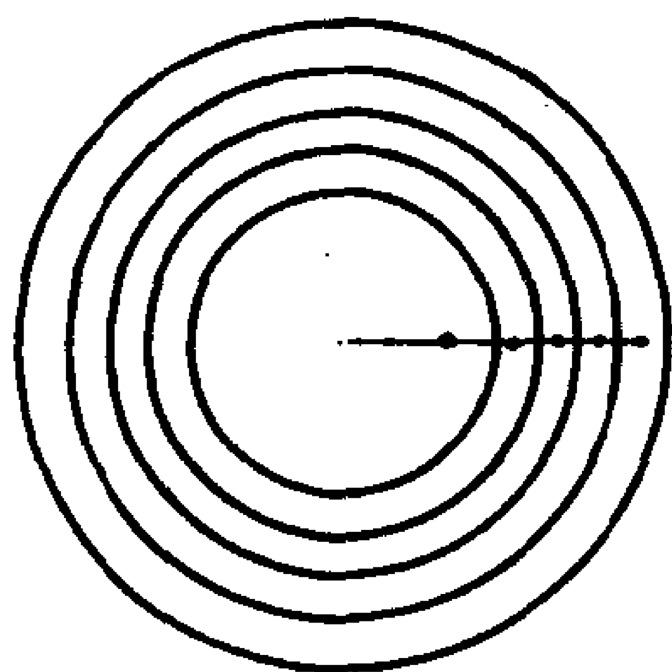
3-3　水从水箱流经直径为 $d_1=10$cm、$d_2=5$cm、$d_3=2.5$cm 的管道流入大气中。当出口流速为 10m/s 时，求(1) 容积流量及质量流量；(2) d_1 及 d_2 管段的流速。



题 3-3　图

3-4　设计输水量为 2942.1kg/h 的给水管道，流速限制在 0.9～1.4m/s 之间。试确定管道直径，根据所选直径求流速，直径规定为 50mm 的倍数。

3-5　圆形风道，流量为 10000m^3/h，流速不超过 20m/s。试设计直径，根据所定直径求流速。直径应当是 50mm 的倍数。



题 3-6　图

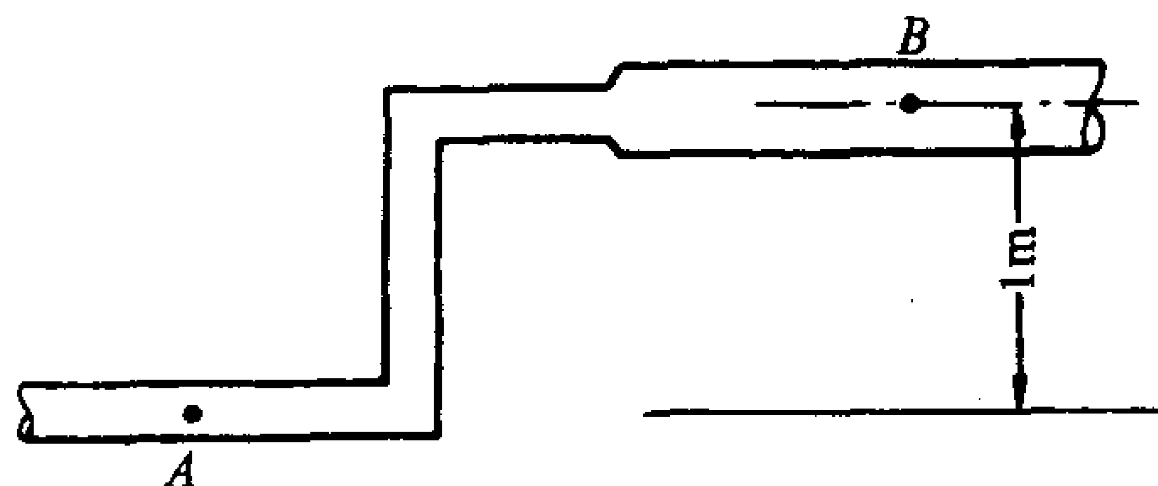
3-6　在直径为 d 的圆形风道断面上，用下法选定五个点，以测局部风速。设想用和管轴同心但不同半径的圆周，将全部断面分为中间是圆，其它是圆环的五个面积相等的部分。测点即位于等分此部分面积的圆周上，这样测得的各点流速，分别代表相应断面的平均流速。(1) 试计算各测点到管心的距离，表为直径的倍数。(2) 若各点流速为 u_1、u_2、u_3、u_4、u_5，空气密度为 ρ，求质量流量 G。

3-7　某蒸汽干管的始端蒸汽流速为 25m/s，密度为 2.62kg/m^3。干管前段直径为 50mm，接出直径 40mm 支管后，干管后段直径改为 45mm。如果支管末端密度降低至 2.30kg/m^3，干管后段末端密度降低至 2.24kg/m^3，但两管质量流量相等，求两管末端流速。

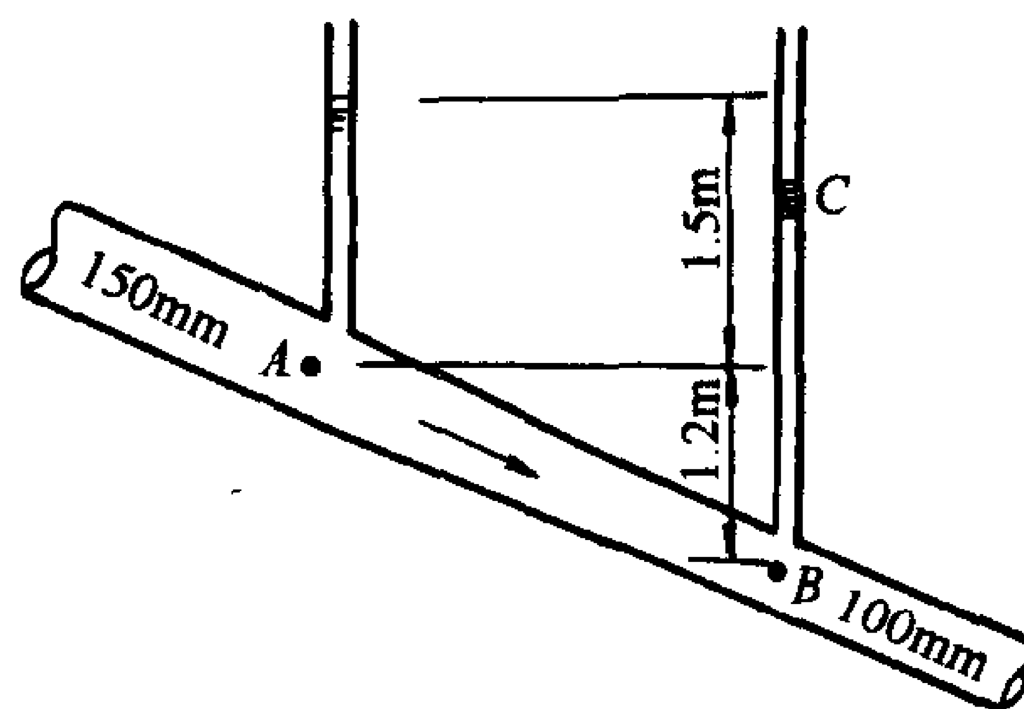
3-8　空气流速由超音流过渡到亚音流时，要经过冲击波。如果在冲击波前，风道中速度 $v=660$m/s，密度 $\rho=1$kg/m^3。冲击波后，速度降低至 $v=250$m/s。求冲击波后的密度。

3-9　管路由不同直径的两管前后相连接所组成，小管直径 $d_A=0.2$m，大管直径 $d_B=0.4$m。水在管中流动时，A 点压强 $P_A=70$kN/m^2，B 点压强 $P_B=40$kN/m^2，B 点流速 $V_B=1$m/s。试判断水在管中流动方向。并计算水流经两断面间的水头损失。

3-10　油沿管线流动，A 断面流速为 2m/s，不计损失，求开口 C 管中的液面高度。



题 3-9　图

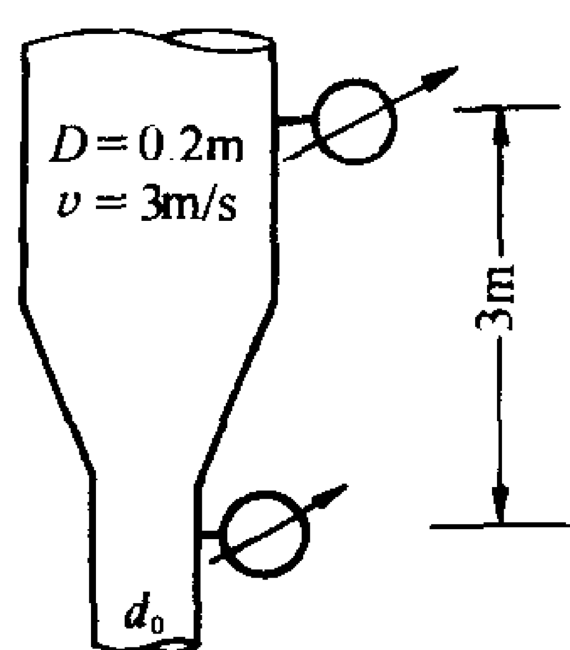


题 3-10　图

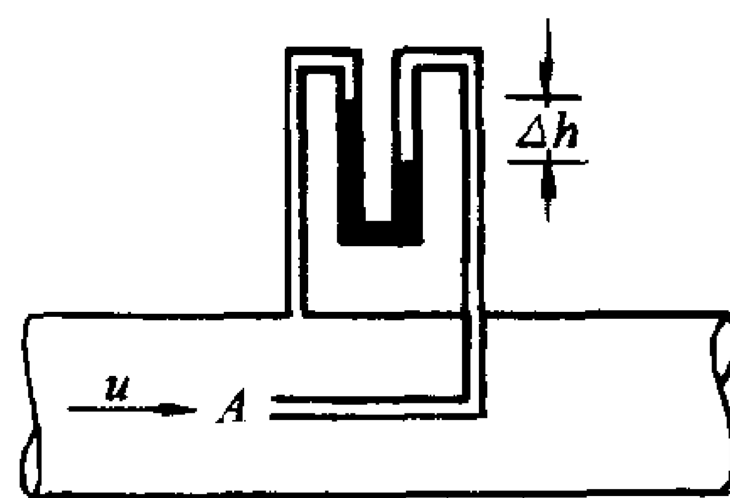
3-11　水沿管线下流，若压力计的读数相同，求需要的小管直径 d_0，不计损失。

3-12　用水银比压计量测管中水流，过流断面中点流速 u 如图。测得 A 点的比压计读数 $\Delta h=60$mm

汞柱。(1) 求该点的流速 u;(2) 若管中流体是密度为 0.8g/cm^3 的油,Δh 仍不变,该点流速为若干,不计损失。



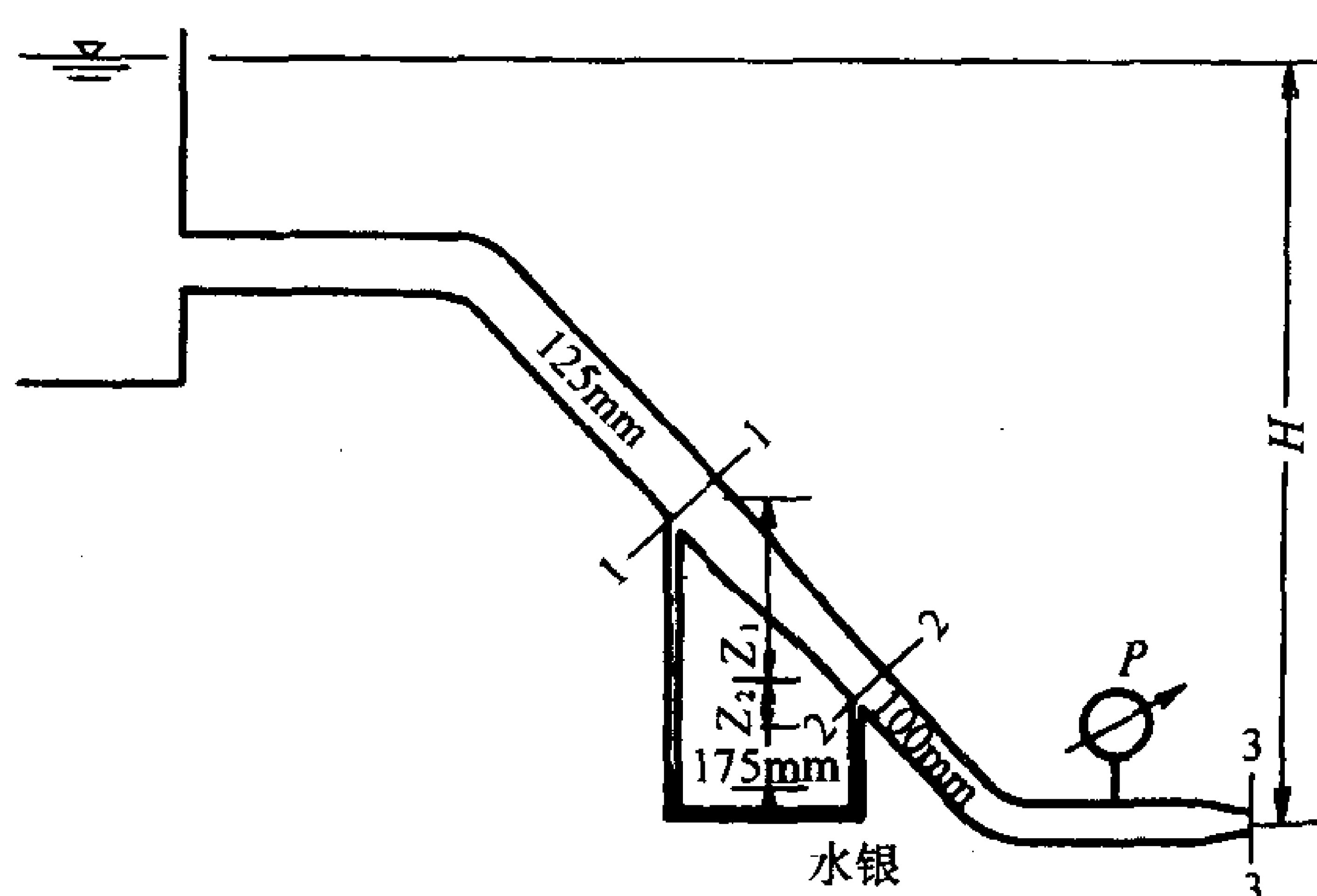
题 3-11 图



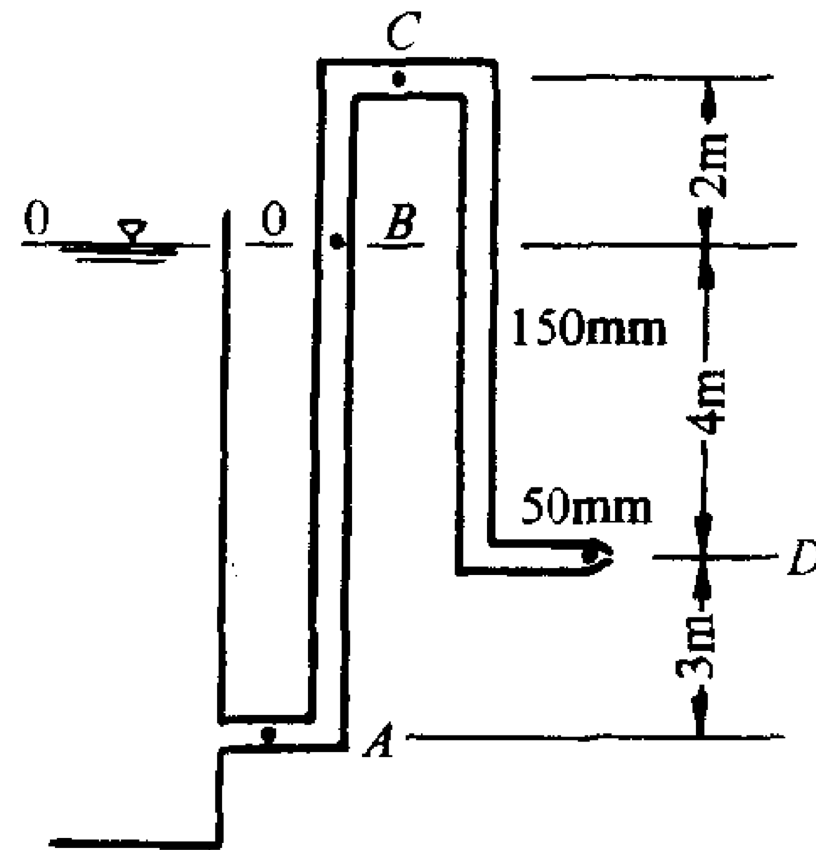
题 3-12 图

3-13 水由图中喷嘴流出,管嘴出口 $d=75\text{mm}$,不考虑损失,计算 H 值以 m 计,p 值以 kN/m^2 计。

3-14 计算管线流量,管出口 $d=50\text{mm}$,求出 A、B、C、D 各点的压强,不计水头损失。



题 3-13 图

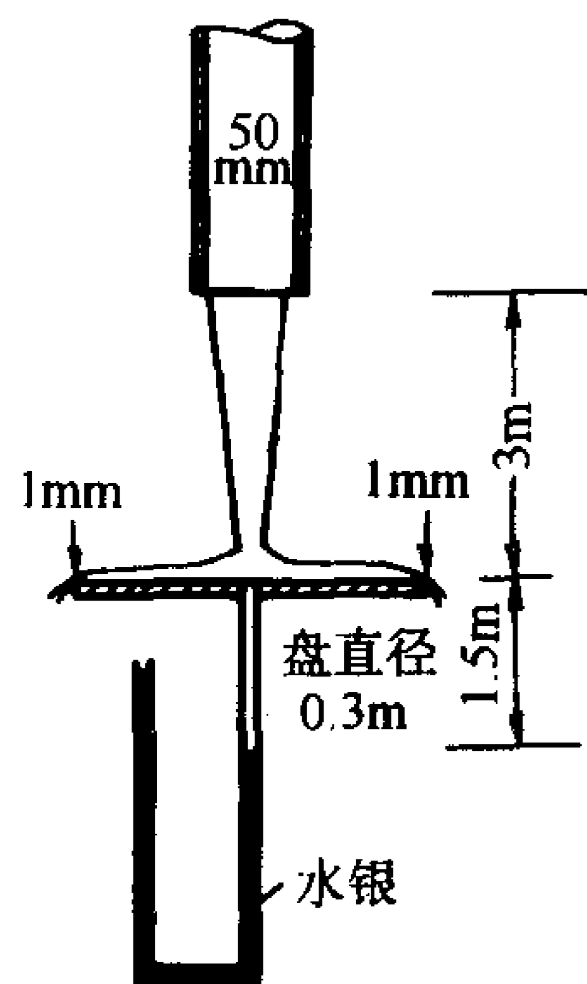


题 3-14 图

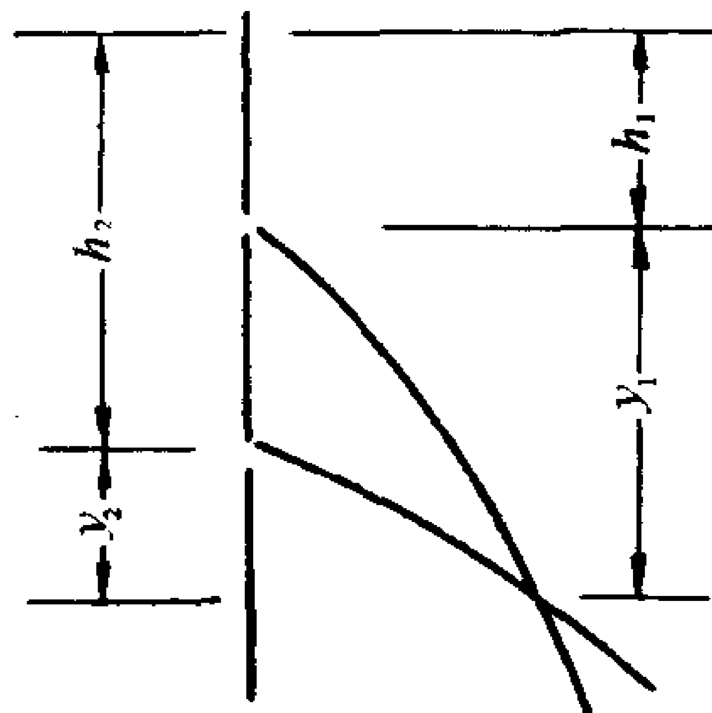
3-15 水由管中铅直流出,求流量及测压计读数。水流无损失。

3-16 同一水箱上、下两孔口出流,求证:在射流交点处,$h_1y_1=h_2y_2$。

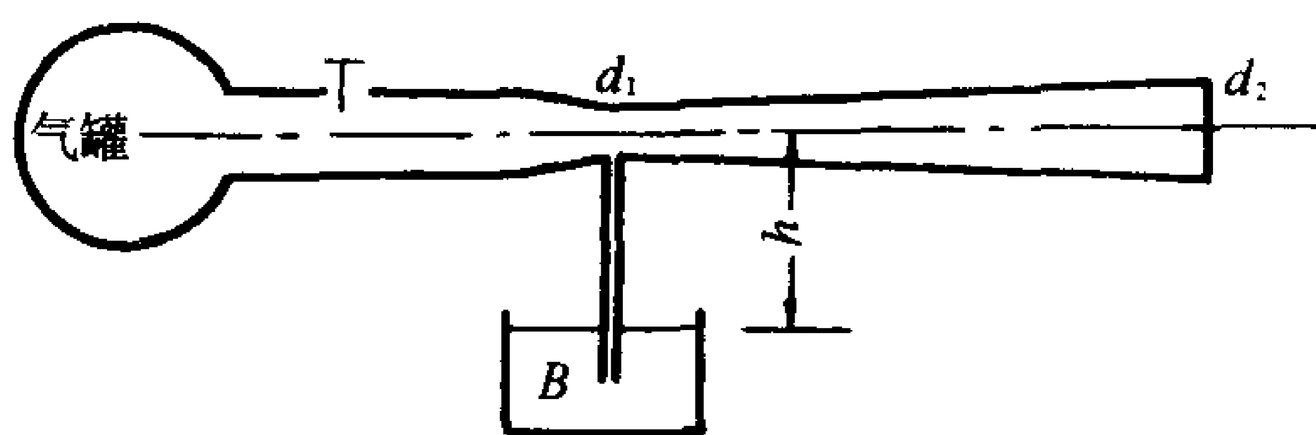
3-17 一压缩空气罐与文丘里式的引射管连接,d_1,d_2,h 均为已知,问气罐压强 p_0 多大方才能将 B 池水抽出。



题 3-15 图



题 3-16 图



题 3-17 图

3-18 如图,闸门关闭时的压力表读数为 49kN/m^2,闸门打开后,压力表读数为 0.98kN/m^2,由管进口到闸门的水头损失为 1m,求管中的平均流速。

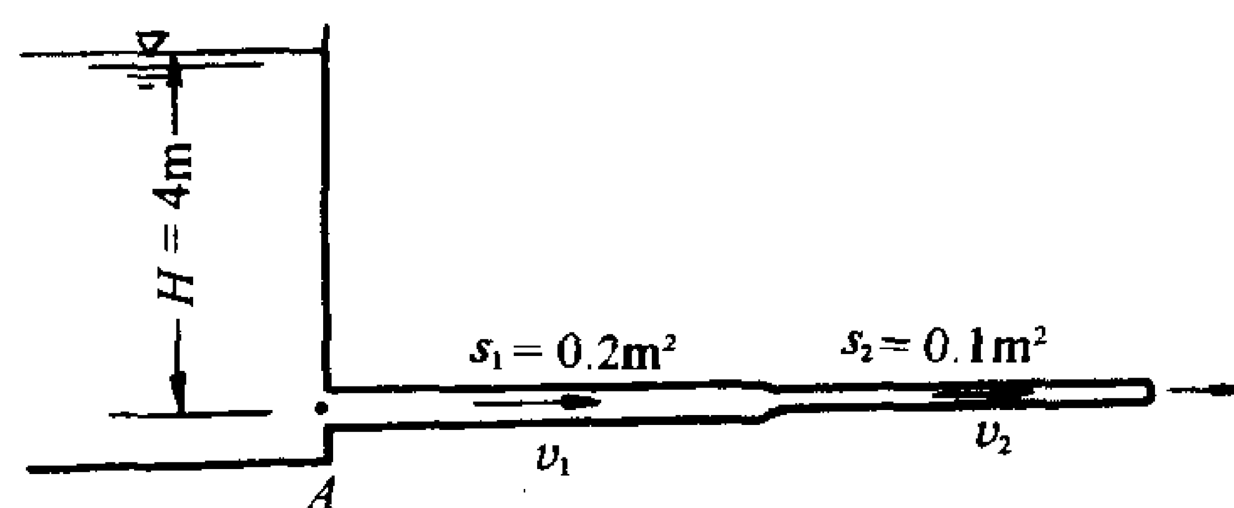
3-19 由断面为 0.2m^2 和 0.1m^2 的两根管子所组成的水平输水管系从水箱流入大气中:(1) 若不计损

失,(*a*) 求断面流速 v_1 和 v_2;(*b*) 绘总水头线及测压管水头线;(*c*) 求进口 *A* 点的压强。

(2) 计入损失:第一段为 $4\dfrac{v_1^2}{2g}$,第二段为 $3\dfrac{v_2^2}{2g}$,(*a*)求断面流速 v_1 及 v_2;(*b*)绘总水头线及测压管水头线;(*c*)根据水头线求各段中间的压强,不计局部损失。



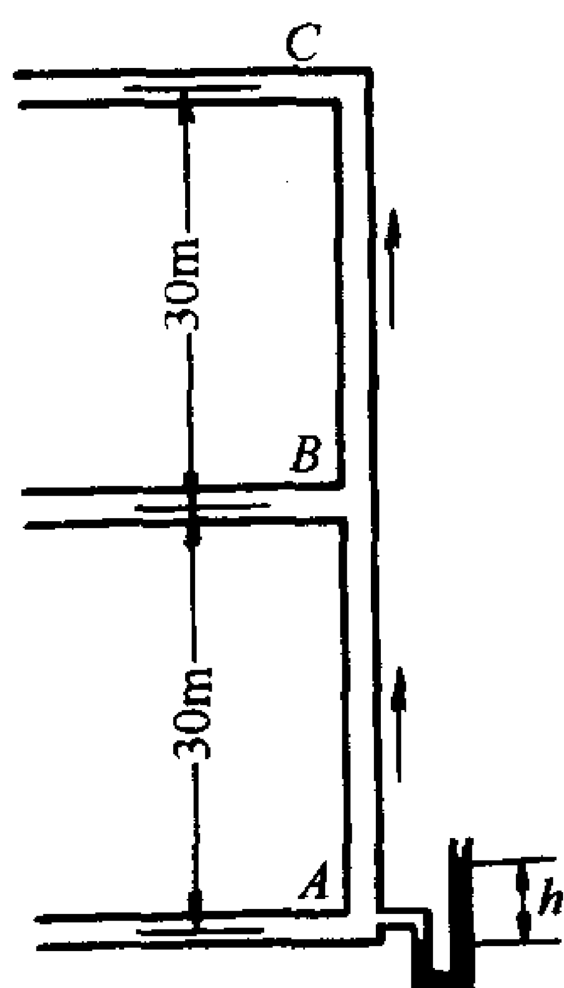
题 3-18 图



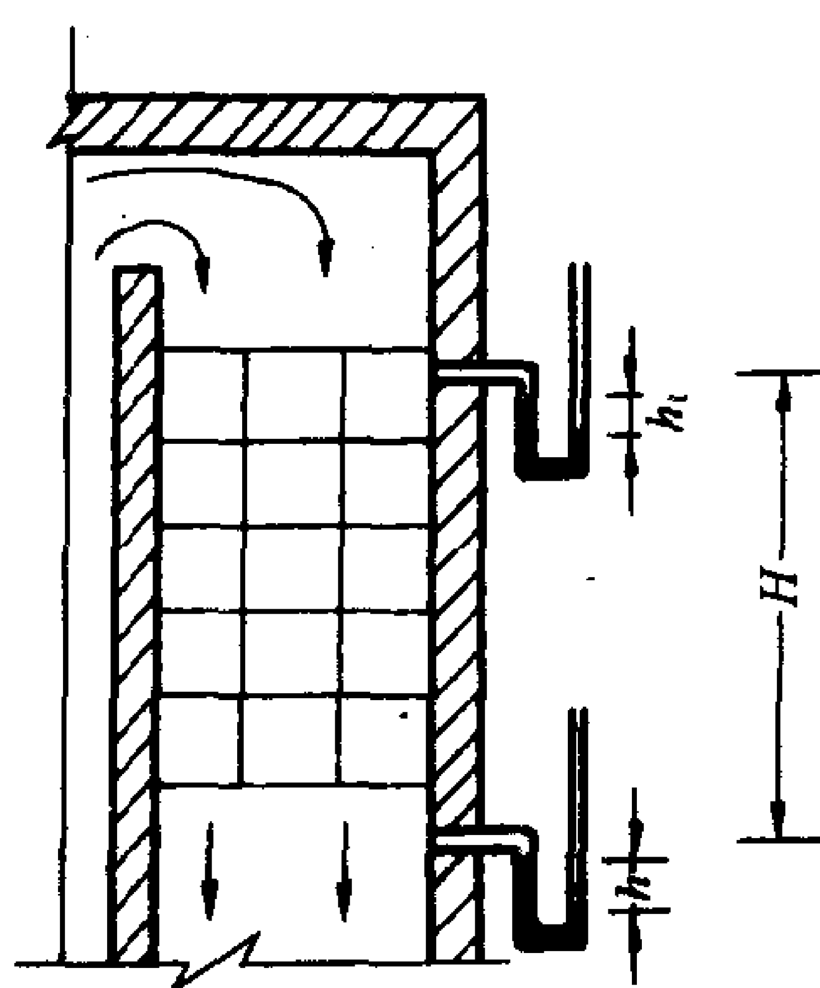
题 3-19 图

3-20 高层楼房煤气立管 *B*、*C* 两个供煤气点各供应 $Q=0.02\text{m}^3/\text{s}$ 的煤气量。假设煤气的密度为 0.6kg/m^3,管径为 50mm,压强损失 *AB* 段用 $3\rho\dfrac{v_1^2}{2}$ 计算,*BC* 用 $4\rho\dfrac{v_2^2}{2}$ 计算,假定 *C* 点要求保持余压为 300N/m^2,求 *A* 点酒精($\gamma_{酒}=7.9\text{kN/m}^3$)液面应有的高差(空气密度为 1.2kg/m^3)。

3-21 锅炉省煤器的进口处测得烟气负压 $h_1=10.5\text{mmH}_2\text{O}$,出口负压 $h_2=20\text{mmH}_2\text{O}$。如炉外空气 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$,烟气的平均 $\rho'=0.6\text{kg/m}^3$,两测压断面高差 $H=5\text{m}$,试求烟气通过省煤器的压强损失。



题 3-20 图

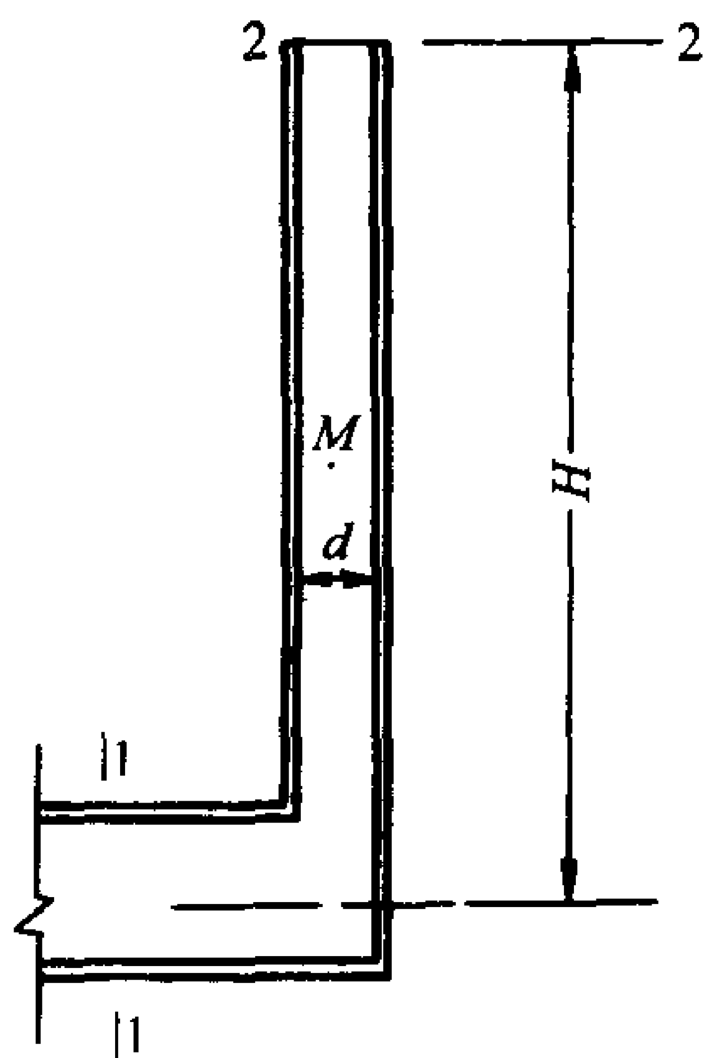


题 3-21 图

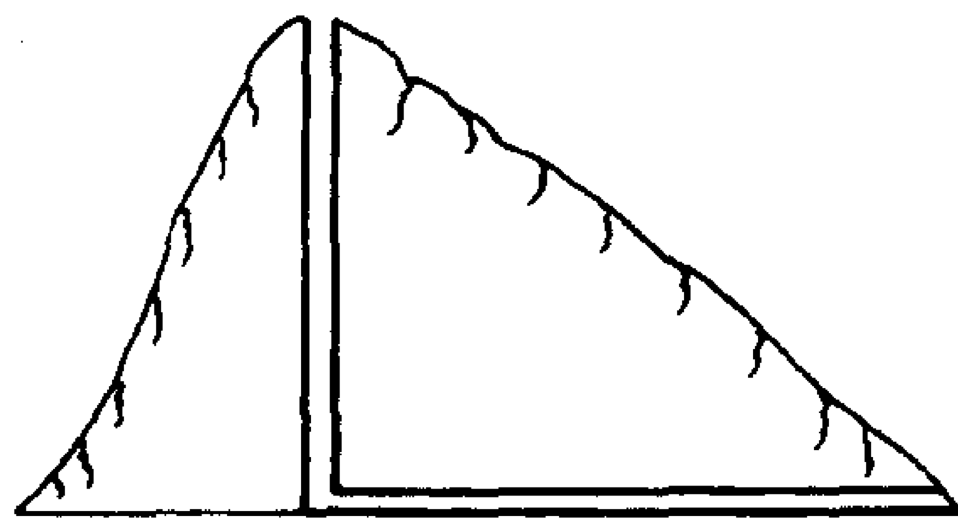
3-22 烟囱直径 $d=1\text{m}$,通过烟气量 $G=176.2\text{kN/h}$,烟气密度 $\rho=0.7\text{kg/m}^3$,周围气体的密度 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$,烟囱压强损失用 $p_1=0.035\dfrac{H}{d}\dfrac{v^2}{2g}\gamma$ 计算,要保证底部(1 断面)负压不小于 $10\text{mmH}_2\text{O}$,烟囱高度至少应为多少? 求 $\dfrac{H}{2}$ 高度上的压强,绘烟囱全高程 1-*M*-2 的压强分布。计算时设 1-1 断面流速很低,忽略不计。

3-23 图为矿井竖井和横向坑道相连,竖井高为 200m,坑道长 300m,坑道和竖洞内气温保持恒定 $t=15℃$,密度 $\rho=1.18\text{kg/m}^3$,坑外气温在清晨为 5℃,$\rho_0=1.29\text{kg/m}^3$,中午为 20℃,$\rho=1.16\text{kg/m}^3$,问早午空气的气流流向及气流速度 *v* 的大小。假定总的损失 $9\gamma\dfrac{v^2}{2g}$。

3-24 图为一水平风管,空气自断面 1-1 流向断面 2-2,已知断面 1-1 的压强 $p_1=150\text{mmH}_2\text{O}$,$v_1=15\text{m/s}$,断面 2-2 的压强 $p_2=140\text{mmH}_2\text{O}$,$v_2=10\text{m/s}$,空气密度 $\rho=1.29\text{kg/m}^3$,求两断面的压强损失。

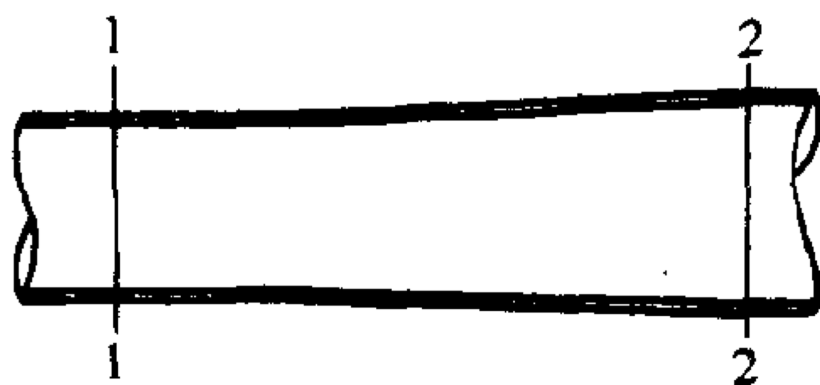


题 3-22 图

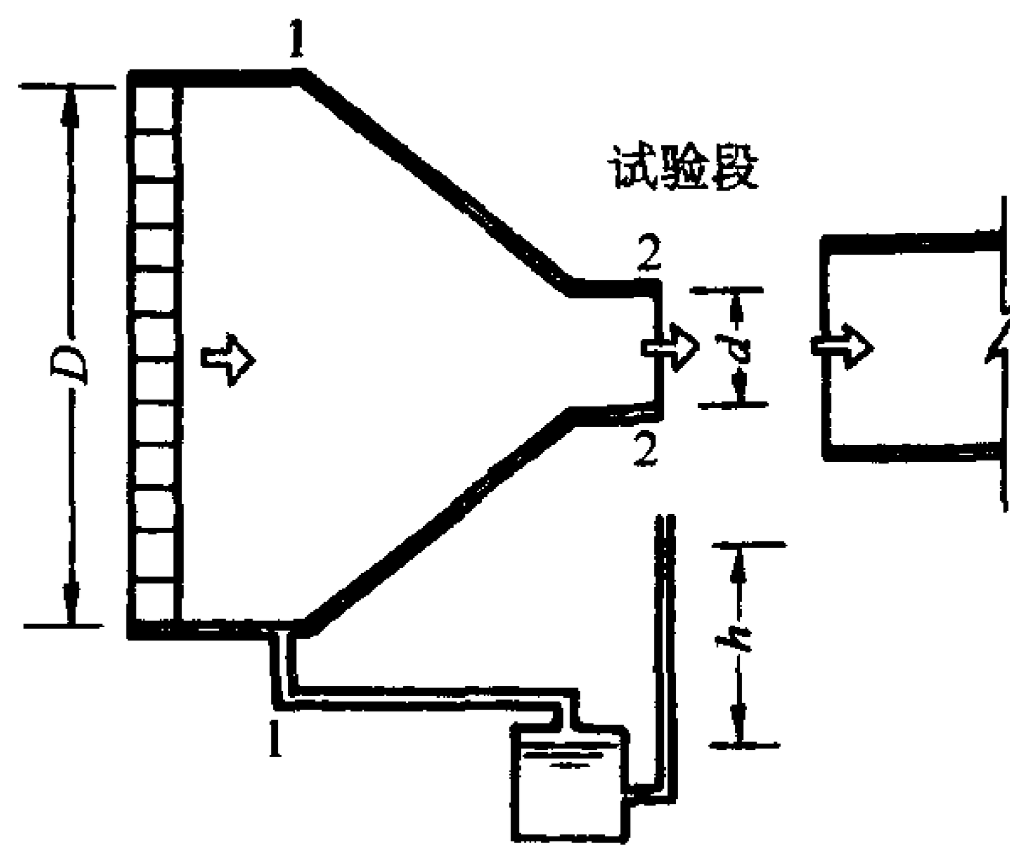


题 3-23 图

3-25 图为开式试验段风洞，射流喷口直径 $d=1\text{m}$，若在直径 $D=4\text{m}$ 的进风口壁侧装测压管，其读数为 $h=64\text{mmH}_2\text{O}$，空气密度 $\rho=1.29\text{kg/m}^3$，不计损失，求喷口风速。

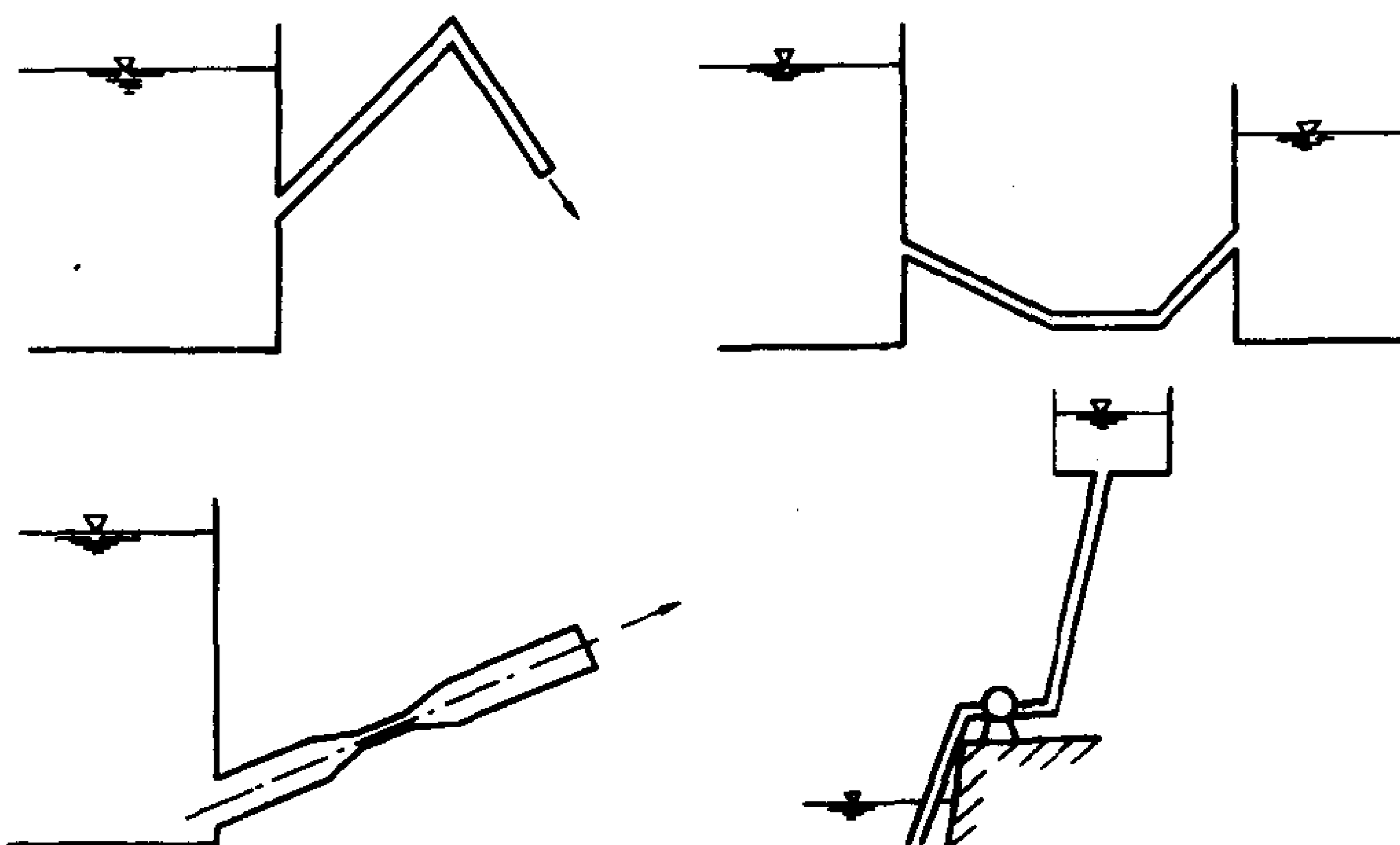


题 3-24 图



题 3-25 图

3-26 定性绘制图中管路系统的总水头线和测压管水头线。



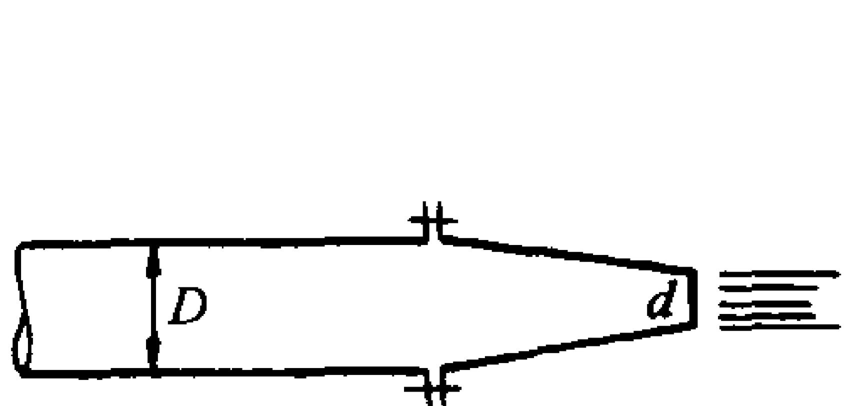
题 3-26 图

3-27 利用 3-20 题的数据绘制煤气立管 ABC 的各种压强线。

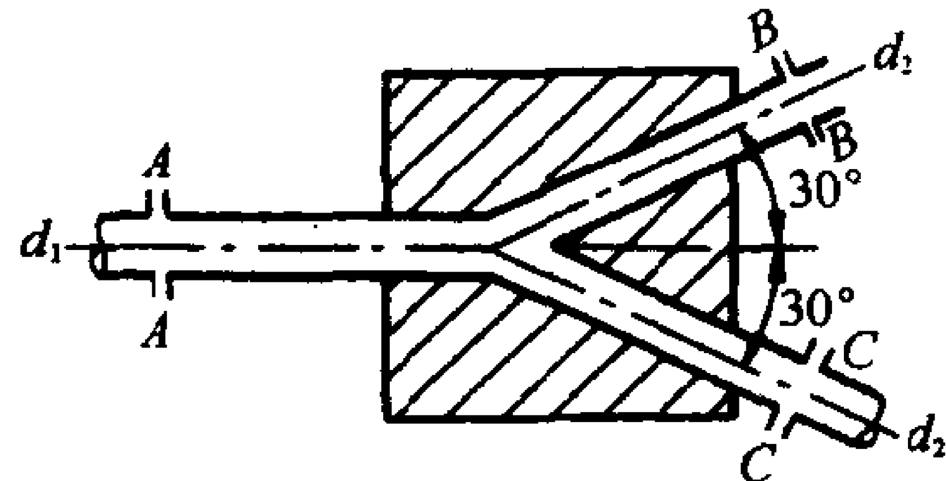
3-28 高压管末端的喷嘴如图，出口直径 $d=10\text{cm}$，管端直径 $D=40\text{cm}$，流量 $Q=0.4\text{m}^3/\text{s}$，喷嘴和管以法兰盘连接，共用 12 个螺栓，不计水和管嘴的重量，求每个螺栓受力多少？

3-29　直径为 $d_1=700\text{mm}$ 的管道在支承水平面上分支为 $d_2=500\text{mm}$ 的两支管，A-A 断面压强为 70kN/m^2，管道流量 $Q=0.6\text{m}^3/\text{s}$，两支管流量相等：(1)不计水头损失，求支墩受水平推力。(2)水头损失为支管流速水头的5倍，求支墩受水平推力。不考虑螺栓连接的作用。

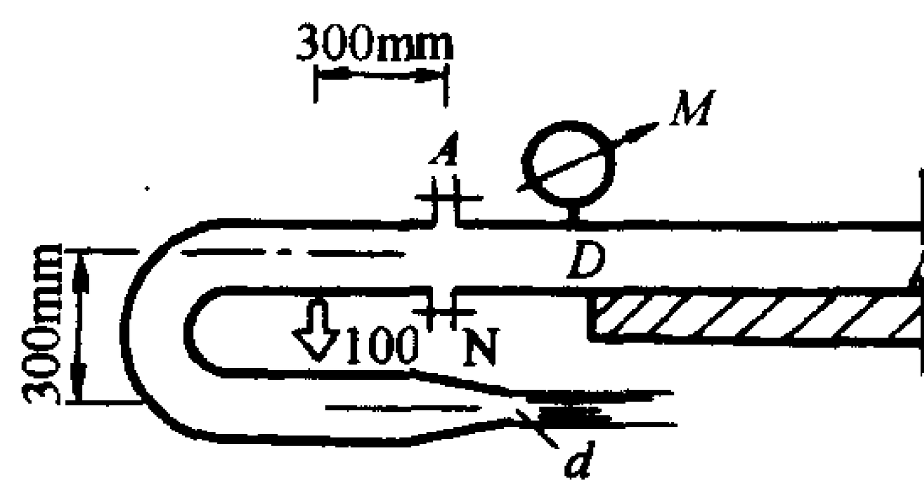
3-30　水流经180°弯管自喷嘴流出，如管径 $D=75\text{mm}$，喷嘴直径 $d=25\text{mm}$，管道前端的测压表读数 $M=60\text{kN/m}^2$，求法兰盘接头 A 处，上、下螺栓的受力情况。假定螺栓上下前后共安装四个，上下螺栓中心距离为150mm，弯管喷嘴和水重为100N，作用位置如图。



题 3-28　图



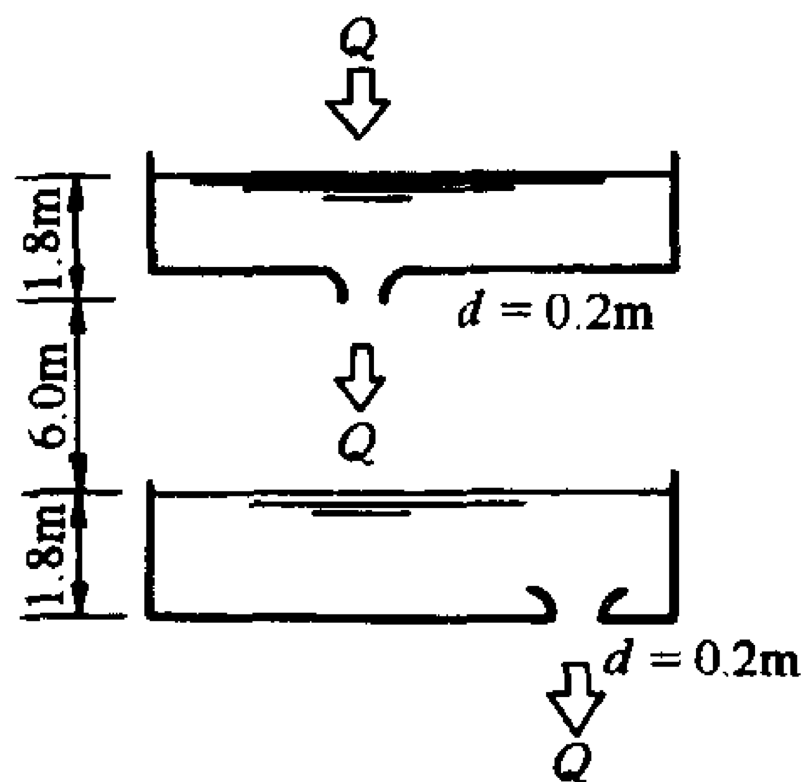
题 3-29　图



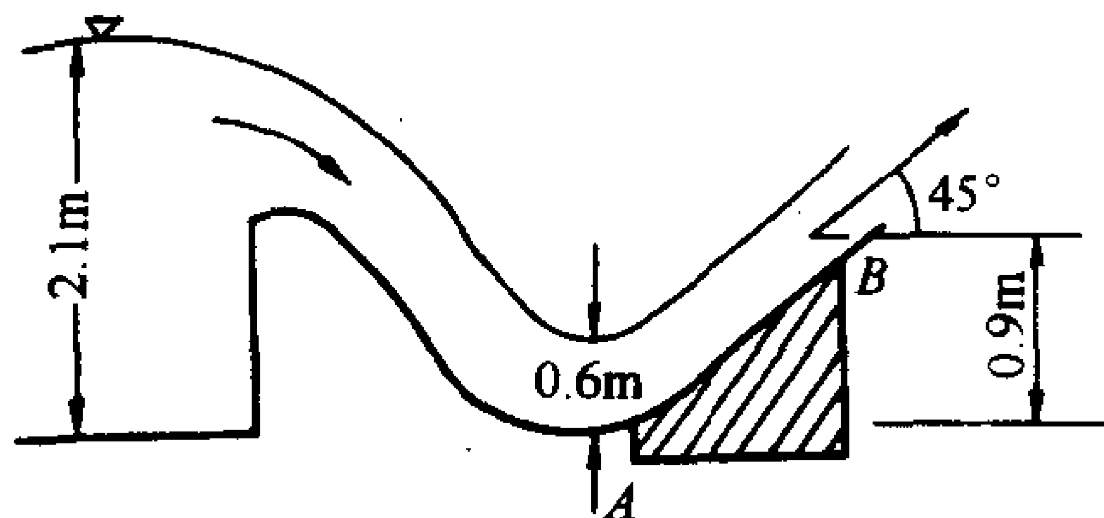
题 3-30　图

3-31　下部水箱重224N，其中盛水重897N，如果此箱放在秤台上，受如图的恒定流作用。问秤的读数是多少？

3-32　求水流对1m宽的挑流坎 AB 作用的水平分力和铅直分力。假定 A、B 两断面间水重为2.69kN，而且断面 B 流出的流动可以认为是自由射流。



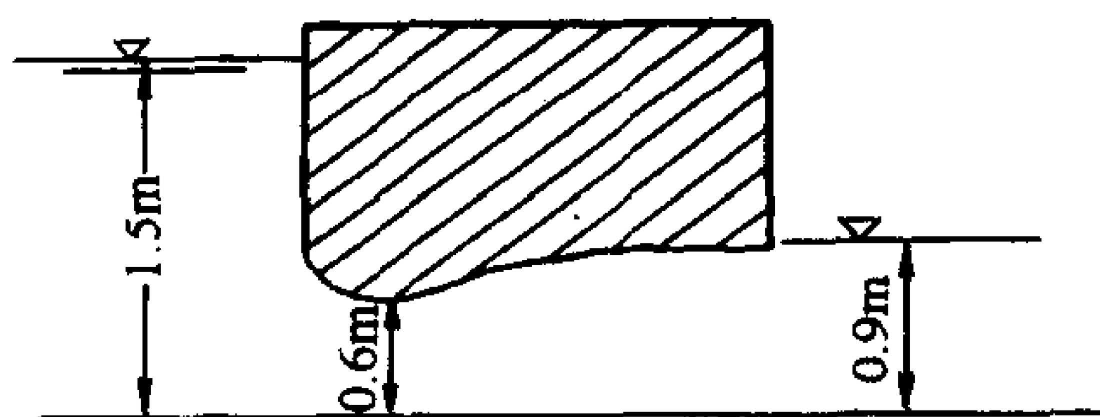
题 3-31　图



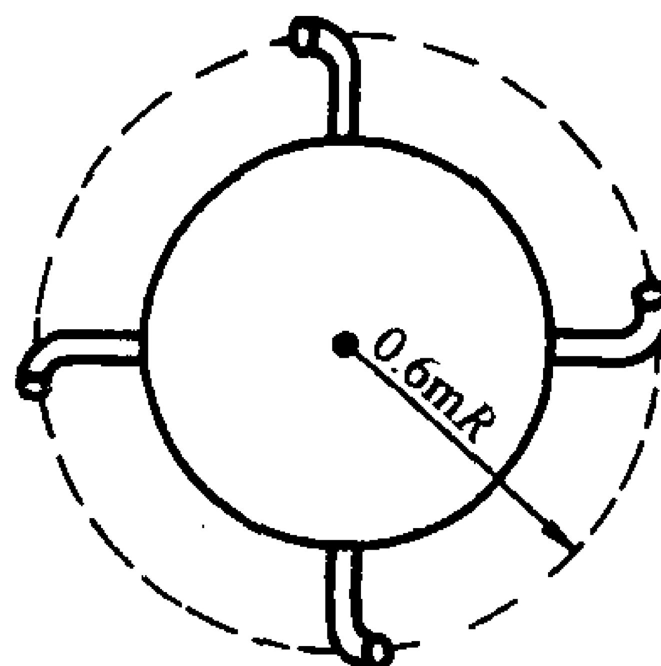
题 3-32　图

3-33　水流垂直于纸面的宽度为1.2m，求它对建筑物的水平作用力。

3-34　喷嘴直径25mm，每个喷嘴流量为7l/s，若涡轮以100r/min旋转，计算它的功率。



题 3-33　图



题 3-34　图

3-35　已知平面流动的速度分量为：

$$u_x=\frac{-\Gamma y}{2\pi(x^2+y^2)},u_y=\frac{\Gamma x}{2\pi(x^2+y^2)}$$

式中 Γ 为常数，求流线方程并画出若干条流线。

3-36　已知平面流动的速度分量为：

$$u_x=x+t^2,u_y=-y+t^2$$

试求：$t=0$ 和 $t=1$ 时，过 $M(1,1)$ 点的流线方程。

第四章　流动阻力和能量损失

为了运用能量方程式确定流动过程中流体所具有的能量变化，或者说，确定各断面上位能、压力能和动能之间的关系以及计算为流动应提供的动力等，都需要解决能量损失项的计算问题。能量损失的计算是专业中重要的计算问题之一。

不可压缩流体在流动过程中，流体之间因相对运动切应力的作功，以及流体与固壁之间摩擦力的作功，都是靠损失流体自身所具有的机械能来补偿的。这部分能量均不可逆转地转化为热能。这种引起流动能量损失的阻力与流体的粘滞性和惯性，与固壁对流体的阻滞作用和扰动作用有关。因此，为了得到能量损失的规律，必须同时分析各种阻力的特性，研究壁面特征的影响，以及产生各种阻力的机理。

能量损失一般有两种表示方法：对于液体，通常用单位重量流体的能量损失（或称水头损失）h_l 来表示，其因次为长度；对于气体，则常用单位体积内的流体的能量损失（或称压强损失）p_l 来表示，其因次与压强的因次相同。它们之间的关系是：

$$p_l = \gamma h_l$$

第一节　沿程损失和局部损失

在工程的设计计算中，根据流体接触的边壁沿程是否变化，把能量损失分为两类：沿程损失 h_f 和局部损失 h_m。它们的计算方法和损失机理不同。

一、流动阻力和能量损失的分类

在边壁沿程不变的管段上（如图 4-1 中的 ab、bc、cd 段），流动阻力沿程也基本不变，称

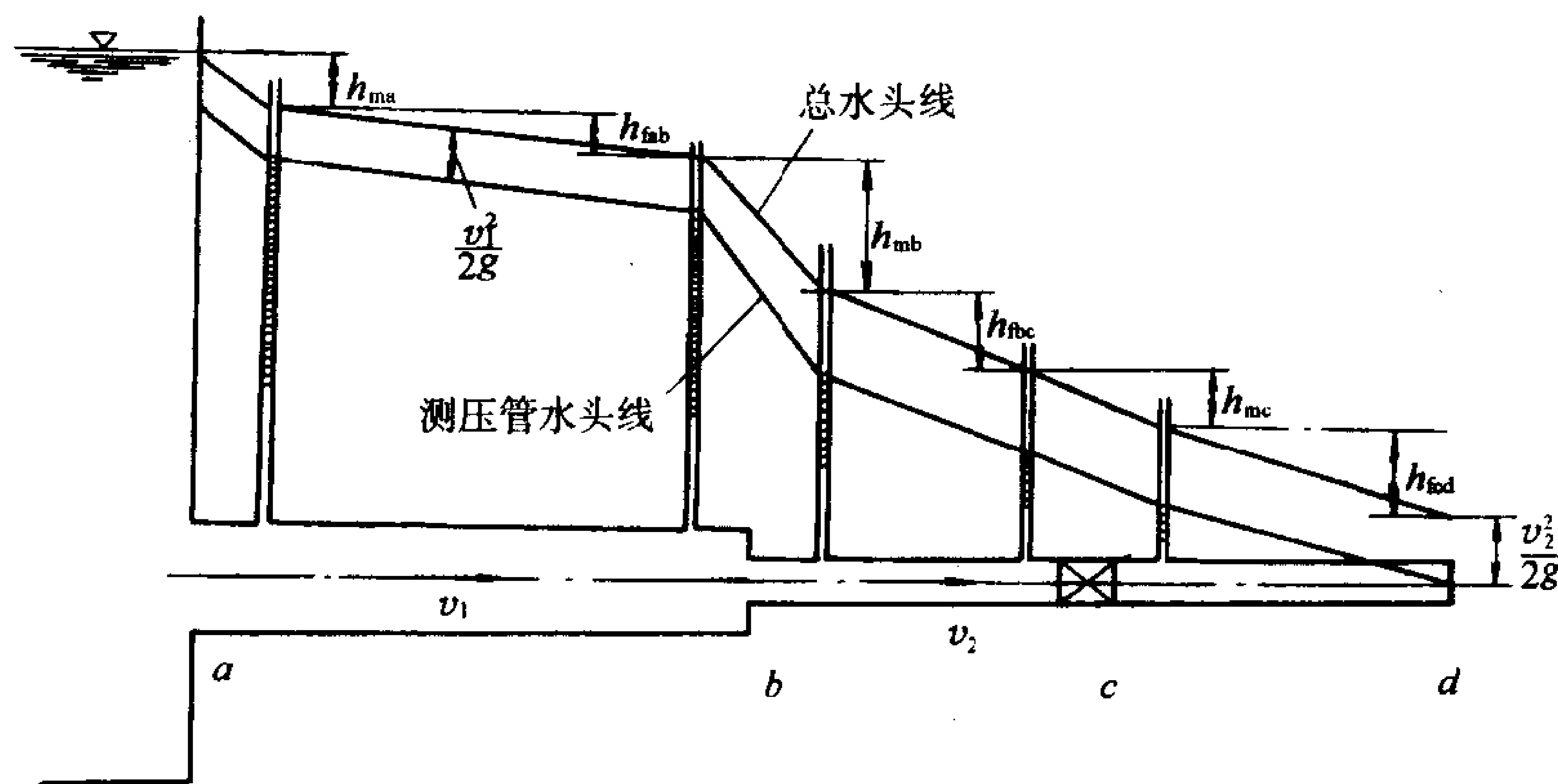


图 4-1　沿程阻力与沿程损失

这类阻力为沿程阻力。克服沿程阻力引起的能量损失称为沿程损失。图中的 h_{fab}，h_{fbc}，h_{fcd} 就是 ab、bc、cd 段的损失——沿程损失。由于沿程损失沿管段均布，即与管段的长度成正比，所以也称为长度损失。

在边界急剧变化的区域，阻力主要地集中在该区域内及其附近，这种集中分布的阻力称为局部阻力。克服局部阻力的能量损失称为局部损失。例如图4-1中的管道进口、变径管和阀门等处，都会产生局部阻力。h_{ma}，h_{mb}，h_{mc}就是相应的局部水头损失。引起局部阻力的原因是由于旋涡区的产生和速度方向和大小的变化。

整个管路的能量损失等于各管段的沿程损失和各局部损失的总和。即

$$h_l = \Sigma h_f + \Sigma h_m$$

对于图4-1所示流动系统，能量损失为

$$h_l = h_{fab} + h_{fbc} + h_{fcd} + h_{ma} + h_{mb} + h_{mc}$$

二、能量损失的计算公式

能量损失计算公式用水头损失表达时，为

沿程水头损失：

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{4-1-1}$$

局部水头损失：

$$h_m = \zeta \frac{v^2}{2g} \tag{4-1-2}$$

用压强损失表达，则为

$$p_f = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho v^2}{2} \tag{4-1-3}$$

$$p_m = \zeta \frac{\rho v^2}{2} \tag{4-1-4}$$

式中　l——管长；

d——管径；

v——断面平均流速；

g——重力加速度；

λ——沿程阻力系数；

ζ——局部阻力系数。

这些公式是长期工程实践的经验总结，其核心问题是各种流动条件下无因次系数λ和ζ的计算，除了少数简单情况，主要是用经验或半经验的方法获得的。从应用角度而言，本章的主要内容就是沿程阻力系数λ和局部阻力系数ζ的计算，这也是本章内容的主线。

第二节　层流与紊流、雷诺数

从19世纪初期起，通过实验研究和工程实践，人们注意到流体运动有两种结构不同的流动状态，能量损失的规律与流态密切相关。

一、两种流态

1883年英国物理学家雷诺在与图4-2类似的装置上进行了实验。

试验时，水箱A内水位保持不变，阀门C用于调节流量，容器D内盛有容重与水相近的颜色水，经细管E流入玻璃管B，阀门F用于控制颜色水流量。

当管 B 内流速较小时，管内颜色水成一股细直的流束，这表明各液层间毫不相混。这种分层有规则的流动状态称为层流。如图 4-2(a)所示。当阀门 C 逐渐开大流速增加到某一临界流速 v_k' 时，颜色水出现摆动，如图 4-2(b)所示。继续增大流速，则颜色水迅速与周围清水相混，如图 4-2(c)所示。这表明液体质点的运动轨迹是极不规则的，各部分流体互相剧烈掺混，这种流动状态称为紊流。

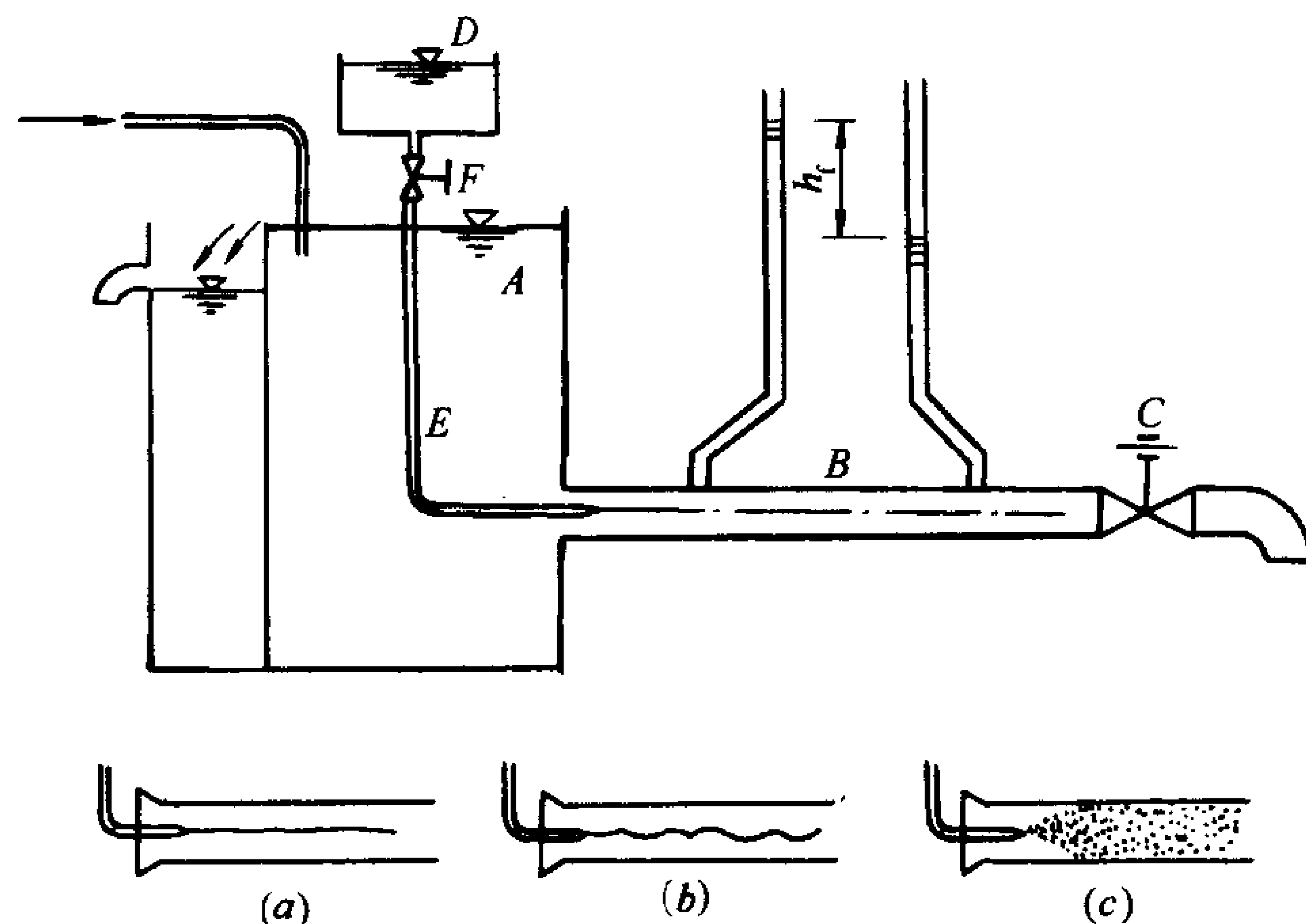


图 4-2　流态试验装置

若实验时的流速由大变小，则上述观察到的流动现象以相反程序重演，但由紊流转变为层流的临界流速 v_k 小于由层流转变为紊流的临界流速 v_k'。称 v_k' 为上临界流速，v_k 为下临界流速。

实验进一步表明：对于特定的流动装置上临界流速 v_k' 是不固定的，随着流动的起始条件和实验条件的扰动程度不同，v_k' 值可以有很大的差异；但是下临界流速 v_k 却是不变的。在实际工程中，扰动普遍存在，上临界流速没有实际意义。以后所指的临界流速即是下临界流速。

在管 B 的断面 1、2 处加接两根测压管，根据能量方程，测压管的液面差即是 1、2 断面间的沿程水头损失。用阀门 C 调节流量，通过流量测量就可以得到沿程水头损失与平均流速的关系曲线 h_f-v。如图 4-3 所示。

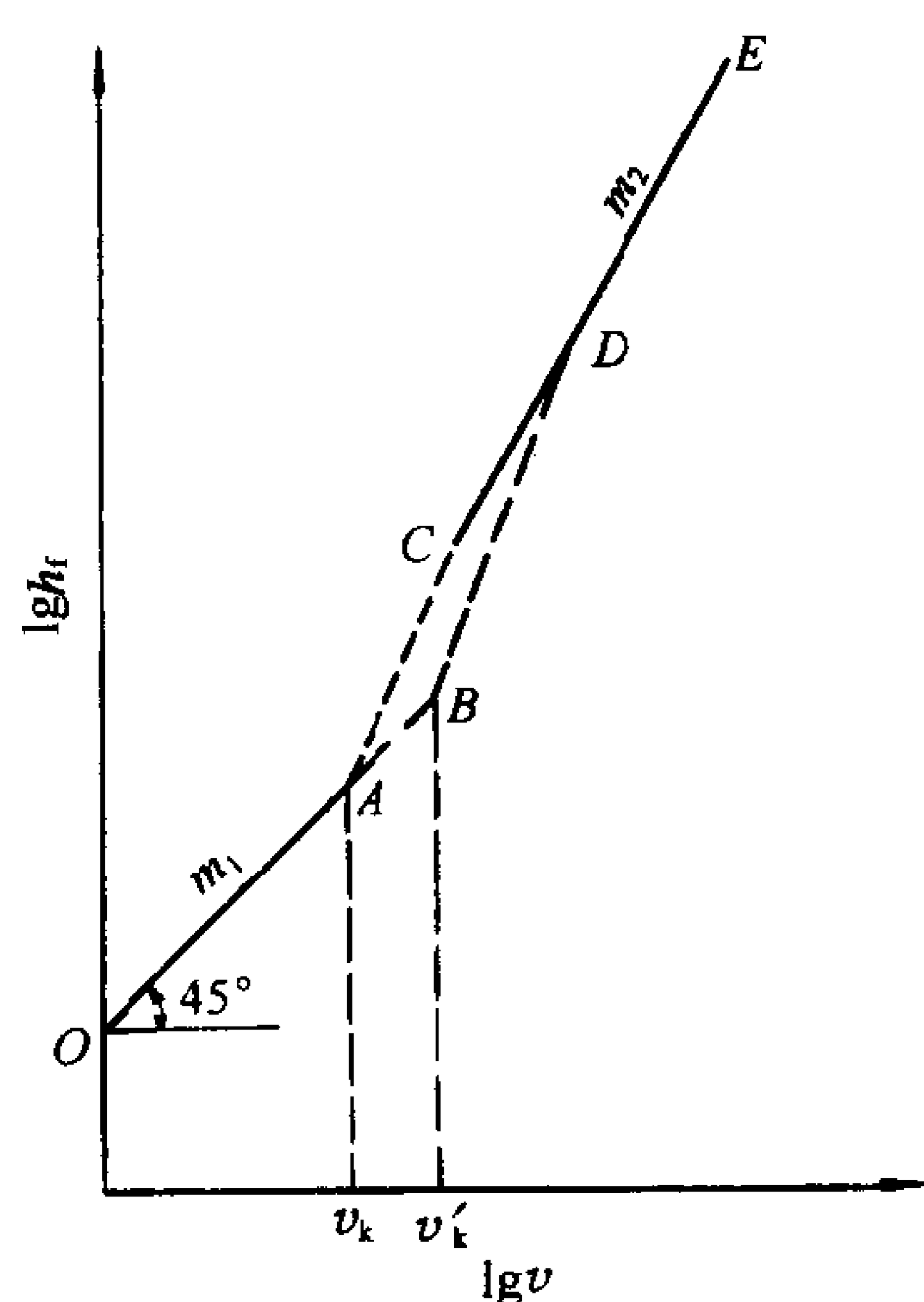


图 4-3　h_f-v 关系图

实验曲线 $OABDE$ 在流速由小变大时获得；而流速由大变小时的实验曲线是 $EDCAO$。其中 AD 部分不重合。图中 B 点对应的流速即上临界流速，A 点对应的是下临界流速。AC 段和 BD 段试验点分布比较散乱，是流态不稳定的过渡区域。

此外，由图 4-3 可分析得

$$h_f = Kv^m$$

流速小时即 OA 段，$m=1$，$h_f = Kv^{1.0}$，沿程损失和流速一次方成正比。流速较大时，在 CDE 段，$m=1.75\sim2.0$，$h_f = Kv^{1.75\sim2.0}$。线段 AC 或 BD 的斜率均大于 2。

二、流态的判别准则——临界雷诺数

上述实验观察到了两种不同的流态，以及在管 B 管径

和流动介质-清水不变的条件下得到流态与流速有关的结论。雷诺等人进一步的实验表明：流动状态不仅和流速 v 有关，还和管径 d、流体的动力粘滞系数 μ 和密度 ρ 有关。

以上四个参数可组合成一个无因次数，叫做雷诺数，用 Re 表示。

$$\mathrm{Re}=vd\rho/\mu=vd/\nu \tag{4-2-1}$$

对应于临界流速的雷诺数称临界雷诺数，用 $\mathrm{Re_K}$ 表示。实验表明：尽管当管径或流动介质不同时，临界流速 v_K 不同，但对于任何管径和任何牛顿流体，判别流态的临界雷诺数却是相同的，其值约为 2000。即

$$\mathrm{Re_K}=v_K d/\nu=2000 \tag{4-2-2}$$

Re 在 2000～4000 是由层流向紊流转变的过渡区，相当于图 4-3 上的 AC 段。工程上为简便起见，假设当 $\mathrm{Re}>\mathrm{Re_K}$ 时，流动处于紊流状态，这样，流态的判别条件是

层流：
$$\mathrm{Re}=vd/\nu<2000 \tag{4-2-3}$$

紊流：
$$\mathrm{Re}=vd/\nu>2000 \tag{4-2-4}$$

要强调指出的是临界雷诺数值 $\mathrm{Re_K}=2000$，是仅就圆管而言的，对于诸如平板绕流和厂房内气流等边壁形状不同的流动，具有不同的临界雷诺数值。

【例 4-1】 有一管径 $d=25\mathrm{mm}$ 的室内上水管，如管中流速 $v=1.0\mathrm{m/s}$，水温 $t=10℃$。

(1) 试判别管中水的流态；

(2) 管内保持层流状态的最大流速为多少？

【解】 (1) 10℃时水的运动粘滞系数 $\nu=1.31\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$

管内雷诺数为

$$\mathrm{Re}=\frac{vd}{\nu}=\frac{1.0\times0.025}{1.31\times10^{-6}}=19100>2000$$

故管中水流为紊流。

(2) 保持层流的最大流速就是临界流速 v_K。

由于
$$\mathrm{Re}=\frac{v_K d}{\nu}=2000$$

所以
$$v_K=\frac{2000\times1.31\times10^{-6}}{0.025}=0.105\mathrm{m/s}$$

【例 4-2】 某低速送风管道，直径 $d=200\mathrm{mm}$，风速 $v=3.0\mathrm{m/s}$，空气温度是 30℃。

(1) 试判断风道内气体的流态。

(2) 该风道的临界流速是多少？

【解】 (1) 30℃空气的运动粘滞系数 $\nu=16.6\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，管中雷诺数为

$$\mathrm{Re}=\frac{vd}{\nu}=\frac{3\times0.2}{16.6\times10^{-6}}=36150>2000$$

故为紊流。

(2) 求临界流速 v_K

$$v_K=\frac{\mathrm{Re_K}\nu}{d}=\frac{2000\times16.6\times10^{-6}}{0.2}=0.166\mathrm{m/s}$$

从以上两例题可见，水和空气管路一般均为紊流。

【例 4-3】 某户内煤气管道，用具前支管管径 $d=15\mathrm{mm}$，煤气流量 $Q=2\mathrm{m^3/h}$，煤气的运动粘滞系数 $\nu=26.3\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$。试判别该煤气支管内的流态。

【解】 管内煤气流速

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{2}{3600\times0.785\times(0.015)^2}=3.15\text{m/s}$$

雷诺数为

$$\text{Re}=\frac{vd}{\nu}=\frac{3.15\times0.015}{26.3\times10^{-6}}=1797<2000$$

故管中为层流。这说明某些户内管流也可能出现层流状态。

三、流态分析

层流和紊流的根本区别在于层流各流层间互不掺混，只存在粘性引起的各流层间的滑动摩擦阻力；紊流时则有大小不等的涡体动荡于各流层间。除了粘性阻力，还存在着由于质点掺混，互相碰撞所造成的惯性阻力。因此，紊流阻力比层流阻力大得多。

层流到紊流的转变是与涡体的产生联系在一起的。图 4-4 绘出了涡体产生的过程。

设流体原来作直线层流运动。由于某种原因的干扰，流层发生波动（图 4-4*a*）。于是在波峰一侧断面受到压缩，流速增大，压强降低；在波谷一侧由于过流断面增大，流速减小，压强增大。因此流层受到图 4-4*b* 中箭头所示的压差作用。这将使波动进一步加大（图 4-4*c*），终于发展成涡体。涡体形成后，由于其一侧的旋转切线速度与流动方向一致，故流速较大，压强较小。而另一侧旋转切线速度与流动方向相反，流速较小，压强较大。于是涡体在其两侧压差作用下，将由一层转到另一层（图 4-4*d*），这就是紊流掺混的原因。

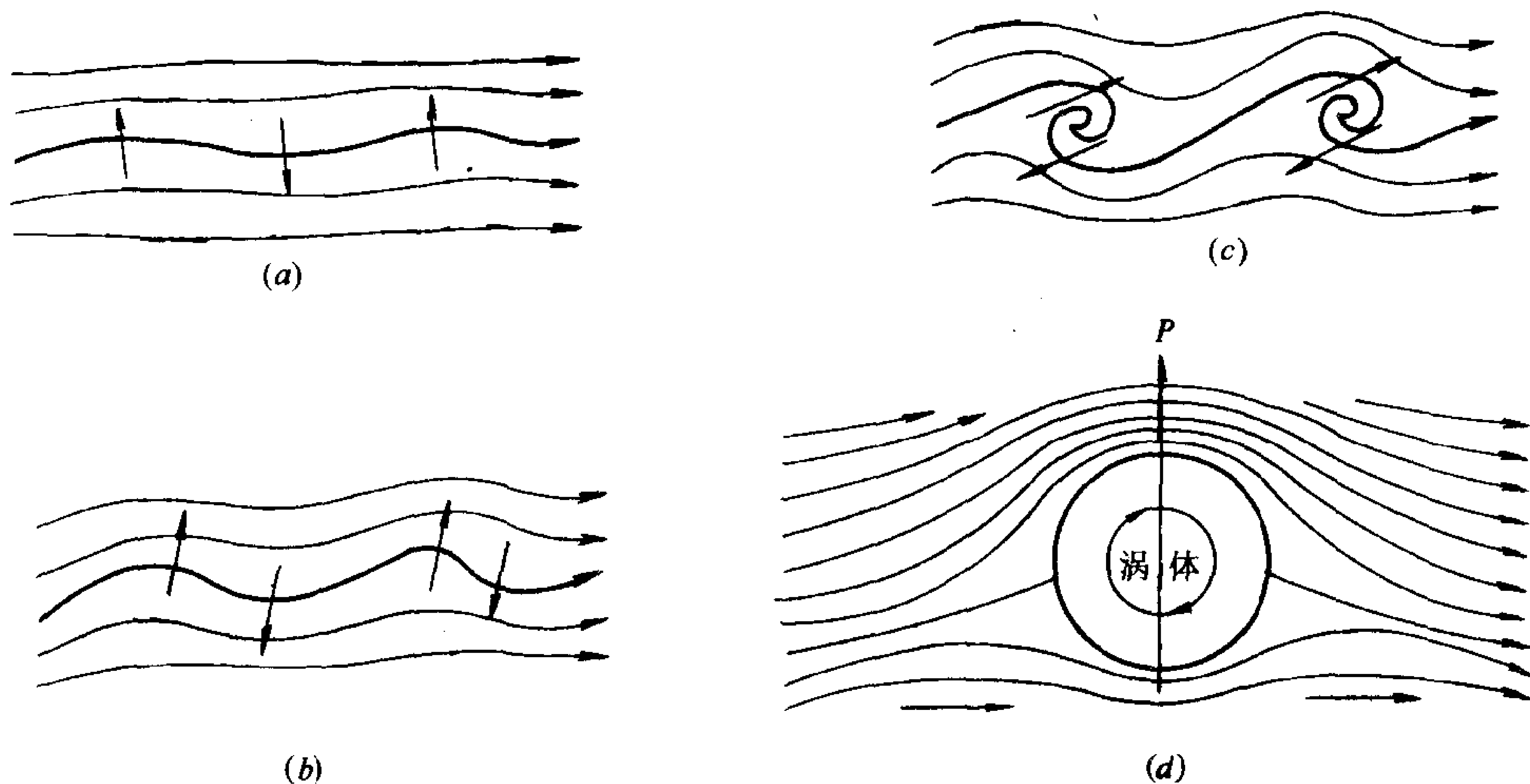


图 4-4 层流到紊流的转变过程

层流受扰动后，当粘性的稳定作用起主导作用时，扰动就受到粘性的阻滞而衰减下来，层流就是稳定的。当扰动占上风，粘性的稳定作用无法使扰动衰减下来，于是流动便变为紊流。因此，流动呈现什么流态，取决于扰动的惯性作用和粘性的稳定作用相互斗争的结果。

雷诺数之所以能判别流态，正是因为它反映了惯性力和粘性力的对比关系。下面的因次分析有助于我们初步认识这个问题。

$$[\text{惯性力}]=[m][a]=[\rho][L]^3[L]/[T]^2=[\rho][L]^3[v]^2/[L]$$

$$[\text{粘性力}]=[\mu][A]\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]=[\mu][L]^2[v]/[L]$$

$$\frac{[\text{惯性力}]}{[\text{粘性力}]}=\frac{[\rho][L]^3[v]^2/[L]}{[\mu][L]^2[v]/[L]}=\frac{[\rho][v][L]}{[\mu]}=[\text{Re}]$$

取 $L=d$，以上雷诺数就和(4-2-1)式一致了。

实验表明，在 Re = 1225 左右时，流动的核心部分就已出现线状的波动和弯曲。随着 Re 的增加，其波动的范围和强度随之增大，但此时粘性仍起主导作用。层流仍是稳定的。直至 Re 达到 2000 左右时，在流动的核心部分惯性力终于克服粘性力的阻滞而开始产生涡体，掺混现象也就出现了。当 Re>2000 后，涡体越来越多，掺混也越来越强烈。直到 Re = 3000～4000 时，除了在邻近管壁的极小区域外，均已发展为紊流。在邻近管壁的极小区域存在着很薄的一层流体，由于固体壁面的阻滞作用，流速较小，惯性力较小，因而仍保持为层流运动。该流层称为层流底层。管中心部分称为紊流核心。在紊流核心与层流底层之间还存在一个由层流到紊流的过渡层，如图 4-5 所示。层流底层的厚度 δ 随着 Re 数的不断加大而越来越薄，它的存在对管壁粗糙的扰动作用和导热性能有重大影响。

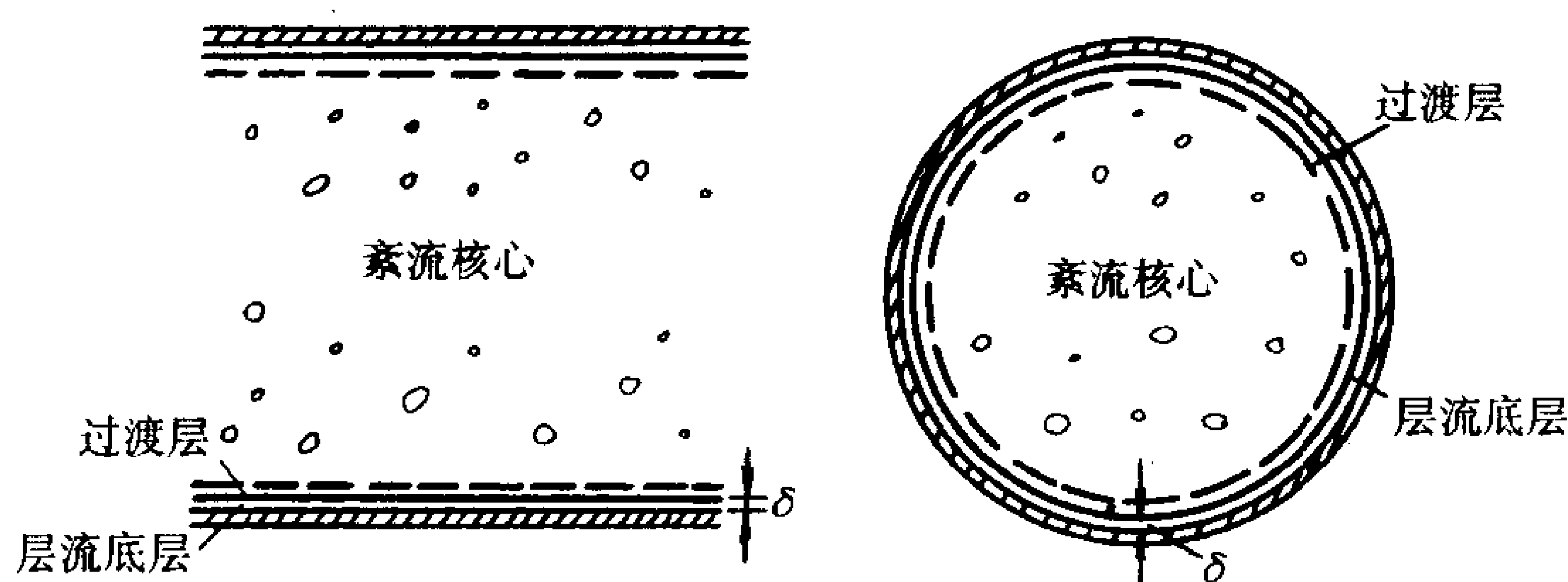


图 4-5　层流底层与紊流核心

第三节　圆管中的层流运动

本节主要讲述圆管中层流运动的规律以及从理论上导出沿程阻力系数 λ 的计算公式。

一、均匀流动方程式

在第三章已分析过均匀流动的特点，均匀流只能发生在长直的管道或渠道这一类断面形状和大小都沿程不变的流动中，因此只有沿程损失，而无局部损失。为了导出沿程阻力系数的计算公式，首先建立沿程损失和沿程阻力之间的关系。在图 4-6 所示的均匀流中，在任选的两个断面 1-1 和 2-2 列能量方程

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{l1-2}$$

由均匀流的性质：

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\qquad h_l=h_f$$

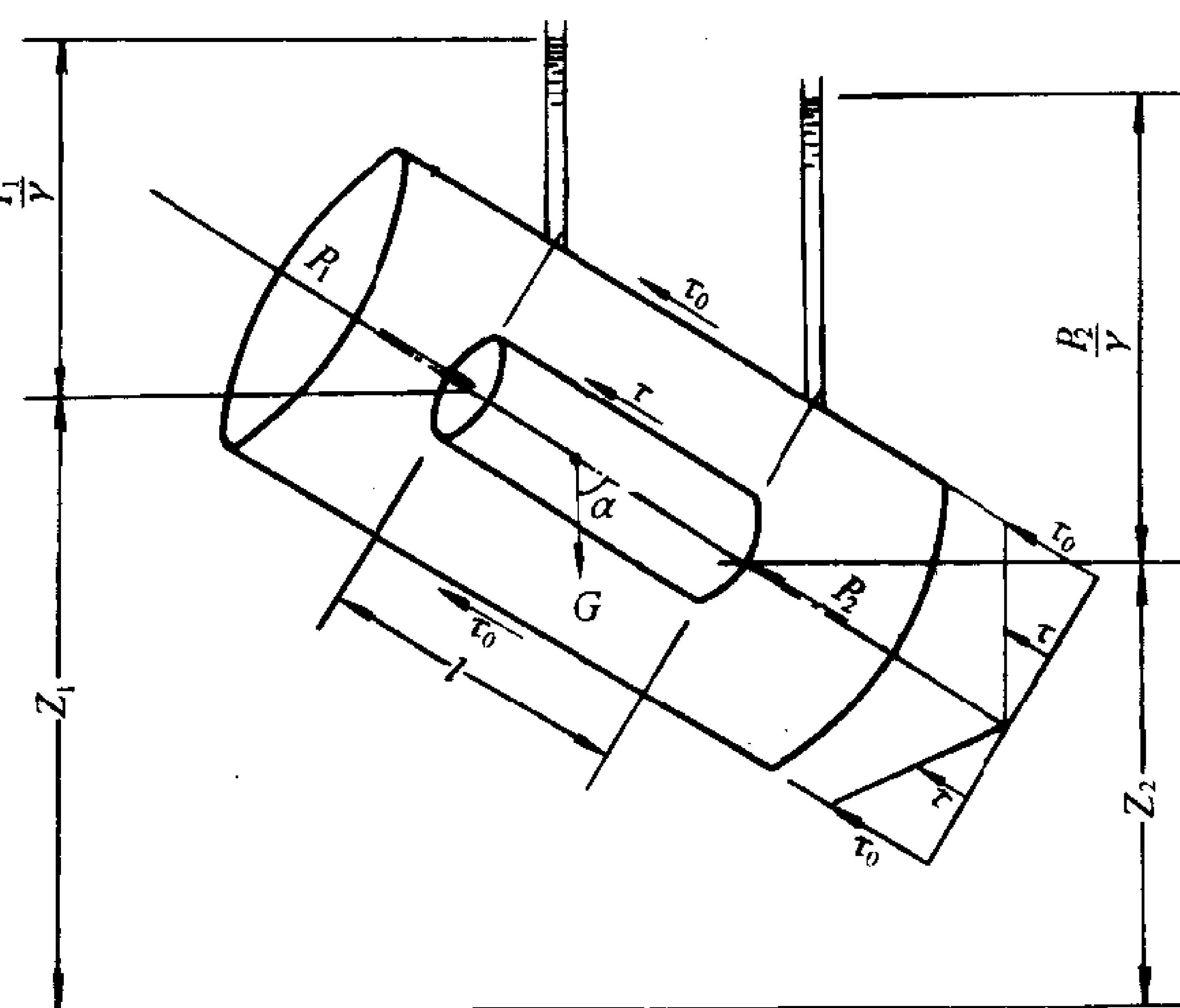


图 4-6　圆管均匀流动

代入上式,得

$$h_f=\left(\frac{p_1}{\gamma}+Z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\gamma}+Z_2\right) \tag{4-3-1}$$

考虑所取流段在流向上的受力平衡条件。设两断面间的距离为 L,过流断面面积 $A_1=A_2=A$,在流向上,该流段所受的作用力有:

重力分量 $\gamma Al\cos\alpha$

端面压力 $p_1A \quad p_2A$

管壁切力 $\tau_0\cdot l\cdot 2\pi r_0$

其中 τ_0——管壁切应力;r_0——圆管半径。

在均匀流中,流体质点作等速运动,加速度为零,因此,以上各力的合力为零,考虑到各力的作用方向,得

$$p_1A-p_2A+\gamma Al\cos\alpha-\tau_0 l2\pi r=0$$

将 $l\cos\alpha=Z_1-Z_2$ 代入整理得

$$\left(Z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(Z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)=\frac{2\tau_0 l}{\gamma r_0} \tag{4-3-2}$$

比较式(4-3-1)和(4-3-2),得

$$h_f=\frac{2\tau_0 l}{\gamma r_0} \tag{4-3-3}$$

式中 h_f/l 为单位长度的沿程损失,称为水力坡度。以 J 表示,即

$$J=h_f/l$$

代入上式得

$$\tau_0=\gamma\frac{r_0}{2}J \tag{4-3-4}$$

式(4-3-3)或(4-3-4)就是均匀流动方程式。它反映了沿程水头损失和管壁切应力之间的关系。

如取半径为 r 的同轴圆柱形流体来讨论,可类似地求得管内任一点轴向切应力 τ 与沿程水头损失 J 之间的关系:

$$\tau=\gamma\frac{r}{2}J \tag{4-3-5}$$

比较式(4-3-4)和(4-3-5),得

$$\tau/\tau_0=r/r_0 \tag{4-3-6}$$

比式表明圆管均匀流中,切应力与半径成正比,在断面上按直线规律分布,轴线上为零,在管壁上达最大值。如图 4-6 所示。

二、沿程阻力系数的计算

圆管中的层流运动,可以看成无数无限薄的圆筒层,一个套着一个地相对滑动,各流层间互不掺混。根据第八章的内容,可以证明这种轴对称的流动各流层间的切应力大小满足牛顿内摩擦定律式(1-2-7),即

$$\tau=-\mu\frac{du}{dr} \tag{4-3-7}$$

由于速度 u 随 r 的增大而减小,所以等式右边加负号,以保证 τ 为正。

联立均匀流动方程式(4-3-5)和式(4-3-7),整理得

$$\mathrm{d}u=-\frac{\gamma J}{2\mu}r\mathrm{d}r$$

在均匀流中,J 值不随 r 而变。参看§7-6节,积分上式,并代入边界条件:$r=r_0$ 时,$u=0$,得

$$u=\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2-r^2) \tag{4-3-8}$$

可见,断面流速分布是以管中心线为轴的旋转抛物面,见图4-7。

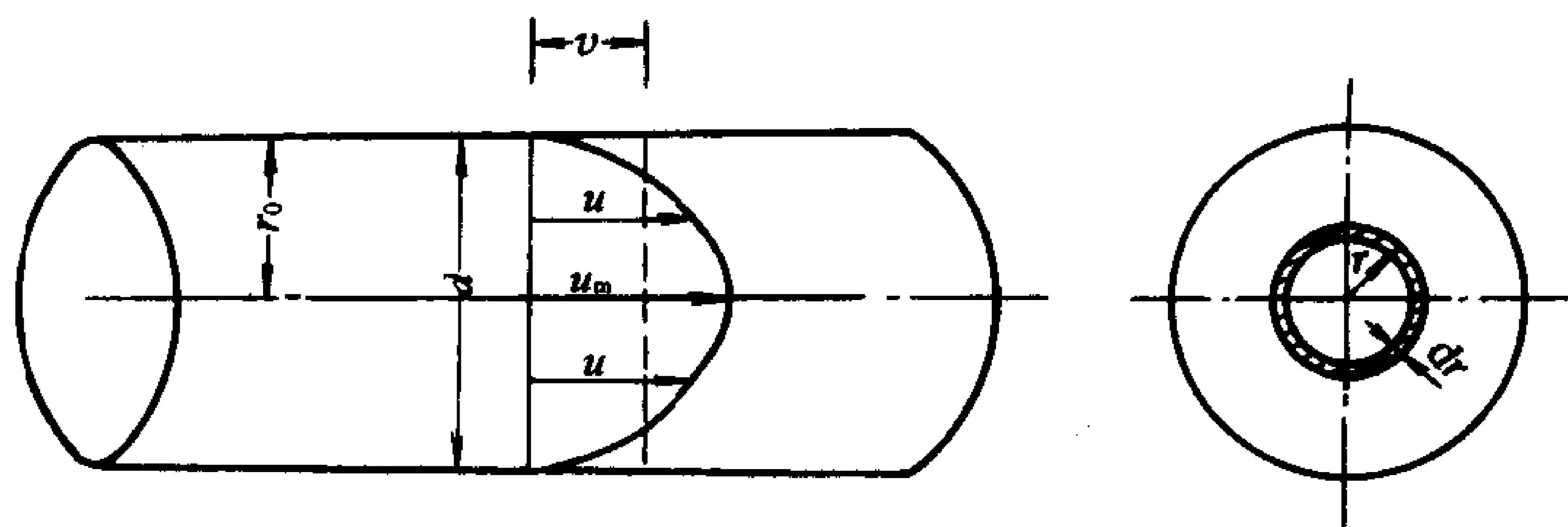


图4-7 圆管中层流的流速分布

$r=0$ 时,即在管轴上,达最大流速:

$$u_{\max}=\frac{\gamma J}{4\mu}r_0^2=\frac{\gamma J}{16\mu}d^2 \tag{4-3-9}$$

将式(4-3-8)代入平均流速定义式

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{\int_A u\mathrm{d}A}{A}=\frac{\int_0^{r_0} u\cdot 2\pi r\mathrm{d}r}{A}$$

得平均流速为

$$v=\frac{\gamma J}{8\mu}r_0^2=\frac{\gamma J}{32\mu}d^2 \tag{4-3-10}$$

比较式(4-3-9)和(4-3-10),得

$$v=\frac{1}{2}v_{\max} \tag{4-3-11}$$

即平均流速等于最大流速的一半。

根据式(4-3-10),得

$$h_f=J\cdot l=\frac{32\mu vl}{\gamma d^2} \tag{4-3-12}$$

此式从理论上证明了层流沿程损失和平均流速一次方成正比,这与§4-2的实验结果一致。

将式(4-3-12)写成计算沿程损失的一般形式,即式(4-1-1),则

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{32\mu vl}{\gamma d^2}=\frac{64}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

由此式,可得圆管层流的沿程阻力系数的计算式:

$$\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{4-3-13}$$

它表明圆管层流的沿程阻力系数仅与雷诺数有关,且成反比,而和管壁粗糙无关。

由于从理论上导出了层流时流速分布的解析式，因此，根据定义式，很容易导出圆管层流运动的动能修正系数 α 和动量修正系数 α_0：

$$\alpha = 2, \qquad \alpha_0 = 1.33$$

紊流掺混使断面流速分布比较均匀。层流时，相对地说，分布不均匀，两个系数值较大，不能近似为 1。在§3-8 中已提到，在实际工程中，大部分管流为紊流，因此系数 α 和 α_0 均近似取值为 1。

工程问题中管内层流运动主要存在于某些小管径、小流量的户内管路或粘性较大的机械润滑系统和输油管路中。层流运动规律也是流体粘度量测和研究紊流运动的基础。

【例 4-4】 设圆管的直径 $d = 2\text{cm}$，流速 $v = 12\text{cm/s}$，水温 $t = 10℃$。试求在管长 $L = 20\text{m}$ 上的沿程水头损失。

【解】 先判明流态，查得在 10℃时水的运动粘滞系数 $\nu = 0.013\text{cm}^2/\text{s}$。

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{12 \times 2}{0.013} = 1840 < 2000 \text{ 故为层流。}$$

求沿程阻力系数 λ

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{1840} = 0.0348$$

沿程损失为：

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0.0348 \times \frac{2000}{2} \times \frac{12^2}{2 \times 980} = 2.6\text{cm}$$

【例 4-5】 在管径 $d = 1\text{cm}$，管长 $L = 5\text{m}$ 的圆管中，冷冻机润滑油作层流运动，测得流量 $Q = 80\text{cm}^3/\text{s}$，水头损失 $h_f = 30\text{moil}$，试求油的运动粘滞系数 ν？

【解】 润滑油的平均流速

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{80}{\frac{\pi}{4} \cdot 1^2} = 102\text{cm/s}$$

沿程阻力系数为

$$\lambda = \frac{h_f}{\frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}} = \frac{30}{\frac{5}{0.01} \cdot \frac{1.02^2}{2 \times 9.8}} = 1.13$$

求 Re，因为是层流，$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$，所以

$$\text{Re} = \frac{64}{\lambda} = \frac{64}{1.13} = 56.6$$

润滑油的运动粘滞系数为：

$$\nu = \frac{vd}{\text{Re}} = \frac{102 \times 1}{56.6} = 1.82\text{cm}^2/\text{s}$$

第四节　紊流运动的特征和紊流阻力

本节进一步剖析和描述紊流运动的流动特征，研究与紊流能量损失有关的阻力特性，同时，介绍一些紊流的概念。

一、紊流运动的特征

上面已提到紊流流动是极不规则的流动，这种不规则性主要体现在紊流的脉动现象。所谓脉动现象，就是诸如速度、压强等空间点上的物理量随时间的变化作无规则的即随机的变动。在作相同条件下的重复试验时，所得瞬时值不相同，但多次重复试验的结果的算术平均值趋于一致，具有规律性。例如速度的这种随机脉动的频率在每秒 10^2 到 10^5 次之间，振幅小于平均速度的百分之十。

图 4-8 就是某紊流流动在某一空间固定点上测得的速度随时间的分布。



图 4-8 紊流的脉动

由于脉动的随机性，自然地，统计平均方法就是处理紊流流动的基本手段。统计平均方法有时均法和体均法等。我们介绍比较容易测量和常用的时均法。

通过对速度分量 u_x 的时间平均给出时均法的定义，以同样地获得其它物理量的时均值。

设 u_x 为瞬时值，带"—"表示其平均值，则时均值$\overline{u_x}$定义为

$$\overline{u_x}(x,y,z,t)=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}u_x(x,y,z,\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4-4-1}$$

式中 ξ——时间积分变量。T——平均周期，是一常数，它的取法是应比紊流的脉动周期大得多，而比流动的不恒定性的特征时间又小得多，随具体的流动而定。例如风洞实验中有时取 T 等于 1 秒，而海洋波 T 大于 20 分钟。

瞬时值与平均值之差即为脉动值，用"，"表示。于是，脉动速度为

$$u_x'=u_x-\overline{u_x}$$

或写成

$$u_x=\overline{u_x}+u_x' \tag{4-4-2}$$

同样地，瞬时压强、平均压强和脉动压强之间的关系为

$$p=\overline{p}+p'$$

等等。

如果紊流流动中各物理量的时均值不随时间而变，仅仅是空间点的函数，即称时均流动是恒定流动，例如，此时

$$\overline{u_x}=\overline{u_x}(x,y,z),\quad \overline{p}=\overline{p}(x,y,z)$$

等。紊流的瞬时运动总是非恒定的，而平均运动可能是非恒定的，也可能是恒定的。工程上关注的总是时均流动，一般仪器和仪表测量的也是时均值。上一章的一元恒定流基本方程

式也适用于紊流。

紊流脉动的强弱程度是用紊流度 ε 来表示的。紊流度的定义是

$$\varepsilon=\frac{1}{\bar{u}}\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u_x'^2}+\overline{u_y'^2}+\overline{u_z'^2})} \tag{4-4-3}$$

式中 $\bar{u}=(\bar{u}_x^2+\bar{u}_y^2+\bar{u}_z^2)^{1/2}$。即等于速度分量脉动值的均方根与平均运动速度大小的比值。在管流，射流和物体绕流等紊流流动中，初始来流的紊流度的强弱将影响到流动的发展。

紊流可分为：

均匀各向同性紊流：在流场中，不同点以及同一点在不同的方向上的紊流特性都相同。主要存在于无界的流场或远离边界的流场。例如远离地面的大气层等；

自由剪切紊流：边界为自由面而无固壁限制的紊流。例如自由射流，绕流中的尾流等，在自由面上与周围介质发生掺混；

有壁剪切紊流：紊流在固壁附近的发展受限制。如管内紊流及绕流边界层等。在紊流理论和工程应用中都有专门的著作可资参考。

跟分子运动一样，紊流的脉动也将引起流体微团之间的质量、动量和能量的交换。由于流体微团含有大量分子，这种交换较之分子运动强烈得多，从而产生了紊流扩散，紊流摩阻和紊流热传导等。这种特性有时是有益的，例如紊流将强化换热器的效果；在考虑阻力问题时，却要设法减弱紊流摩阻。下面将分析与能量损失有关的紊流阻力的特点。

二、紊流阻力

在紊流中，一方面因时均流速不同，各流层间的相对运动，仍然存在着粘性切应力，另一方面还存在着由脉动引起的动量交换产生的惯性切应力。因此，紊流阻力包括粘性切应力和惯性切应力。

粘性切应力可由牛顿内摩擦定律计算。我们首先分析惯性切应力的产生原因。

在图 4-9 所示的恒定紊流中，时均流速沿 x 轴方向。脉动流速沿 x 和 y 方向的分量分别为 u_x' 和 u_y'。任取一水平截面 A-A，设在某一瞬时，原来位于低流速层 a 点处的质点，

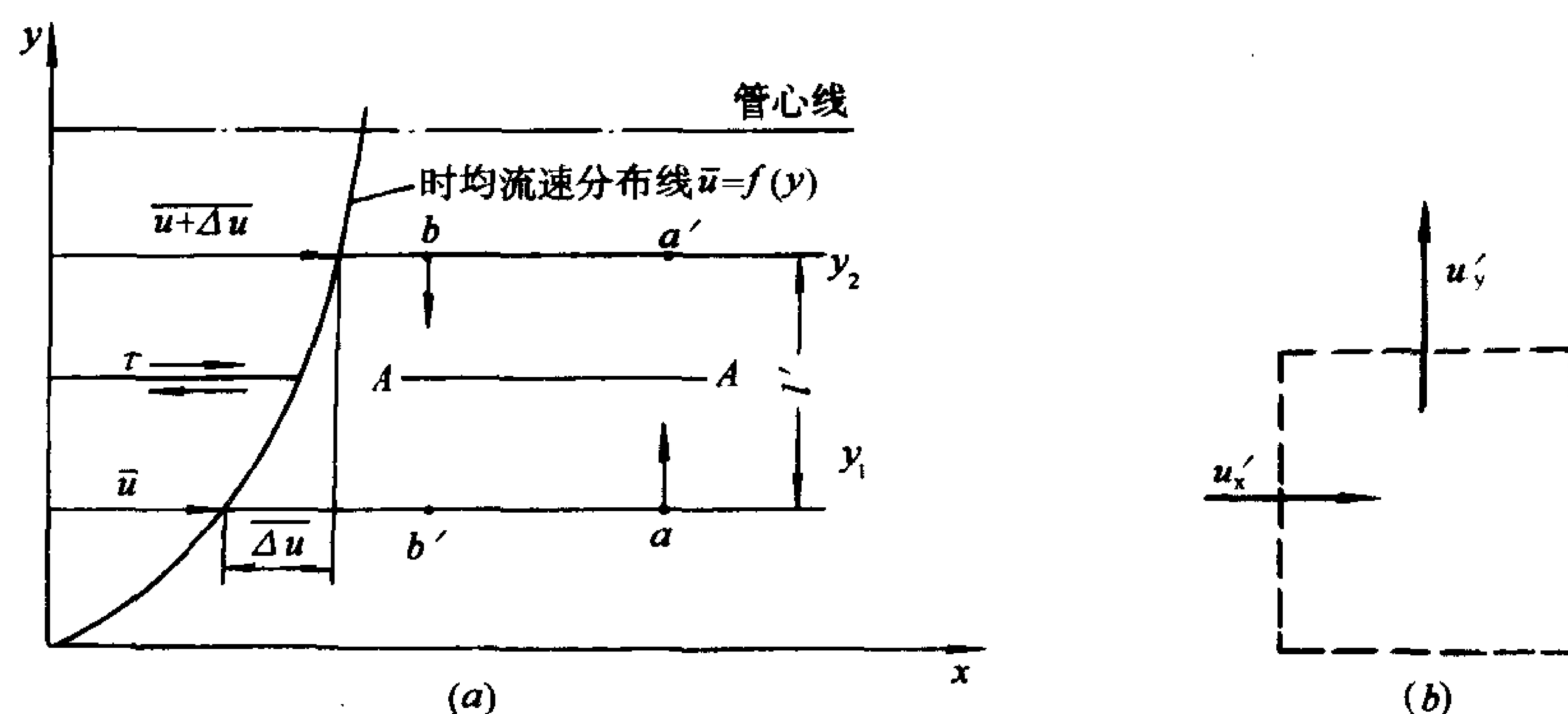


图 4-9 紊流的动量交换

以脉动流速 u_y' 向上流动，穿过 A-A 截面到达 a' 点，则单位时间内通过 A-A 截面单位面积的流体质量为 $\rho u_y'$。由于流体具有 x 方向的流速，其瞬时值为 $u_x=\bar{u}_x+u_x'$，因而也就有 x 方向的动量由下层传入上层。单位时间内通过单位面积的动量为 $\rho u_y'(\bar{u}_x+u_x')$，这样，截面

$A\text{-}A$ 的下侧流体损失了动量，而上侧的流体增加了动量。根据动量定律：动量的变化率等于作用力。这里动量的变化率也就是通过截面 $A\text{-}A$ 的动量流量。所以由横向脉动产生的 x 方向的动量传递，使 $A\text{-}A$ 截面上产生了 x 方向的作用力。这个单位面积上的切向作用力就称为惯性切应力。用 τ_2 表示

$$\tau_2 = \rho u'_y(\overline{u}_x + u'_x)$$

这里 u'_y 和 u'_x 可能为正，也可能为负。图 4-9 所示流动的粘性切应力用 τ_1 表示。τ_2 的时均值，根据式(4-4-1)，有

$$\overline{\tau_2} = \overline{\rho u'_y(\overline{u}_x + u'_x)} = \rho \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u'_y(\overline{u}_x + u'_x)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \rho\left(\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u'_y\overline{u}_x\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u'_y u'_x\,\mathrm{d}\xi\right)$$

上式中，平均值 $\overline{u}_x$ 与积分变量无关，不难证明脉动量的时均值为零：

因为 $u_y = \overline{u}_y + u'_y$，两边取时均值，得

$$\overline{u_y} = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} \overline{u}_y\,\mathrm{d}\xi + \overline{u'_y} = \overline{u}_y + \overline{u'_y}$$

所以

$$\overline{u'_y} = 0$$

于是

$$\overline{\tau_2} = \rho \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u'_y u'_x\,\mathrm{d}\xi = \rho\,\overline{u'_x u'_y} \tag{4-4-4}$$

现在分析惯性切应力的方向。当流体由下往上脉动时，u'_y 为正，由于 a 点处 x 方向的时均流速小于 a' 处的时均流速，因此当 a 处的质点到达 a' 处时，在大多数情况下，对该处原有的质点的运动起阻滞作用，产生负的沿 x 方向的脉动流速 u'_x。反之，原处于高流速层 b 点的流体，以脉动流速 u_y' 向下运动，则 u'_y 为负，到达 b' 点时，对该处原有的质点的运动起向前推进的作用，产生正值的脉动流速 u'_x。这样正的 u'_x 和负的 u'_y 相对应，负的 u'_x 和正的 u'_y 相对应，其乘积 $u'_x u'_y$ 总是负值。此外，惯性切应力和粘性切应力的方向是一致的，下层流体（低流速层）对上层流体（高流速层）的运动起阻滞作用，而上层流体对下层流体的运动起推动作用。

为了使惯性切应力的符号与粘性切应力一致，以正值出现，故在(4-4-4)式中加一负号，得

$$\overline{\tau_2} = -\rho\,\overline{u'_x u'_y} \tag{4-4-5}$$

上式就是流速横向脉动产生的紊流惯性切应力。是雷诺于 1895 年首先提出的，故又名雷诺应力。但要提醒的是即使对平均流动而言，流动朝着同一方向的紊流，例如直管内流动，在三个坐标方向都存在着流速的脉动分量。因此，一般地惯性切应力还在其它方向上存在。

由于脉动量测量的困难，因此利用脉动量直接计算惯性切应力实际上是不可能的。由于脉动量的存在和应用上主要关注的是平均值，因此，紊流理论主要就是研究脉动值和平均值之间的相互关系。紊流研究的方向主要有：

紊流的统计理论；

平均量的半经验理论。这是工程中主要采用的方法。1925 年普朗特提出的混合长度理论，就是经典的半经验理论。

三、混合长度理论

宏观上流体微团的脉动引起惯性切应力，这与分子微观运动引起粘性切应力十分相似。因此，普朗特假设在脉动过程中，存在着一个与分子平均自由路程相当的距离 l'。微团在该距离内不会和其它微团相碰，因而保持原有的物理属性，例如保持动量不变。只是在经过这段距离后，才与周围流体相混合，并取得与新位置上原有流体相同的动量等。

现根据这一假定作如下的推导：

相距 l' 的两层流体的时均流速差为：

$$\Delta \bar{u} = \bar{u}(y_2) - \bar{u}(y_1) = \left(\bar{u}(y_1) + \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}l'\right) - \bar{u}(y_1) = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}l'$$

由于两层流体的时均流速不同，因此横向脉动动量交换的结果要引起纵向脉动。普朗特假设纵向脉动流速绝对值的时均值与时均流速差成比例：

$$\overline{|u'_x|} \backsim \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}l'$$

同时，在紊流里，用一封闭边界割离出一块流体，如图 4-9*b* 所示。普朗特根据连续性原理认为要维持质量守恒，纵向脉动必将影响横向脉动，即 u'_x 与 u'_y 是相关的。因此 $\overline{|u'_y|}$ 与 $\overline{|u'_x|}$ 成比例，即

$$\overline{|u'_y|} \backsim \overline{|u'_x|} \backsim \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}l'$$

$\overline{u'_x u'_y}$ 虽然与 $\overline{|u'_x|}\cdot\overline{|u'_y|}$ 不等，但可以认为两者成比例关系，符号相反，则

$$-\overline{u'_x u'_y} = cl'^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

式中，c 为比例系数，令 $l^2 = cl'^2$ 则上式可变成

$$\overline{\tau_2} = \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right)^2 \tag{4-4-6}$$

这就是由普朗特的混合长度理论得到的以时均流速表示的紊流惯性切应力表达式，式中 l 称为混合长度。于是紊流切应力可写成：

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \mu \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y} + \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

层流时只有粘性切应力 τ_1，紊流时 τ_2 有很大影响，如果我们将 τ_1 和 τ_2 相比，则

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right)^2}{\mu\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right)} = \frac{\rho l^2 \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}}{\mu} \approx \rho l \frac{\bar{u}}{\mu}$$

$\frac{\rho l \bar{u}}{\mu}$ 是雷诺数的形式，因此 τ_2 与 τ_1 的比例与雷诺数有关。雷诺数越大，紊动越剧烈，τ_1 的影响就越小，当雷诺数很大时，τ_1 就可以忽略了，于是：

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2 \tag{4-4-7}$$

为了简便起见，从这里开始，时均值不再标以时均符号。

式(4-4-7)中，混合长度 l 是未知的，要根据具体问题作出新的假定结合实验结果才能

确定。普朗特关于混合长度的假设有其局限性,但在一些紊流流动中应用普朗特半经验理论所获得的结果与实践比较一致。

将式(4-4-7)运用于圆管紊流,可以从理论上证明断面上流速分布是对数型的:

$$u=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln y+C \tag{4-4-8}$$

式中 y——离圆管壁的距离;β——卡门通用常数,由实验定;C——积分常数。

层流和紊流时圆管内流速分布规律的差异是由于紊流时流体质点相互掺混使流速分布趋于平均化造成的。层流时的切应力是由于分子运动的动量交换引起的粘性切应力;而紊流切应力除了粘性切应力外,还包括流体微团脉动引起的动量交换所产生的惯性切应力。由于脉动交换远大于分子交换,因此在紊流充分发展的流域内,惯性切应力远大于粘性切应力,也就是说,紊流切应力主要是惯性切应力。

第五节　尼古拉兹实验

普朗特半经验理论是不完善的,必须结合实验才能解决紊流阻力的计算。

尼古拉兹在人工均匀砂粒粗糙的管道中进行了系统的沿程阻力系数和断面流速分布的测定。

一、沿程阻力系数及其影响因素的分析

沿程损失的计算,关键在于如何确定沿程阻力系数 λ。由于紊流的复杂性,λ 的确定不可能像层流那样严格地从理论上推导出来。其研究途径通常有二:一是直接根据紊流沿程损失的实测资料,综合成阻力系数 λ 的纯经验公式;二是用理论和试验相结合的方法,以紊流的半经验理论为基础,整理成半经验公式。

为了通过试验研究沿程阻力系数 λ,首先要分析 λ 的影响因素。层流的阻力是粘性阻力,理论分析已表明,在层流中,$\lambda=64/Re$,即 λ 仅与 Re 有关,与管壁粗糙度无关。而紊流的阻力由粘性阻力和惯性阻力两部分组成。壁面的粗糙在一定条件下成为产生惯性阻力的主要外因。每个粗糙点都将成为不断地产生并向管中输送旋涡引起紊动的源泉。因此,粗糙的影响在紊流中是一个十分重要的因素。这样,紊流的能量损失一方面取决于反映流动内部矛盾的粘性力和惯性力的对比关系,另一方面又决定于流动的边壁几何条件。前者可用 Re 来表示,后者则包括管长、过流断面的形状,大小以及壁面的粗糙等。对圆管来说,过流断面的形状固定了,而管长 l 和管径 d 也已包括在式(4-1-1)中。因此边壁的几何条件中只剩下壁面粗糙需要通过 λ 来反映。这就是说,沿程阻力系数 λ,主要取决于 Re 和壁面粗糙这两个因素。

壁面粗糙中影响沿程损失的具体因素仍有不少。例如,对于工业管道,就包括粗糙的突起高度,粗糙的形状和粗糙的疏密和排列等因素。尼古拉兹在试验中使用了一种简化的粗糙模型。他把大小基本相同,形状近似球体的砂粒用漆汁均匀而稠密地粘附于管壁上,如图 4-10 所示。这种尼古拉兹使用的人工均匀粗糙叫做尼古拉兹粗糙。对于这种特定的粗糙形式,就可以用糙粒的突起高度 K(即相当于砂粒直



图 4-10　尼古拉兹粗糙

径)来表示边壁的粗糙程度。K 称为绝对粗糙度。但粗糙对沿程损失的影响不完全取决于粗糙的突起绝对高度 K,而是决定于它的相对高度,即 K 与管径 d 或半径 r_0 之比。K/d 或 K/r_0,称为相对粗糙度。其倒数 d/K 或 r_0/K 则称为相对光滑度。这样,影响 λ 的因素就是雷诺数和相对粗糙度,即

$$\lambda = f\left(\mathrm{Re}, \frac{K}{d}\right)$$

在学习了第十章中介绍的相似原理以后,就可以认识到,Re 相等意味着主要作用力相似。而 K/d 相等,则意味着粗糙的几何相似。如果流动的 Re 和 K/d 相等,它们就是力学相似的,所以 λ 值也应相等。

二、沿程阻力系数的测定和阻力分区图

为了探索沿程阻力系数 λ 的变化规律,尼古拉兹用多种管径和多种粒径的砂粒,得到了 $K/d=\frac{1}{30}\sim\frac{1}{1014}$ 的六种不同的相对粗糙度。在类似于图 4-2 的装置中,量测不同流量时的断面平均流速 v 和沿程水头损失 h_f。根据

$$\mathrm{Re}=\frac{vd}{\nu} \text{和} \lambda=\frac{d}{l}\frac{2g}{v^2}h_f$$

两式,即可算出 Re 和 λ。把试验结果点绘在对数坐标纸上,就得到图 4-11。

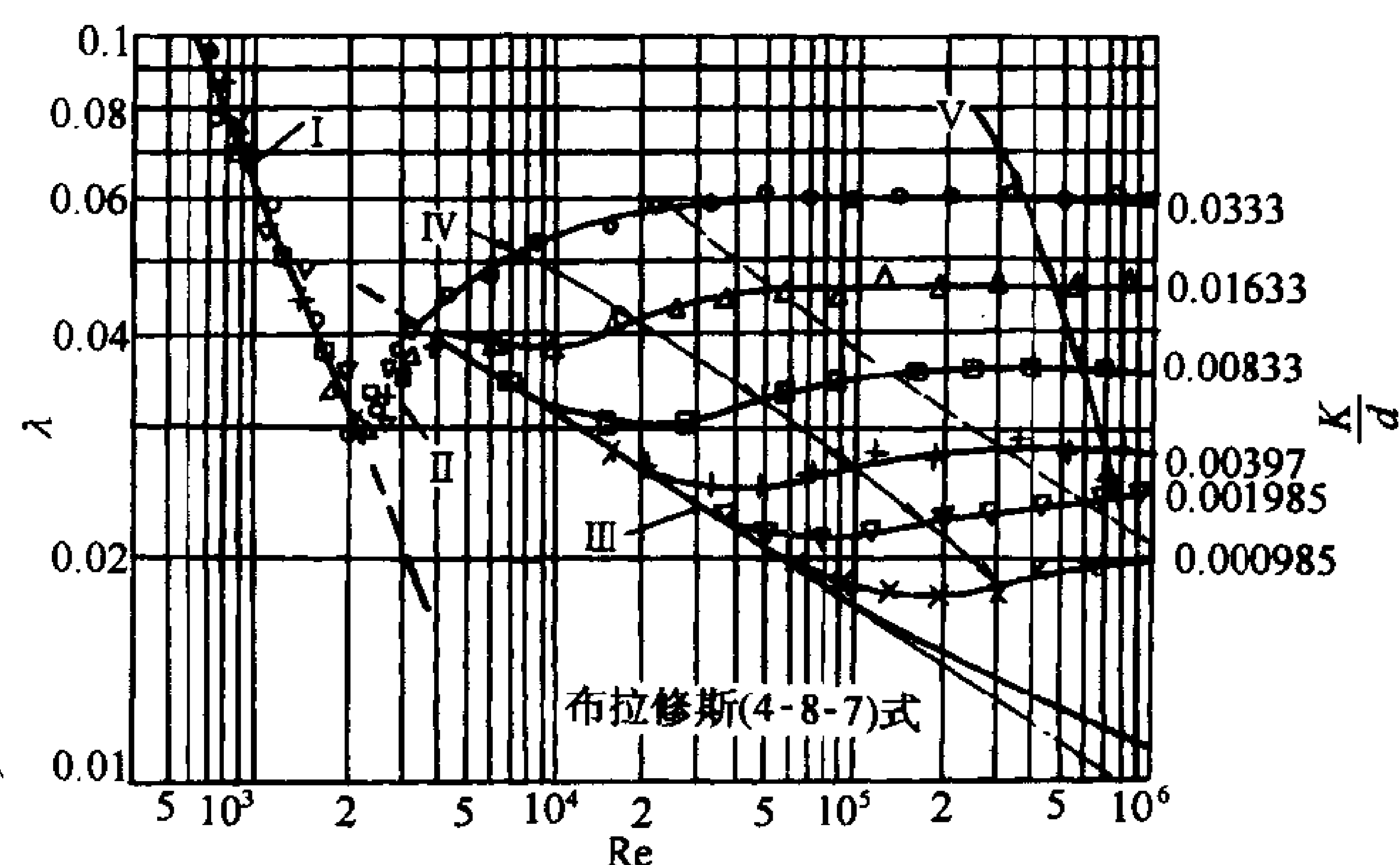


图 4-11 尼古拉兹粗糙管沿程损失系数

根据 λ 变化的特征。图中曲线可分为五个阻力区:

第Ⅰ区为层流区。当 Re<2000 时,所有的试验点,不论其相对粗糙度如何,都集中在一根直线上。这表明 λ 仅随 Re 变化,而与相对粗糙度无关。所以它的方程就是 $\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}}$。因此,尼古拉兹试验证实了由理论分析得到的层流沿程损失计算公式是正确的。

第Ⅱ区为临界区。在 Re=2000~4000 范围内,是由层流向紊流的转变过程。λ 随 Re 的增大而增大,而与相对粗糙度无关。

第Ⅲ区为紊流光滑区。在 Re>4000 后,不同相对粗糙的试验点,起初都集中在曲线Ⅲ上。随着 Re 的加大,相对粗糙度较大的管道,其试验点在较低的 Re 时就偏离曲线Ⅲ。而相对粗糙度较小的管道,其试验点要在较大的 Re 时才偏离光滑区。在曲线Ⅲ范围内,λ 只与 Re 有关而与 K/d 无关。

第Ⅳ区为紊流过渡区。在这个区域内,试验点已偏离光滑区曲线。不同相对粗糙度的试验点各自分散成一条条波状的曲线。λ 既与 Re 有关,又与 K/d 有关。

第Ⅴ区为紊流粗糙区。在这个区域里,不同相对粗糙度的试验点,分别落在一些与横坐标平行的直线上。λ 只与 K/d 有关,而与 Re 无关。当 λ 与 Re 无关时,由式(4-1-1)可见,沿程损失就与流速的平方成正比。因此第Ⅴ区又称为阻力平方区。

以上实验表明了紊流中 λ 确实决定于 Re 和 K/d 这两个因素。但是为什么紊流又分为三个阻力区,各区的 λ 变化规律是如此不同呢?这个问题可用层流底层的存在来解释。

在光滑区,糙粒的突起高度 K 比层流底层的厚度 δ 小得多,粗糙完全被掩盖在层流底层以内(图 4-12a),它对紊流核心的流动几乎没有影响。粗糙引起的扰动作用完全被层流底层内流体粘性的稳定作用所抑制。管壁粗糙对流动阻力和能量损失不产生影响。

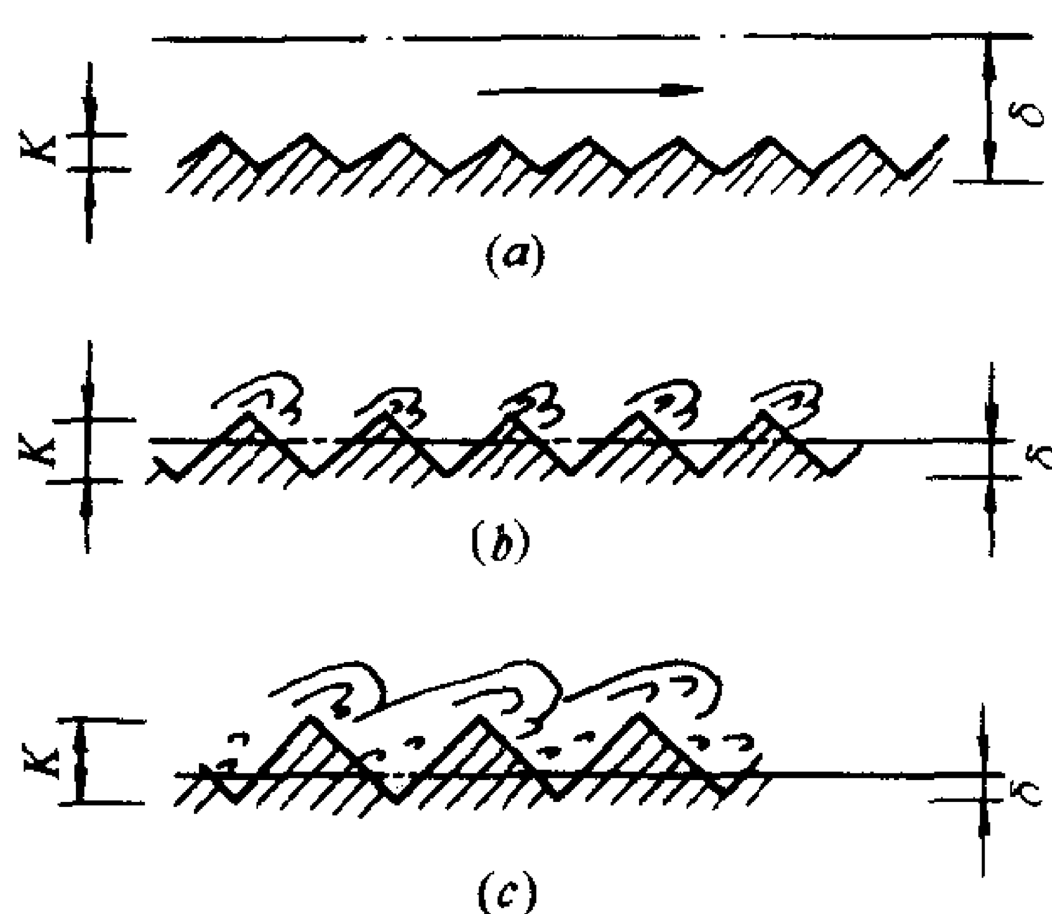


图 4-12　层流底层与管壁粗糙的作用
(a)光滑区;(b)过渡区;(c)粗糙区

在过渡区,层流底层变薄,粗糙开始影响到紊流核心区内的流动(图 4-12b),加大了核心区内的紊动强度。因此增加了阻力和能量损失。这时,λ 不仅与 Re 有关,而且与 K/d 有关。

在粗糙区,层流底层更薄,粗糙突起高度几乎全部暴露在紊流核心中,$K \gg \delta$(图 4-12c)。粗糙的扰动作用已经成为紊流核心中惯性阻力的主要原因。Re 对紊流强度的影响和粗糙的影响相比已微不足道了。K/d 成了影响 λ 的唯一因素。

由此可见,流体力学中所说的光滑区和粗糙区,不完全决定于管壁粗糙的突起高度 K,还取决于和 Re 有关的层流底层的厚度 δ。

综上所述,沿程损失系数 λ 的变化可归纳如下:

Ⅰ、层流区　　　　　$\lambda = f_1(\mathrm{Re})$

Ⅱ、临界过渡区　　　$\lambda = f_2(\mathrm{Re})$

Ⅲ、紊流光滑区　　　$\lambda = f_3(\mathrm{Re})$

Ⅳ、紊流过渡区　　　$\lambda = f(\mathrm{Re}, K/d)$

Ⅴ、紊流粗糙区(阻力平方区)$\lambda = f(K/d)$

尼古拉兹实验比较完整地反映了沿程损失系数 λ 的变化规律,揭露了影响 λ 变化的主要因素,他对 λ 和断面流速分布的测定,推导紊流的半经验公式提供了可靠的依据。

第六节　工业管道紊流阻力系数的计算公式

本节将集中介绍实际的工业管道沿程阻力系数的计算公式。由于尼古拉兹实验是对人工均匀粗糙管进行的,而工业管道的实际粗糙与均匀粗糙有很大不同,因此,在将尼古拉兹实验结果用于工业管道时,首先要分析这种差异和寻求解决问题的方法。

一、光滑区和粗糙区的 λ 值

(一) 当量糙粒高度

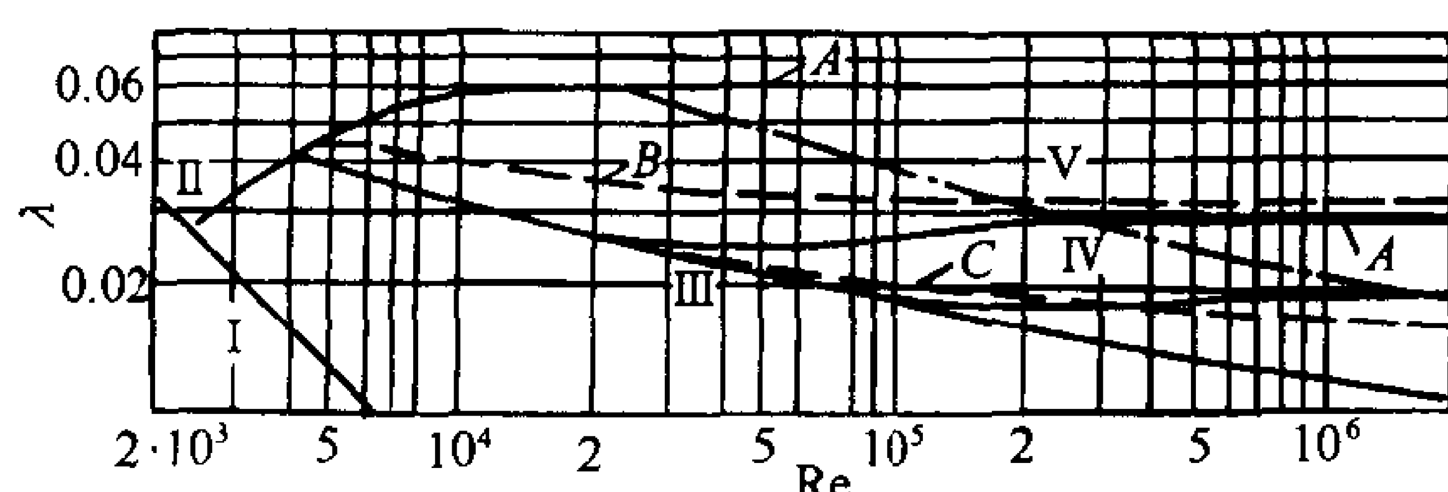


图 4-13　λ 曲线的比较

图 4-13 为尼古拉兹粗糙管和工业管道 λ 曲线的比较。图中实线 A 为尼古拉兹试验曲线，虚线 B 和 C 分别为 2 英寸镀锌钢管和 5 英寸新焊接钢管的试验曲线。由图可见，在光滑区工业管道的试验曲线和尼古拉兹曲线是重叠的。因此，只要流动位于阻力光滑区，工业管道 λ 的计算就可采用尼古拉兹的试验结果。

在粗糙区，工业管道和尼古拉兹的实验曲线都是与横坐标轴平行。这就存在着用尼古拉兹粗糙区公式计算工业管道的可能性。问题在于如何确定工业管道的 K 值。在流体力学中，把尼古拉兹粗糙作为度量粗糙的基本标准。把工业管道的不均匀粗糙折合成尼古拉兹粗糙。这样，就提出了一个当量糙粒高度的概念。所谓当量糙粒高度，就是指和工业管道粗糙区 λ 值相等的同直径尼古拉兹粗糙管的糙粒高度。如实测出某种材料工业管道在粗糙区时的 λ 值，将它与尼古拉兹实验结果进行比较，找出 λ 值相等的同一管径尼古拉兹粗糙管的糙粒高度，这就是该种材料工业管道的当量糙粒高度。

工业管道的当量糙粒高度是按沿程损失的效果来确定的，它在一定程度上反映了粗糙中各种因素对沿程损失的综合影响。

几种常用工业管道的 K 值，见表 4-1。

工业管道当量糙粒高度　　　　表 4-1

管道材料	K (mm)	管道材料	K (mm)
钢板制风管	0.15(引自全国通用通风管道计算表)	竹风道	0.8~1.2
塑料板制风管	0.01(引自全国通用通风管道计算表)	铅管、铜管、玻璃管	0.01 光滑(以下引自莫迪当量粗糙图)
矿渣石膏板风管	1.0(以下引自采暖通风设计手册)	镀锌钢管	0.15
表面光滑砖风道	4.0	钢　管	0.046
矿渣混凝土板风道	1.5	涂沥青铸铁管	0.12
铁丝网抹灰风道	10~15	铸铁管	0.25
胶合板风道	1.0	混凝土管	0.3~3.0
地面沿墙砌造风道	3~6	木条拼合圆管	0.18~0.9
墙内砌砖风道	5~10		

（二）λ 计算公式

根据普朗特半经验理论，得到了断面流速分布的对数公式(4-4-8)，在此基础上，结合尼古拉兹实验曲线，得到在紊流光滑区的 λ 公式为

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})-0.8 \tag{4-6-1}$$

或写成

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}{2.51} \tag{4-6-2}$$

类似地，可导得粗糙区的 λ 公式，即

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{r_0}{K}+1.74 \tag{4-6-3}$$

或写成

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{3.7d}{K} \tag{4-6-4}$$

式(4-6-1)和式(4-6-3)都是半经验公式，分别称为尼古拉兹光滑区公式和粗糙区公式。此外，还有许多直接由试验资料整理成的纯经验公式。这里只介绍两个应用最广的公式。

光滑区的布拉修斯公式。布拉修斯于1913年在综合光滑区试验资料的基础上提出的指数公式应用最广，其形式为

$$\lambda=\frac{0.3164}{\mathrm{Re}^{0.25}} \tag{4-6-5}$$

上式仅适用于 $\mathrm{Re}<10^5$ 的情况（见图4-11），而尼古拉兹光滑区公式可适用于更大的Re范围。但布拉修斯公式简单，计算方便。因此，也得到了广泛的应用。

粗糙区的希弗林松公式

$$\lambda=0.11\left(\frac{K}{d}\right)^{0.25} \tag{4-6-6}$$

这也是一个指数公式，由于它的形式简单，计算方便，因此，工程上也常采用。

二、紊流过渡区和柯列勃洛克公式

（一）过渡区 λ 曲线的比较

由图4-13可见，在过渡区工业管道实验曲线和尼古拉兹曲线存在较大的差异。这表现在工业管道实验曲线的过渡区曲线在较小的Re下就偏离光滑曲线，且随着Re的增加平滑下降，而尼古拉兹曲线则存在着上升部分。

造成这种差异的原因在于两种管道粗糙均匀性的不同。在工业管道中，粗糙是不均匀的。当层流底层比当量糙粒高度还大很多时，粗糙中的最大糙粒就将提前对紊流核心内的紊动产生影响，使 λ 开始与 K/d 有关，实验曲线也就较早地离开了光滑区。提前多少则取决于不均匀粗糙中最大糙粒的尺寸。随着Re的增大，层流底层越来越薄，对核心区内的流动能产生影响的糙粒越来越多，因而粗糙的作用是逐渐增加的。而尼古拉兹粗糙是均匀的，其作用几乎是同时产生。当层流底层的厚度开始小于糙粒高度之后，全部糙粒开始直接暴露在紊流核心内。促使产生强烈的旋涡。同时，暴露在紊流核心内的糙粒部分随Re的增长而不断加大。因而沿程损失急剧上升。这就是为什么尼古拉兹试验中过渡曲线产生上升的原因。

（二）柯列勃洛克公式

尼古拉兹的过渡区的试验资料对工业管道是完全不适用的。柯列勃洛克根据大量的工业管道试验资料，整理出工业管道过渡区曲线，并提出该曲线的方程为：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{K}{3.7d}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) \tag{4-6-7}$$

式中，K 为工业管道的当量糙粒高度。可由表4-1查得。(4-6-7)式称为柯列勃洛克公式（以下简称柯氏公式）。它是尼古拉兹光滑区公式和粗糙区公式的机械结合。该公式的基本特征是当Re值很小时，公式右边括号内的第二项很大，相对来说，第一项很小。这样，柯氏

公式就接近尼古拉兹光滑区公式。当 Re 值很大时，公式右边括号内第二项很小，公式接近尼古拉兹粗糙公式。因此，柯氏公式所代表的曲线是以尼古拉兹光滑区斜直线和粗糙区水平线为渐近线，它不仅可适用于紊流过渡区，而且可以适用于整个紊流的三个阻力区。因此又可称它为紊流的综合公式。

在不使用下述的莫迪图，而采用紊流沿程阻力系数分区计算公式计算沿程阻力系数 λ 时碰到的一个问题是：如何根据雷诺数 Re 和相对粗粒度 K/d 建立判别实际流动所处的紊流阻力区的标准呢？

由于柯氏公式适用于三个紊流阻力分区，它所代表的曲线是以尼古拉兹光滑区斜直线和粗糙区水平线为渐近线，因此我国汪兴华教授建议：以柯氏公式(4-6-7)与尼古拉兹分区公式(4-6-2)和(4-6-4)的误差不大于 2% 为界来确立判别标准。根据这一思想，汪兴华导得的判别标准是：

紊流光滑区：
$$2000<\mathrm{Re}\leqslant 0.32\left(\frac{d}{K}\right)^{1.28}$$

紊流过渡区：
$$0.32\left(\frac{d}{K}\right)^{1.28}<\mathrm{Re}\leqslant 1000\left(\frac{d}{K}\right)$$

紊流粗糙区：
$$\mathrm{Re}>1000\left(\frac{d}{K}\right)$$

由于柯氏公式广泛地应用于工业管道的设计计算中，因此这种判别标准具有实用性。

柯氏公式的形式比较复杂，求解比较困难。但目前电子计算技术日益发达，这个问题是可以解决的。

柯氏公式虽然是一个经验公式。但是它是在合并两个半经验公式的基础上获得的。因此可以认为柯氏公式是普朗特理论和尼古拉兹试验结合后进一步发展到工程应用阶段的产物。这个公式在国内外得到了极为广泛的应用。我国通风管道的设计计算，目前就是以柯氏公式为基础的。

为了简化计算，莫迪以柯氏公式为基础绘制出反映 Re、K/d 和 λ 对应关系的莫迪图(图 4-14)，在图上可根据 Re 和 K/d 直接查出 λ。

此外，还有一些人为了简化计算，在柯氏公式的基础上提出了一些简化公式。如：

1. 莫迪公式

$$\lambda=0.0055\left[1+\left(20000\frac{K}{d}+\frac{10^6}{\mathrm{Re}}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \tag{4-6-8}$$

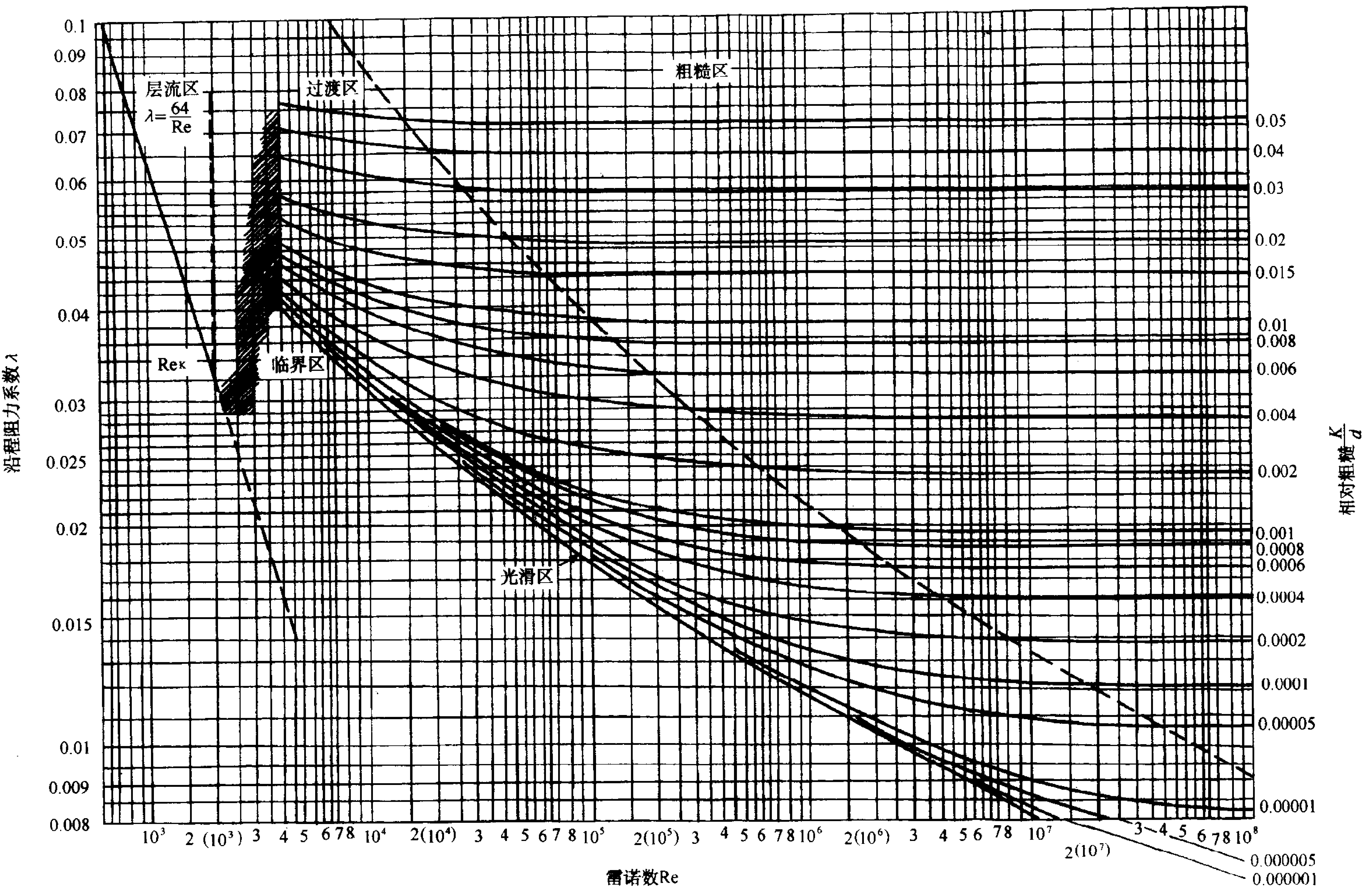
这是柯氏公式的近似公式。莫迪指出，此公式在 $\mathrm{Re}=4000\sim10^7$、$K/d\leqslant0.01$、$\lambda<0.05$ 时和柯氏公式比较，其误差不超过 5%。

2. 阿里特苏里公式

$$\lambda=0.11\left(\frac{K}{d}+\frac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0.25} \tag{4-6-9}$$

这也是柯氏公式的近似公式。它的形式简单，计算方便，是适用于紊流三个区的综合公式。当 Re 很小时括号内的第一项可忽略，公式实际上成为布拉修斯光滑区公式(4-6-5)。即

$$\lambda=0.11\left(\frac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0.25}=0.1\left(\frac{100}{\mathrm{Re}}\right)^{0.25}=\frac{0.3164}{\mathrm{Re}^{0.25}}$$



沿程阻力系数λ
相对粗糙 $\frac{K}{d}$
雷诺数Re
粗糙区
过渡区
临界区
光滑区
层流区
$\lambda=\frac{64}{Re}$
Reκ

图4-14 莫迪图

当 Re 很大时，括号内第二项可忽略，公式和粗糙区的希弗林松公式(4-6-6)一致。

布拉修斯光滑区和尼古拉兹光滑区公式在 $Re<10^5$ 是基本一致的，而希弗林松粗糙区公式和尼古拉兹粗糙区公式也十分接近。因此阿里特苏里公式和柯氏公式基本上也是一致的。

【例 4-6】 在管径 $d=100mm$，管长 $l=300m$ 的圆管中，流动着 $t=10℃$ 的水，其雷诺数 $Re=80000$，试分别求下列三种情况下的水头损失。

(1) 管内壁为 $K=0.15mm$ 的均匀砂粒的人工粗糙管。

(2) 为光滑铜管(即流动处于紊流光滑区)。

(3) 为工业管道，其当量糙粒高度 $K=0.15mm$。

【解】 (1) $K=0.15mm$ 的人工粗糙管的水头损失

根据 $Re=80000$ 和 $K/d=0.15/100=0.0015$

查图 4-11 得，$\lambda=0.02$。$t=10℃$ 时，

$\nu=1.3\times10^{-6}m^2/s$。由(4-2-1)式，$Re=\frac{vd}{\nu}$，$80000=\frac{v\times0.1}{1.3\times10^{-6}}$，得 $v=1.04m/s$。由(4-1-1)式，

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.02\times\frac{300}{0.1}\times\frac{1.04^2}{2g}=3.31m$$

(2) 光滑黄铜管的沿程水头损失

在 $Re<10^5$ 时可用布拉修斯公式(4-6-5)

$$\lambda=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}=\frac{0.3164}{(80000)^{0.25}}=0.0188$$

由图 4-11 或图 4-14 可得出基本一致的结果。

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.0188\times\frac{300}{0.1}\times\frac{1.04^2}{2g}=3.12m$$

(3) $K=0.15mm$ 工业管道的沿程水头损失。

根据 $Re=80000$，$K/d=0.15/100=0.0015$，

由图 4-14 得 $\lambda\simeq0.024$。

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.024\times\frac{300}{0.1}\times\frac{1.04^2}{2g}=3.97m$$

【例 4-7】 在管径 $d=300mm$，相对粗糙度 $K/d=0.002$ 的工业管道内，运动粘滞系数 $\nu=1\times10^{-6}m^2/s$，$\rho=999.23kg/m^3$ 的水以 3m/s 的速度运动。试求：

管长 $l=300m$ 的管道内的沿程水头损失 h_f。

【解】 沿程水头损失 h_f

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{3\times0.3}{10^{-6}}=9\times10^5$$

由图 4-14 查得，$\lambda=0.0238$，处于粗糙区。

也可用(4-6-4)式计算。

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{3.7d}{K}=2\lg\frac{3.7}{0.002}, \lambda=0.0235$$

可见查图和利用公式计算是很接近的。

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.0238\times\frac{300}{0.3}\times\frac{3^2}{2g}=10.8\text{m}$$

【例 4-8】 如管道的长度不变,允许的水头损失 h_f 不变,若使管径增大一倍,不计局部损失,流量增大 n 倍,试分别讨论下列三种情况:

(1) 管中流动为层流,$\lambda=\frac{64}{\text{Re}}$

(2) 管中流动为紊流光滑区,$\lambda=\frac{0.3164}{\text{Re}^{0.25}}$

(3) 管中流动为紊流粗糙区,$\lambda=0.11(K/d)^{0.25}$

【解】 (1) 流动为层流

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}=\frac{64}{\text{Re}}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}=\frac{128\nu l}{\pi g}\cdot\frac{Q}{d^4}$$

$$\text{令}\quad C_1=\frac{128\nu l}{\pi g}\qquad\text{则}\ h_f=C_1\frac{Q}{d^4}$$

可见层流中若 h_f 不变,则流量 Q 与管径的四次方成正比。即

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4$$

当 $d_2=2d_1$ 时,$Q_2/Q_1=16$,$Q_2=16Q_1$,

层流时管径增大一倍,流量为原来的 16 倍。

(2) 流动为紊流光滑区

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}=\frac{0.3164}{\left(\frac{vd}{\nu}\right)^{0.25}}\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}=\frac{0.3164\nu^{0.25}l}{2g\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1.75}}\cdot\frac{Q^{1.75}}{d^{4.75}}$$

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{1.75}=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{4.75},\qquad Q_2=(2)^{\frac{4.75}{1.75}}\cdot Q_1,\qquad Q_2=6.56Q_1$$

(3) 流动为紊流粗糙区

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}=0.11\left(\frac{K}{d}\right)^{0.25}\frac{l}{d}\frac{1}{2g}\frac{Q^2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2d^4}$$

$$=0.11\frac{K^{0.25}l}{2g\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\frac{Q^2}{d^{5.25}}$$

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{5.25},\qquad Q_2=(2)^{\frac{5.25}{2}}\cdot Q_1,\qquad Q_2=6.17Q_1$$

【例 4-9】 水箱水深 H,底部有一长为 L,直径为 d 的圆管(见图 4-15)。管道进口为流线形,进口水头损失可不计,管道沿程阻力系数 λ 设为常数。若 H、d、λ 给定。

(1) 什么条件下 Q 不随 L 而变?

(2) 什么条件下通过的流量 Q 随管长 L 的加大而增加?

(3) 什么条件下通过的流量 Q 随管长 L 的加大而减小?

【解】 列水箱水面与管道出口断面的能量方程。

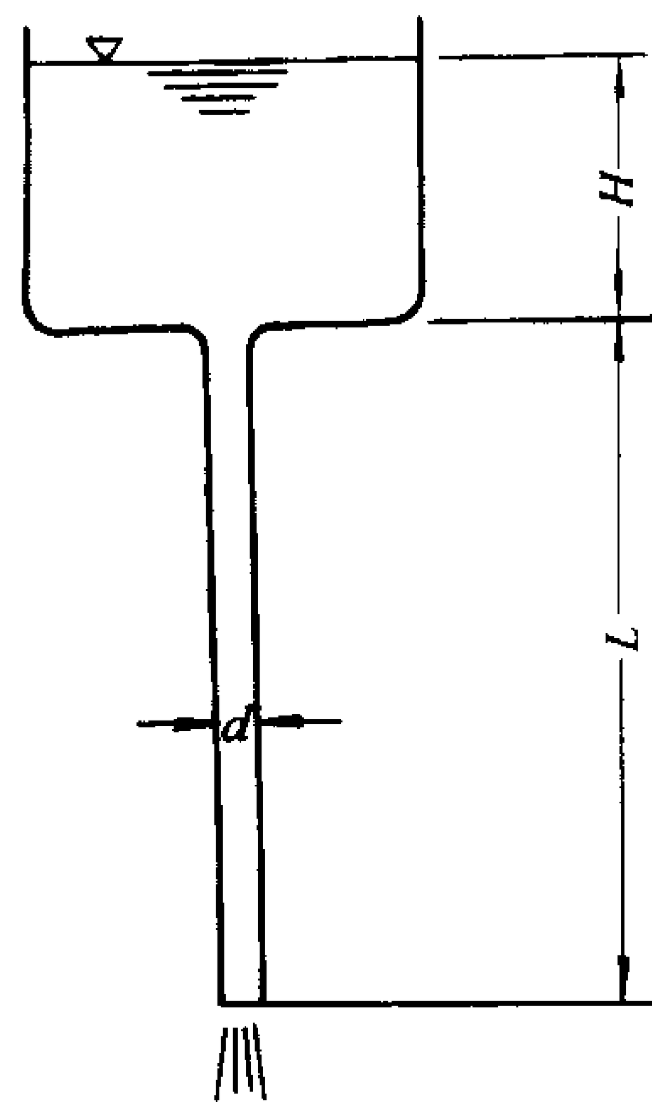


图 4-15

$$H+L=\left(1+\lambda\frac{L}{d}\right)\frac{v^2}{2g},v=\sqrt{\frac{2g(H+L)}{1+\frac{\lambda L}{d}}}$$

$$Q=\frac{\pi d^2}{4}v=\frac{\pi}{4}d^2\sqrt{\frac{2g(H+L)}{1+\frac{\lambda L}{d}}}$$

(1) 流量不随管长 L 而变,可令

$$\frac{dQ}{dL}=0$$

可得 $$\frac{\pi d^2}{4}\frac{1}{2\sqrt{\frac{2g(H+L)}{1+\frac{\lambda L}{d}}}}\cdot\frac{\left(1+\lambda\frac{L}{d}\right)2g+2g(H+L)\frac{\lambda}{d}}{\left(1+\lambda\frac{L}{d}\right)^2}=0$$

$$1-H\frac{\lambda}{d}=0$$

此即 $$H=\frac{d}{\lambda}$$

这就是管长与流量无关的条件。

(2) 流量随管长的加大而增加。

$$\frac{dQ}{dL}>0\qquad 1-H\frac{\lambda}{d}>0$$

即 $$H<d/\lambda$$

(3) 流量随管长的加大而减小

$$\frac{dQ}{dL}<0\qquad 1-H\frac{\lambda}{d}<0$$

即 $$H>\frac{d}{\lambda}$$

第七节　非圆管的沿程损失

以上讨论的都是圆管,圆管是最常用的断面形式。但工程上也常用到非圆管的情况。例如通风系统中的风道,有许多就是矩形的。如果设法把非圆管折合成圆管来计算,那么根据圆管制定的上述公式和图表,也就适用于非圆管了。这种由非圆管折合到圆管的方法是从水力半径的概念出发,通过建立非圆管的当量直径来实现的。

水力半径 R 的定义为过流断面面积 A 和湿周 χ 之比。

$$R=\frac{A}{\chi}\tag{4-7-1}$$

所谓湿周,即过流断面上流体和固体壁面接触的周界。

χ 和 A 是过流断面中影响沿程损失的两个主要因素。在紊流中,由于断面上的流速变化主要集中在邻近管壁的流层内,机械能转化为热能的沿程损失主要集中在这里。因此,流体所接触的壁面大小,也即湿周 χ 的大小,是影响能量损失的主要外因条件。若两种不同的

断面形式具有相同的湿周χ,平均的流速相同。则 A 越大,通过流体的数量就越多,因而单位重量流体的能量损失就越小。所以,沿程损失 h_f 和水力半径 R 成反比,水力半径 R 是一个基本上能反映过流断面大小、形状对沿程损失综合影响的物理量。

圆管的水力半径为,

$$R=\frac{A}{x}=\frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d}=\frac{d}{4}$$

边长为 a 和 b 的矩形断面水力半径为,

$$R=\frac{A}{x}=\frac{ab}{2(a+b)}$$

边长为 a 的正方形断面的水力半径为,

$$R=\frac{A}{x}=\frac{a^2}{4a}=\frac{a}{4}$$

令非圆管的水力半径 R 和圆管的水力半径$\frac{d}{4}$相等,即得当量直径的计算公式:

$$d_e=4R \qquad (4\text{-}7\text{-}2)$$

当量直径为水力半径的 4 倍。

因此,矩形管的当量直径为

$$d_e=\frac{2ab}{(a+b)} \qquad (4\text{-}7\text{-}3)$$

方形管的当量直径为

$$d_e=a \qquad (4\text{-}7\text{-}4)$$

有了当量直径,只要用 d_e 代替 d,不仅可用(4-1-1)式来计算非圆管的沿程损失,即

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\lambda\frac{l}{4R}\frac{v^2}{2g}$$

也可以用当量相对粗糙度 K/d_e 代入沿程损失系数 λ 公式中求 λ 值。计算非圆管的 Re 时,同样可以用当量直径 d_e 代替式中的 d。即

$$\text{Re}=\frac{vd_e}{\nu}=\frac{v(4R)}{\nu} \qquad (4\text{-}7\text{-}5)$$

这个 Re 也可以近似地用来判别非圆管中的流态,其临界雷诺数仍取 2000。

必须指出,应用当量直径计算非圆管的能量损失,并不适用于所有情况。这表现在两方面:

1. 图 4-16 所示的为非圆管和圆管 λ-Re 的对比试验。试验表明,对矩形、方形、三角形断面,使用当量直径原理,所获得的试验数据结果和圆管是很接近的,但长缝形和星形断面差别较大。非圆形截面的形状和圆形的偏差越小,则运用当量直径的可靠性就越大。

2. 由于层流的流速分布不同于紊流,沿程损失不象紊流那样集中在管壁附近。这样单纯用湿周大小作为影响能量损失的主要外因条件,对层流来说就不充分了。因此在层流中应用当量直径进行计算时,将会造成较大误差。如图 4-16 所示。

【例 4-10】 断面面积为 $A=0.48\text{m}^2$ 的正方形管道,宽为高的三倍的矩形管道和圆形管道。求

(1) 分别求出它们的湿周和水力半径;

(2) 正方形和矩形管道的当量直径。

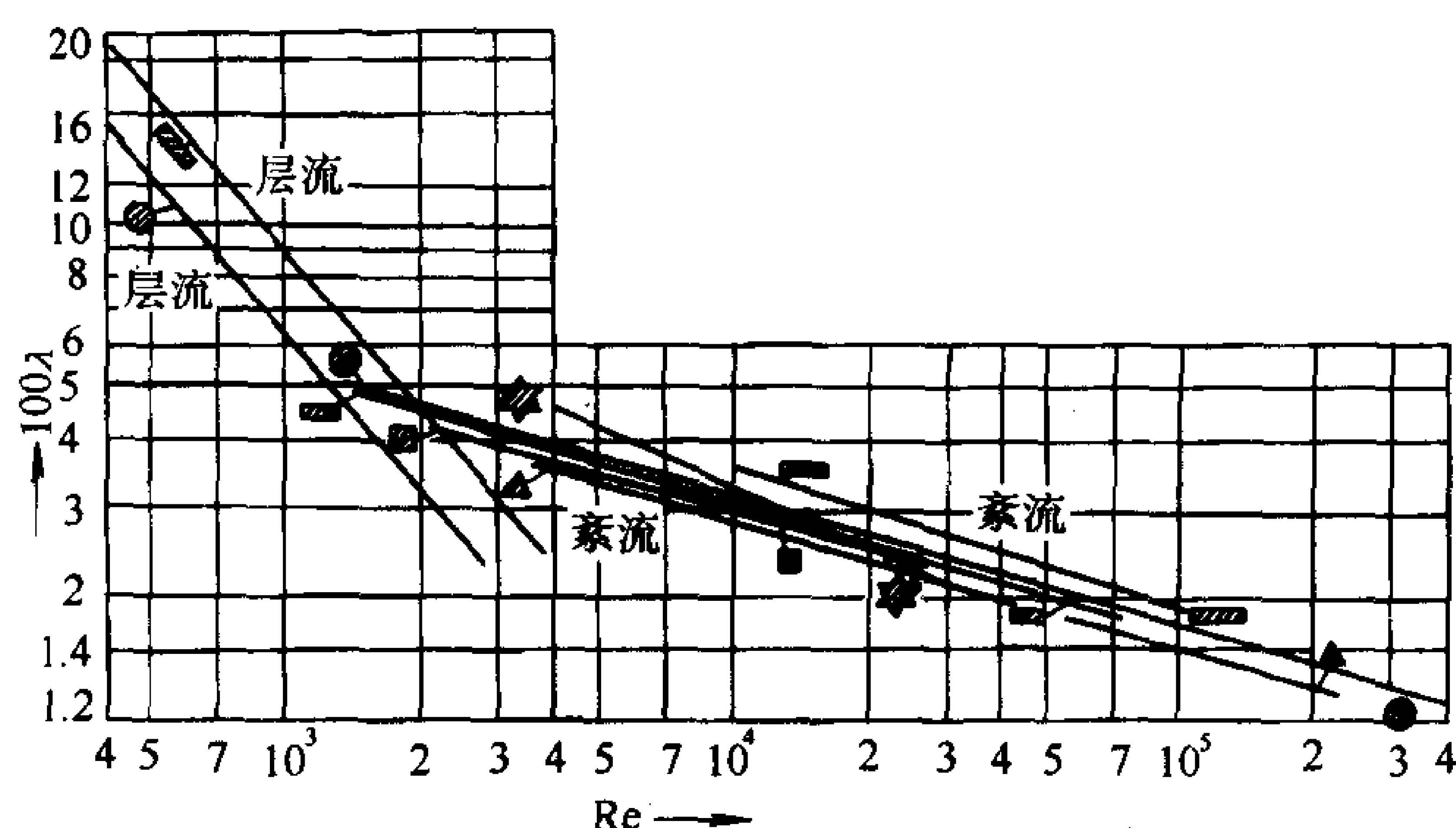


图 4-16　非圆管和圆管 λ 曲线的比较

【解】(1) 求湿周和水力半径

1) 正方形管道：

边长
$$a=\sqrt{A}=\sqrt{0.48}=0.692\text{m}$$

湿周
$$\chi=4a=4\times0.692=2.77\text{m}$$

水力半径
$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{0.48}{2.77}=0.174\text{m}$$

2) 矩形管道：

边长
$$a\times b=a\times3a=3a^2=A=0.48\text{m}^2$$

所以
$$a=\sqrt{\frac{A}{3}}=0.4\text{m}$$
$$b=3a=3\times0.4=1.2\text{m}$$

湿周
$$\chi=2(a+b)=2(0.4+1.2)=3.2\text{m}$$

水力半径
$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{0.48}{3.2}=0.15\text{m}$$

3) 圆形管道：

管径 d
$$\frac{\pi d^2}{4}=A=0.48\text{m}^2$$
$$d=\sqrt{\frac{4A}{\pi}}=\sqrt{\frac{4\times0.48}{3.14}}=0.78\text{m}$$

湿周
$$\chi=\pi d=3.14\times0.78=2.45\text{m}$$

水力半径
$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{0.48}{2.45}=0.195\text{m}$$

或
$$R=\frac{d}{4}=\frac{0.78}{4}=0.195\text{m}$$

以上计算说明，过流断面面积虽然相等，但因形状不同，湿周长短就不等。湿周越短，水力半径越大。沿程损失随水力半径的加大而减少。因此当流量和断面积等条件相同时，方形管道比矩形管道水头损失少，而圆形管道又比方形管道水头损失少。从减少水头损失的观点来看，圆形断面是最佳的。

(2) 正方形管道和矩形管道的当量直径

1) 正方形管道：

$$d_e=a=0.692\text{m}$$

2) 矩形管道：

$$d_e=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2\times0.4\times1.2}{0.4+1.2}=0.6\text{m}$$

【例 4-11】 某钢板制风道，断面尺寸为 400×200mm，管长 80m。管内平均流速 $v=10\text{m/s}$。空气温度 $t=20℃$，求压强损失 p_f。

【解】 (1) 当量直径

$$d_e=\frac{2ab}{(a+b)}=\frac{2\times0.2\times0.4}{0.2+0.4}=0.267\text{m}$$

(2) 求 Re 查表，$t=20℃$ 时，$\nu=15.7\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$

$$\text{Re}=\frac{vd_e}{\nu}=\frac{10\times0.267}{15.7\times10^{-6}}=1.7\times10^5$$

(3) 求 K/d 钢板制风道，$K=0.15\text{mm}$

$$\frac{K}{d_e}=\frac{0.15\times10^{-3}}{0.267}=5.62\times10^{-4}$$

查图 4-14 得 $\lambda=0.0195$

(4) 计算压强损失

$$p_f=\lambda\frac{l}{d_e}\frac{\rho v^2}{2}=0.0195\times\frac{80}{0.267}\times\frac{1.2\times10^2}{2}=350\text{N/m}^2$$

第八节 管道流动的局部损失

各种工业管道都要安装一些阀门、弯头、三通……等配件，用以控制和调节管内的流动。流体经过这类配件时，由于边壁或流量的改变，均匀流在这一局部地区遭到破坏，引起了流速的大小、方向或分布的变化。由此产生的能量损失，称为局部损失。工程上有不少管道(譬如通风和采暖管道)，局部损失往往占有很大比重。要准确掌握这类管道中的流动，就不能忽视局部损失的计算。

局部损失的种类繁多，体形各异，其边壁的变化大多比较复杂，加以紊流本身的复杂性，多数局部阻碍的损失计算，还不能从理论上解决，必须借助于由实验得来的经验公式或系数。虽然如此，对局部阻力和局部损失的规律进行一些定性的分析还是必要的。它虽然解决不了局部损失的计算问题，但是对解释和估计不同局部阻碍的损失大小，研究改善管道工作条件和减少局部损失的措施，以及提出正确、合理的设计方案等方面，都能给我们以定性的指导。

一、局部损失的一般分析

和沿程损失相似，局部损失一般也用流速水头的倍数来表示，它的计算公式为：

$$h_m=\zeta\frac{v^2}{2g} \tag{4-8-1}$$

ζ 称为局部阻力系数。由上式可以看出，求 h_m 的问题就转变为求 ζ 的问题了。

实验研究表明，局部损失和沿程损失一样，不同的流态遵循不同的规律。如果流体以层流经过局部阻碍，而且受干扰后流动仍能保持层流的话，局部损失也还是由各流层之间的粘性切应力引起的。只是由于边壁的变化，促使流速分布重新调整，流体质点产生剧烈变形，加强了相邻流层之间的相对运动，因而加大了这一局部地区的水头损失。这种情况下，局部

阻力系数与雷诺数成反比,即

$$\zeta=\frac{B}{\mathrm{Re}} \tag{4-8-2}$$

式中,B 是随局部阻碍的形状而异的常数。此式表明,层流的局部损失也与平均流速的一次方成正比。

不过,要使局部阻碍处受边壁强烈干扰的流动仍能保持层流,只有当 Re 远比 2000 为小的情况下才有可能。这样小的 Re 在供热通风专业中是很少遇到的。因此,这一节主要讨论紊流的局部损失。

局部阻碍的种类虽多,如分析其流动的特征,主要的也不过是过流断面的扩大或收缩,流动方向的改变,流量的合入与分出等几种基本形式,以及这几种基本形式的不同组合。例如,经过闸阀或孔板的流动,实质上就是突缩和突扩的组合。为了探讨紊流局部损失的成因,我们选取几种典型的流动(见图 4-17),分析局部阻碍附近的流动情况。

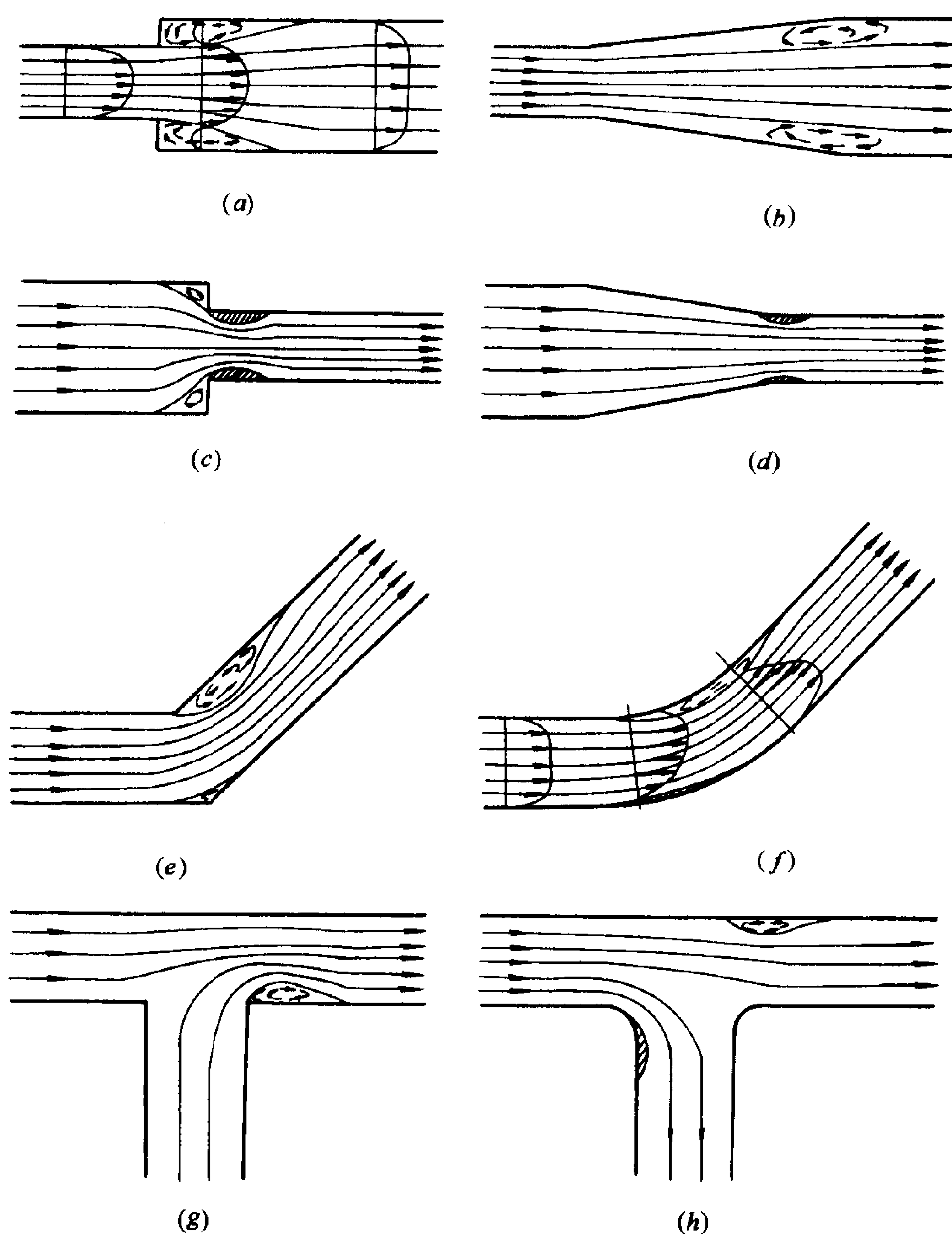


图 4-17 几种典型的局部阻碍
(a)突扩管;(b)渐扩管;(c)突缩管;(d)渐缩管;(e)折弯管;(f)圆弯管;
(g)锐角合流三通;(h)圆角分流三通

从边壁的变化缓急来看，局部阻碍又分为突变的和渐变的两类：图 4-17 中的 a、c、e、g 是突变的，而 b、d、f、h 是渐变的。当流体以紊流通过突变的局部阻碍时，由于惯性力处于支配地位，流动不能像边壁那样突然转折，于是在边壁突变的地方，出现主流与边壁脱离的现象。主流与边壁之间形成旋涡区，旋涡区内的流体并不是固定不变的。形成的大尺度旋涡，会不断地被主流带走，补充进去的流体，又会出现新的旋涡，如此周而复始。

边壁虽然无突然变化，但沿流动方向出现减速增压现象的地方，也会产生旋涡区。图 4-17b 所示的渐扩管中，流速沿程减小，压强不断增加。在这样的减速增压区，流体质点受到与流动方向相反的压差作用，靠近管壁的流体质点，流速本来就小。在这一反向压差的作用下，速度逐渐减小到零。随后出现了与主流方向相反的流动。就在流速等于零的地方，主流开始与壁面脱离。在出现反向流动的地方形成了旋涡区。图 4-17h 所示的分流三通直通管上的旋涡区，也是这种减速增压过程造成的。对于渐变流的局部阻碍，在一定的 Re 范围内，旋涡区的位置及大小与 Re 有关。例如在渐扩管中，随着 Re 的增长，旋涡区的范围愈大，位置愈靠前。但在突变的局部阻碍中，旋涡区的位置不会变，Re 对旋涡区大小的影响也没有那样显著。

在减压增速区，流体质点受到与流动方向一致的正压差作用，它只能加速，不能减速。因此，渐缩管内不会出现旋涡区。不过，如收缩角不是很小，紧接渐缩管之后，有一个不大的旋涡区。如图 4-17d 所示。

流体经过弯管时（图 4-17e、f），虽然过流断面沿程不变，但弯管内流体质点受到离心力作用，在弯管前半段，外侧压强沿程增大，内侧压强沿程减小；而流速是外侧减小，内侧增大。因此，弯管前半段沿外壁是减速增压的，也能出现旋涡区；在弯管的后半段，由于惯性作用，在 Re 较大和弯管的转角较大而曲率半径较小的情况下，旋涡区又在内侧出现。弯管内侧的旋涡，无论是大小还是强度，一般都比外侧的大。因此，它是加大弯管能量损失的重要因素。

把各种局部阻碍的能量损失和局部阻碍附近的流动情况对照比较，可以看出，无论是改变流速的大小，还是改变它的方向，较大的局部损失总是和旋涡区的存在相联系。旋涡区愈大，能量损失也愈大。如边壁变化仅使流体质点变形和流速分布改组，不出现旋涡区，其局部损失一般都比较小。

旋涡区内不断产生着旋涡，其能量来自主流，因而不断消耗主流的能量；在旋涡区及其附近，过流断面上的流速梯度加大，如图 4-17a 所示，也使主流能量损失有所增加。在旋涡被不断带走并扩散的过程中，加剧了下游一定范围内的紊流脉动，从而加大了这段管长的能量损失。

事实上，在局部阻碍范围内损失的能量，只占局部损失中的一部分。另一部分是在局部阻碍下游一定长度的管段上损耗掉的。这段长度称为局部阻碍的影响长度。受局部阻碍干扰的流动，经过了影响长度之后，流速分布和紊流脉动才能达到均匀流动的正常状态。

对各种局部阻碍进行的大量实验研究表明，紊流的局部阻力系数 ζ 一般说来决定于局部阻碍的几何形状、固体壁面的相对粗糙和雷诺数。即

$$\zeta = f(\text{局部阻碍形状，相对粗糙，Re})$$

但在不同情况下，各因素所起的作用不同。局部阻碍形状始终是一个起主导作用的因素。相对粗糙的影响，只有对那些尺寸较长（如圆锥角小的渐扩管或渐缩管，曲率半径大的弯

管)，而且相对粗糙较大的局部阻碍才需要考虑。Re 对 ζ 的影响则和 λ 类似：随着 Re 由小变大，ζ 一般逐渐减小；当 Re 达到一定数值后，ζ 几乎与 Re 无关，这时局部损失与流速的平方成正比，流动进入阻力平方区。不过，由于边壁的干扰，局部损失进入阻力平方区的 Re 远比沿程损失小。特别是突变的局部阻碍，当流动变为紊流后，很快就进入了阻力平方区。这类局部阻碍的 ζ 值，实际上只决定于局部阻碍的形状。对于渐变的局部阻碍，进入阻力平方区的 Re 要大一些，大致可取 $Re>2\times10^5$ 作为流动进入阻力平方区的临界指标。如 $Re<2\times10^5$ 还应考虑 Re 的影响，其局部阻力系数可用(4-8-3)式修正。

$$\zeta=\zeta'\frac{\lambda}{\lambda'} \tag{4-8-3}$$

式中 ζ——未进入阻力平方区的局部阻力系数；

ζ'——该局部阻碍在阻力平方区的局部阻力系数；

λ——与 ζ 同一 Re 的沿程阻力系数；

λ'——进入阻力平方区的沿程阻力系数。

比较沿程损失和局部损失的变化规律，很明显，它们是十分相似的。为什么似乎是完全不同的两类阻力的水头损失规律会如此一致呢？原因就在于形成这两类损失的机理并没有什么本质的不同。恩格斯在分析机械运动消失的形态时曾经指出："……摩擦和碰撞——这二者仅仅在程度上有所不同。摩擦可以看作一个跟着一个和一个挨着一个发生的一连串小的碰撞；碰撞可以看作集中于一个瞬间和一个地方的摩擦。摩擦是缓慢的碰撞，碰撞是激烈的摩擦"[1]。这段话也适用于流体的机械能损失过程，它揭示了沿程阻力和局部阻力之间的本质联系。突露在紊流核心里的每个糙粒，都是产生微小旋涡的根源，可以看成是一个个微小的局部阻碍。因此，沿程阻力可以看成是无数微小局部阻力的总和，而局部阻力也可以说是沿程阻力的局部扩大。不管它们在形式上有什么不同，本质上都是由紊流掺混作用引起的惯性阻力和粘性阻力造成的。

二、变管径的局部损失

现在分别讨论几种典型的局部损失，首先是改变流速大小的各种变管径的水头损失。

(一) 突然扩大

有少数体形简单的局部阻碍，可以借助于基本方程求得它的阻力系数，突然扩大就是其中的一个。

图 4-18 为圆管突然扩大处的流动。取流股将扩未扩的Ⅰ-Ⅰ断面和扩大后流速分布与紊流脉动已接近均匀流正常状态的Ⅱ-Ⅱ断面列能量方程，如两断面间的沿程水头损失忽略不计，则

$$h_m=\left(Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{a_1v_1^2}{2g}\right)-\left(Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{a_2v_2^2}{2g}\right)$$

为了确定压强与流速的关系，再对Ⅰ,Ⅱ两断面与管壁所包围的流动空间写出沿流动方向的动量方程：

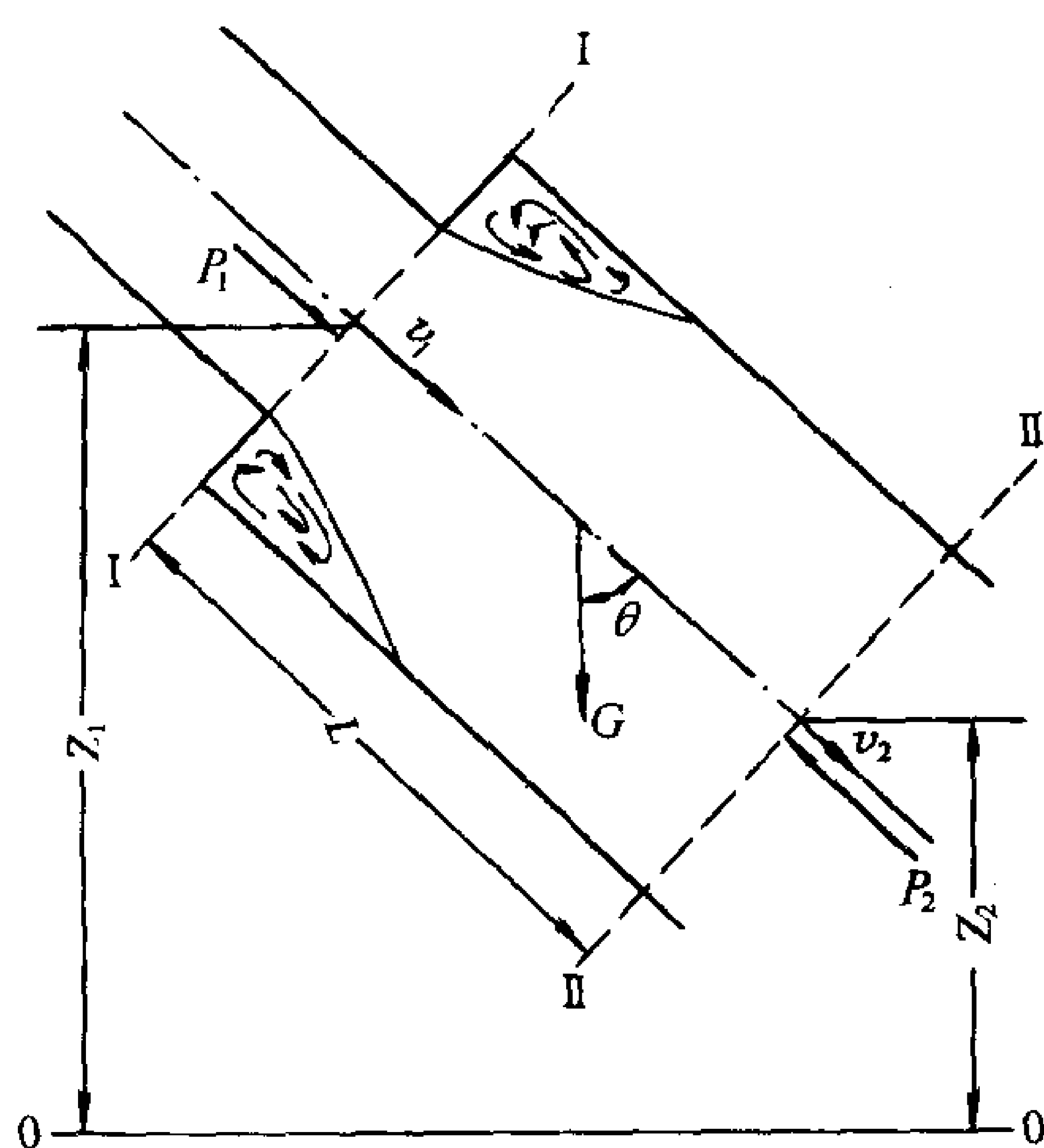


图 4-18 突然扩大

[1] 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版第 90 页。

$$\Sigma F=\frac{\gamma Q}{g}(\alpha_{02}v_2-\alpha_{01}v_1)$$

式中，ΣF 为作用在所取流体上的全部轴向外力之和，其中包括：

1. 作用在Ⅰ断面上的总压力 P_1。应指出，Ⅰ断面的受压面积不是 A_1，而是 A_2。其中的环形部分位于旋涡区。观察表明，这个环形面积上的压强基本上符合静压强分布规律，故

$$P_1=p_1A_2$$

2. 作用在Ⅱ断面上的总压力，$P_2=p_2A_2$

3. 重力在管轴上的投影，

$$G\cos\theta=\gamma A_2 l\frac{Z_1-Z_2}{l}=\gamma A_2(Z_1-Z_2)$$

4. 边壁上的摩擦阻力忽略不计。

因此，

$$p_1A_2-p_2A_2+\gamma A_2(Z_1-Z_2)=\frac{\gamma Q}{g}(\alpha_{02}v_2-\alpha_{01}v_1)$$

将 $Q=v_2A_2$ 代入，化简后得：

$$\left(Z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(Z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)=\frac{v_2}{g}(\alpha_{02}v_2-\alpha_{01}v_1)$$

将上式代入能量方程式，

$$h_m=\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}-\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\frac{v_2}{g}(\alpha_{02}v_2-\alpha_{01}v_1)$$

对于紊流，可取 $\alpha_{01}=\alpha_{02}=1,\alpha_1=\alpha_2=1$。

由此可得，

$$h_m=\frac{(v_1-v_2)^2}{2g} \tag{4-8-4}$$

上式表明，突然扩大的水头损失等于以平均流速差计算的流速水头。

要把(4-8-4)式变换成计算局部损失的一般形式只需将 $v_2=v_1\frac{A_1}{A_2}$，或 $v_1=v_2\times\frac{A_2}{A_1}$ 代入。

$$\left.\begin{aligned}h_m&=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2\frac{v_1^2}{2g}=\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}\\ h_m&=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}=\zeta_2\frac{v_2^2}{2g}\end{aligned}\right\} \tag{4-8-5}$$

所以突然扩大的阻力系数为：

$$\zeta_1=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad \text{或}\ \zeta_2=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2 \tag{4-8-6}$$

突然扩大前后有两个不同的平均流速，因而有两个相应的阻力系数。计算时必须注意使选用的阻力系数与流速水头相适应。

当液体从管道流入断面很大的容器中或气体流入大气时，$\frac{A_1}{A_2}\approx 0,\zeta_1=1$。这是突然扩大的特殊情况，称为出口阻力系数。

（二）渐扩管

突然扩大的水头损失较大。如改用图 4-19 所示的渐扩管，水头损失将大大减少。

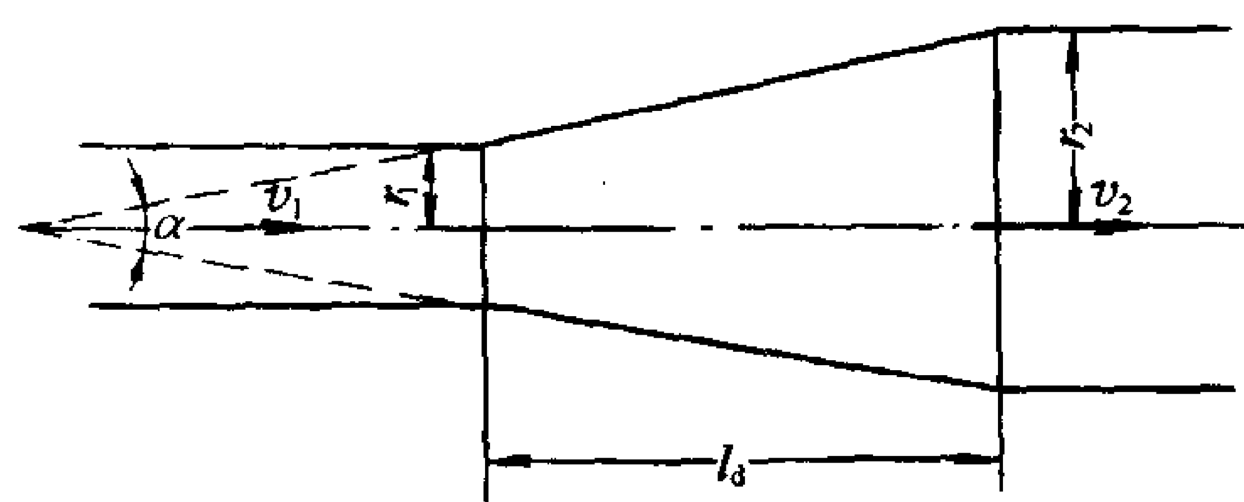


图 4-19 渐扩管

圆锥形渐扩管的形状可由扩大面积比 $n=\frac{A_2}{A_1}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$,和扩散角 $\alpha\left(\text{或长径比}\frac{l_d}{r_1}\right)$这两个几何参数来确定。

渐扩管的水头损失可认为由摩擦损失 h_f 和扩散损失 h_{ea}两部分组成,其摩擦损失可按下式计算:

$$h_f=\frac{\lambda}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{v_1^2}{2g} \qquad (4\text{-}8\text{-}7)$$

式中,λ 为扩大前管道的沿程阻力系数。

扩散损失是旋涡区和流速分布改组所形成的损失。仍沿用突然扩大的水头损失公式计算,但需乘一个与扩散角有关的系数 k,当

$\alpha\leqslant 20°$时,$k=\sin\alpha$,故

$$h_{ea}=k\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\frac{v_1^2}{2g} \qquad (4\text{-}8\text{-}8)$$

由此得到渐扩管的阻力系数 ζ_d 为

$$\zeta_d=\frac{\lambda}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+k\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (4\text{-}8\text{-}9)$$

当 n 一定时,渐扩管的摩擦损失随 α 的增大和管段的缩短而减少,但扩散损失却随之增大。因此渐扩管的总损失在某一 α 角时必有一极值。这个最小水头损失扩散角约在5°~8°范围内,所以扩散角 α 最好不超过 8°~10°。

(三) 突然缩小

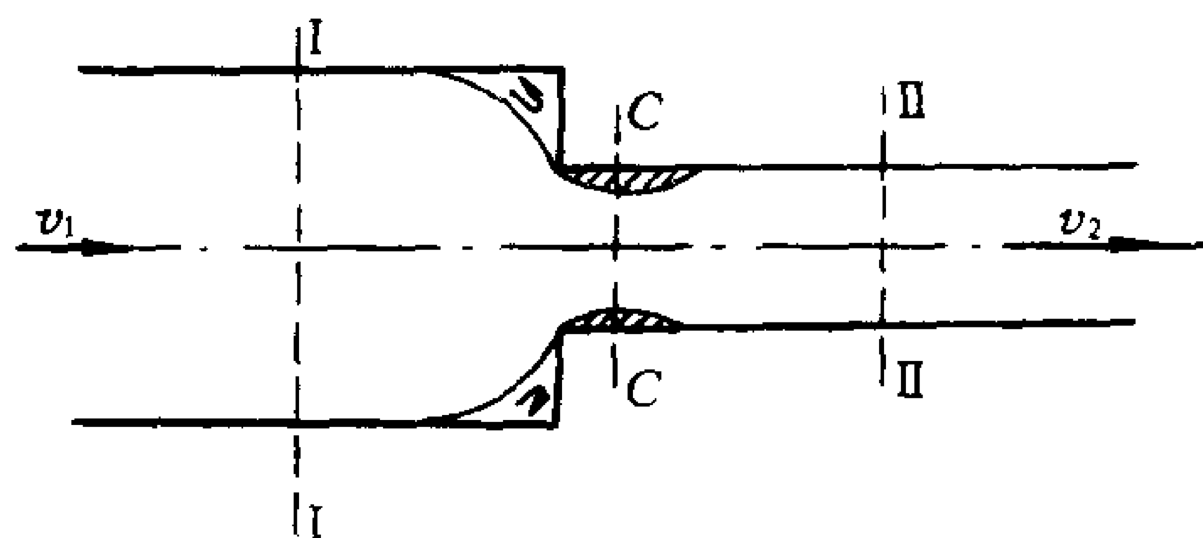


图 4-20 突然收缩

突然缩小如图 4-20 所示,它的水头损失大部分发生在收缩断面 C-C 后面的流段上,主要是收缩断面附近的旋涡区造成的。突然缩小的阻力系数决定于收缩面积比 A_2/A_1,其值可按下式计算。对应的流速水头为$\frac{v_2^2}{2g}$。

$$\zeta=0.5\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right) \qquad (4\text{-}8\text{-}10)$$

(四) 渐缩管

圆锥形渐缩管如图 4-21 所示,它的形状由面积比 $n=\frac{A_1}{A_2}$和收缩角 α 这两个几何参数确定。其阻力系数可由图 4-22 查得。对应的流速水头为$\frac{v_2^2}{2g}$。

(五) 管道进口

管道进口也是一种断面收缩,其阻力系数与管道进口边缘的情况有关。不同边缘的进口阻力系数见图 4-23。

三、弯管的局部损失

弯管是另一种典型的局部阻碍。它只改变流动方向,不改变平均流速的大小。

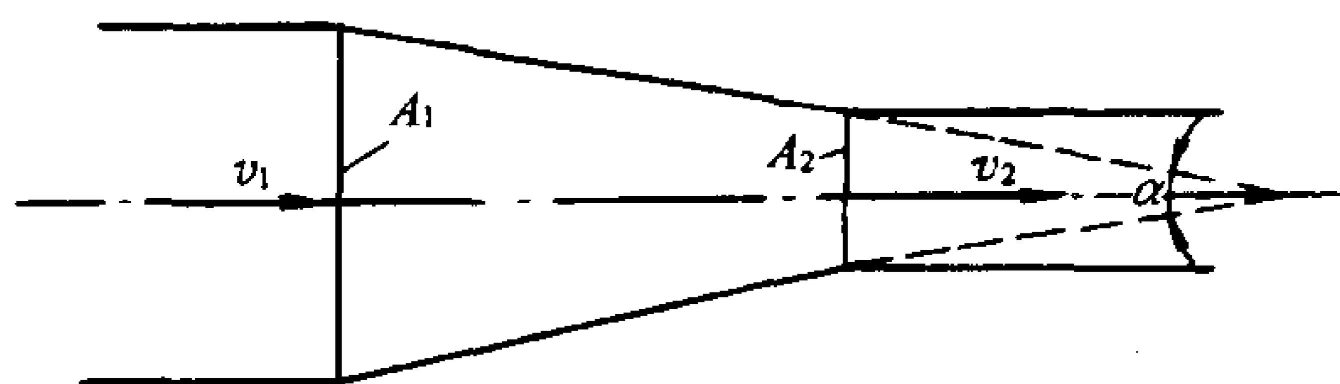


图 4-21　渐缩管

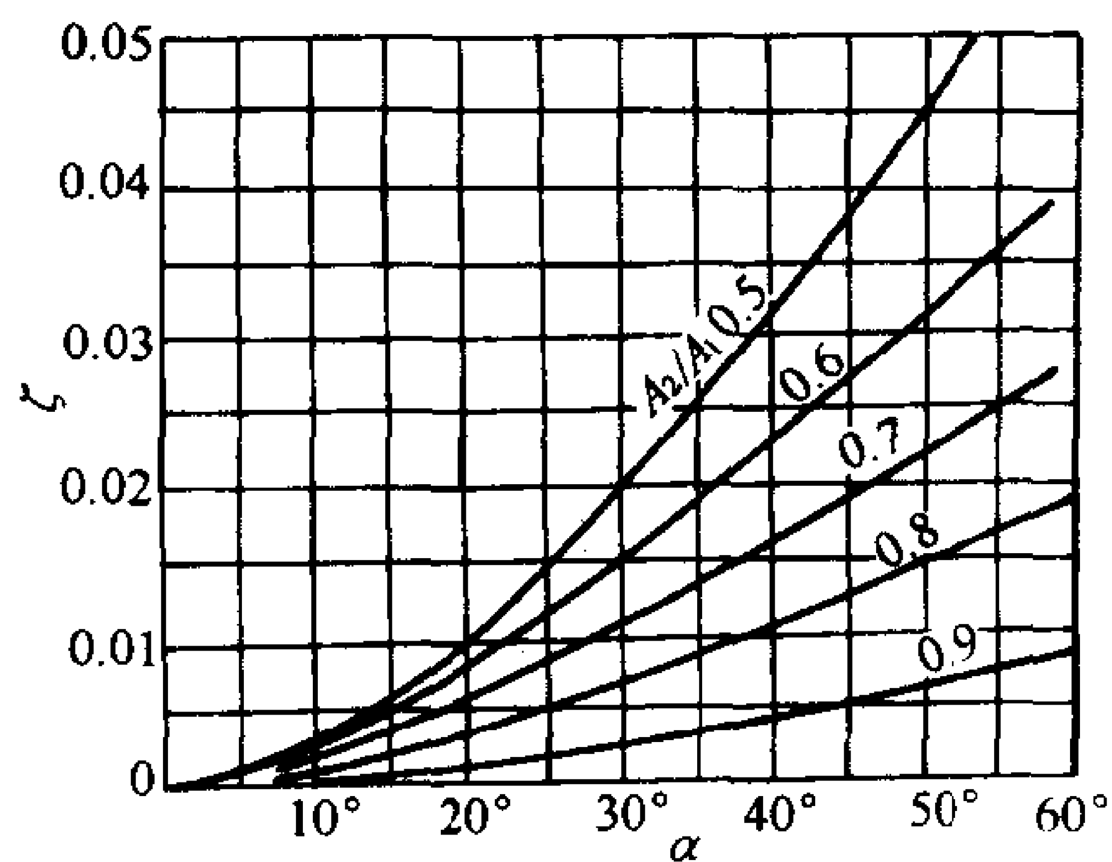


图 4-22　圆锥形渐缩管的阻力系数

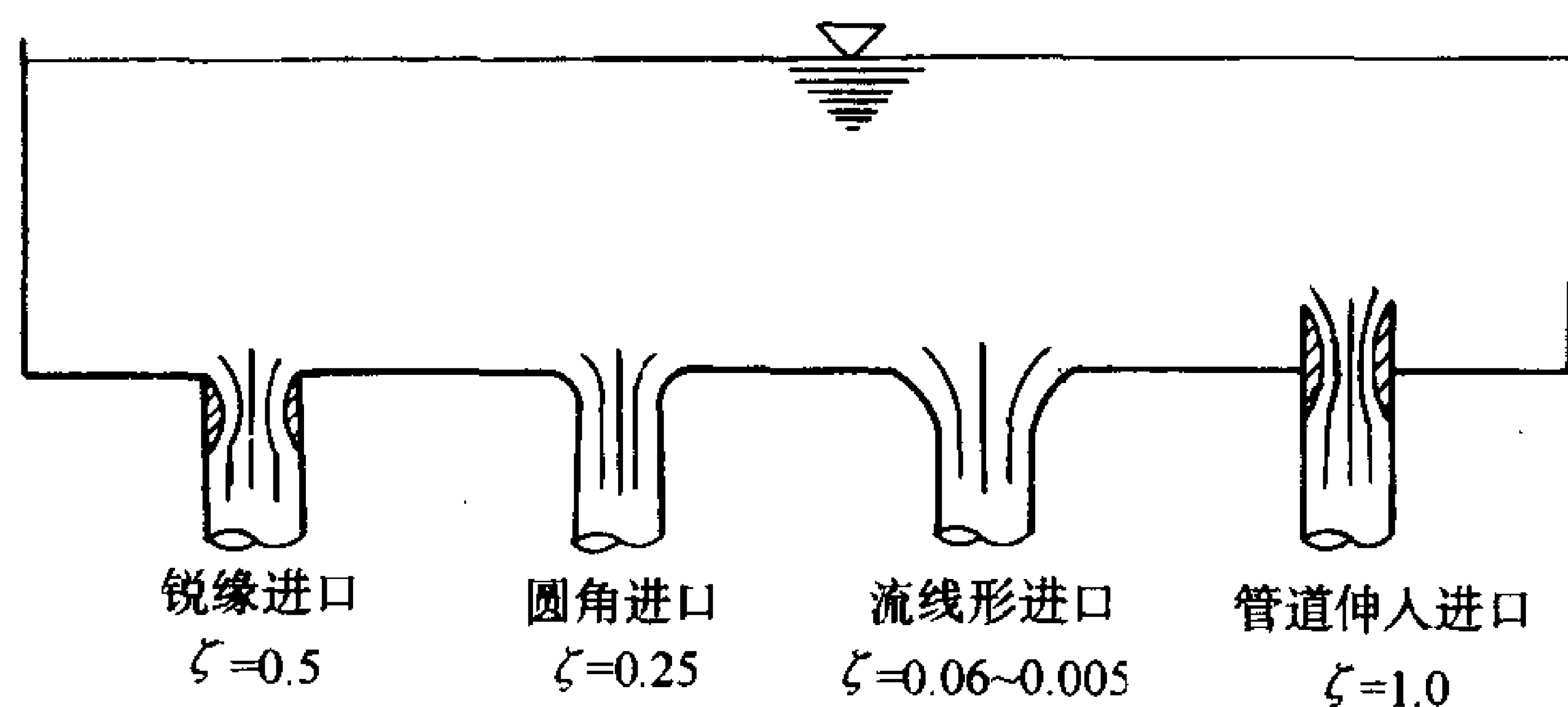


图 4-23　几种不同的管道进口

方向的改变不仅使弯管的内侧和外侧可能出现如前所述的两个旋涡区，而且还产生了如下所述的二次流现象。沿着弯道运动的流体质点具有离心惯性力，它使弯管外侧(图4-24中 E 处)的压强增大，内侧(H 处)的压强减小。而弯管左右两侧(F、G 处)由于靠管壁附近处的流速很小，离心力也小，压强的变化不大。于是沿图中的 EFH 和 EGH 方向出现了自外向内的压强坡降。在它的作用下，弯管内产生了一对如图所示的涡流。这个二次流和主流迭加在一起，使通过弯管的流体质点作螺旋运动，这也加大了弯管的水头损失。

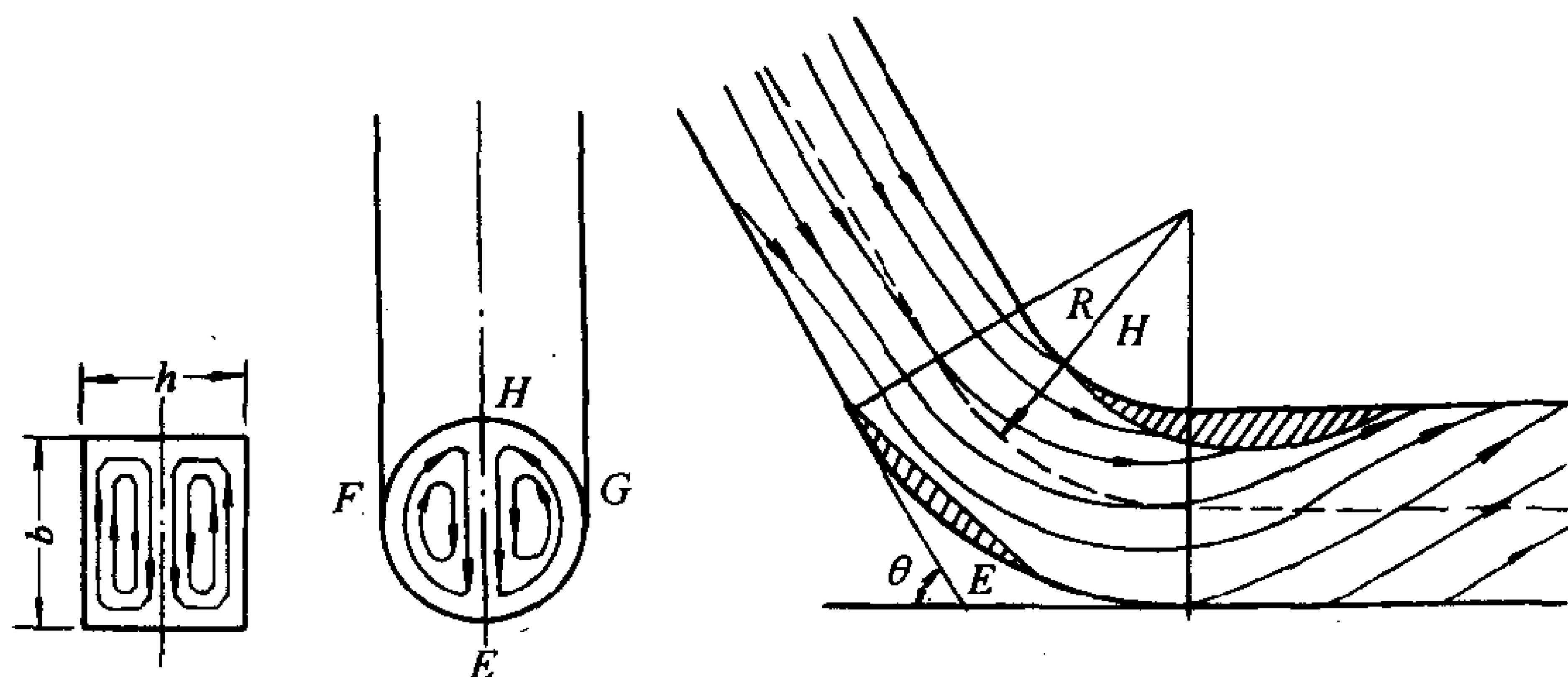


图 4-24　弯管中的二次流

在弯管内形成的二次流，消失较慢，因而加大了弯管后面的影响长度。弯管的影响长度最大可超过 50 倍管径。

弯管的几何形状决定于转角 θ 和曲率半径与管径之比 R/d(或 R/b)。对矩形断面的弯管还有高宽比 h/b。表 4-2 给出了 $Re=10^6$ 时四种断面形状的弯管在不同 θ 角和 R/d(或 R/b)比的阻力系数。

Re = 10^6 时弯管的 ζ 值　　表 4-2

序　号	断面形状	R/d(或 R/b)	30°	45°	60°	90°
1	圆　形	0.5 1.0 2.0	0.120 0.058 0.066	0.270 0.100 0.089	0.480 0.150 0.112	1.000 0.246 0.159
2	方　形 $h/b=1.0$	0.5 1.0 2.0	0.120 0.054 0.051	0.270 0.079 0.078	0.480 0.130 0.102	1.060 0.241 0.142
3	矩　形 $h/b=0.5$	0.5 1.0 2.0	0.120 0.058 0.062	0.270 0.087 0.088	0.480 0.135 0.112	1.000 0.220 0.155
4	矩　形 $h/b=2.0$	0.5 1.0 2.0	0.120 0.042 0.042	0.280 0.081 0.063	0.480 0.140 0.083	1.080 0.227 0.113

注：表中数据选自 D.S.Miller 著《Internal Flow》图 3.2.1-3.2.4。

分析以上数据，可以看出：

1. R/d 对管弯阻力系数的影响很大。尤其是在 $\theta>60°$ 和 $R/d<1$ 的情况下，进一步减小 R/d 会使 ζ 值急剧增大；

2. R/d(或 R/b)较小时，断面形状对弯管阻力系数影响不大。例如 R/d(或 R/b) = 0.5 时，各 ζ 值几乎相等。R/b(或 R/b) = 1 时，表中 90°弯管的 ζ 值变化幅度也不超过 ±6.0%；

3. 当 R/b 较大时，h/b 大的矩形断面，弯管阻力系数要小些。

四、三通的局部损失

三通也是最常见的一种管道配件，它的形式很多。工程上常用的三通有两类：支流对称于总流轴线的“Y”形三通；在直管段上接出支管的“T”形三通(图 4-25)。每个三通又都可以在分流或合流的情况下工作。

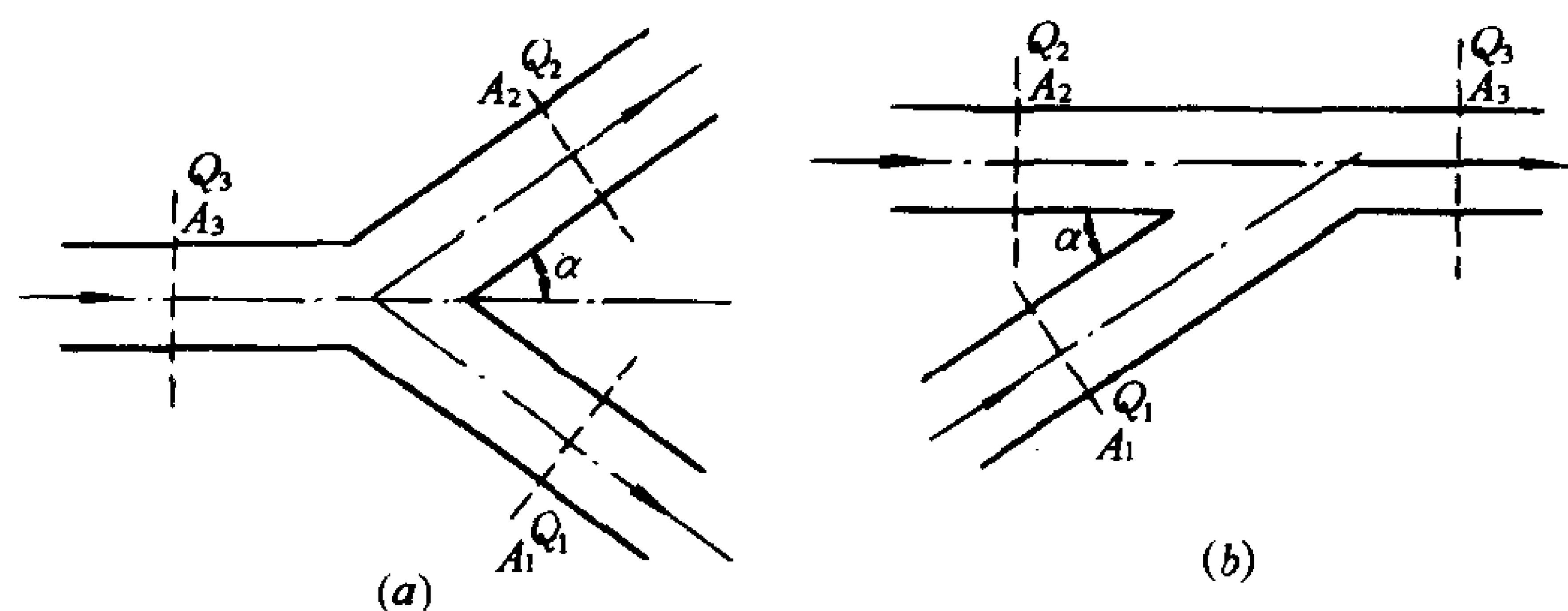


图 4-25　三通的两种主要类型
(a)“Y”形分流三通；(b)“T”形合流三通

三通的形状是由总流与支流间的夹角 α 和面积比 $\frac{A_1}{A_3}$、$\frac{A_2}{A_3}$ 这几个几何参数确定的。但三通的特征是它的流量前后有变化。因此，三通的阻力系数不仅决定于它的几何参数，还与流量比 Q_1/Q_3 或 Q_2/Q_3 有关。

三通有两个支管,所以有两个局部阻力系数。三通前后又有不同的流速,计算时必须选用和支管相应的阻力系数,以及和该系数相应的流速水头。

各种三通的局部阻力系数可在有关专业手册中查得,这里仅给出 $A_1=A_2=A_3$ 和 $\alpha=45°,90°$的"T"形三通的 ζ 值(图 4-26),相应的是总管的流速水头$\frac{v_2^3}{2g}$。

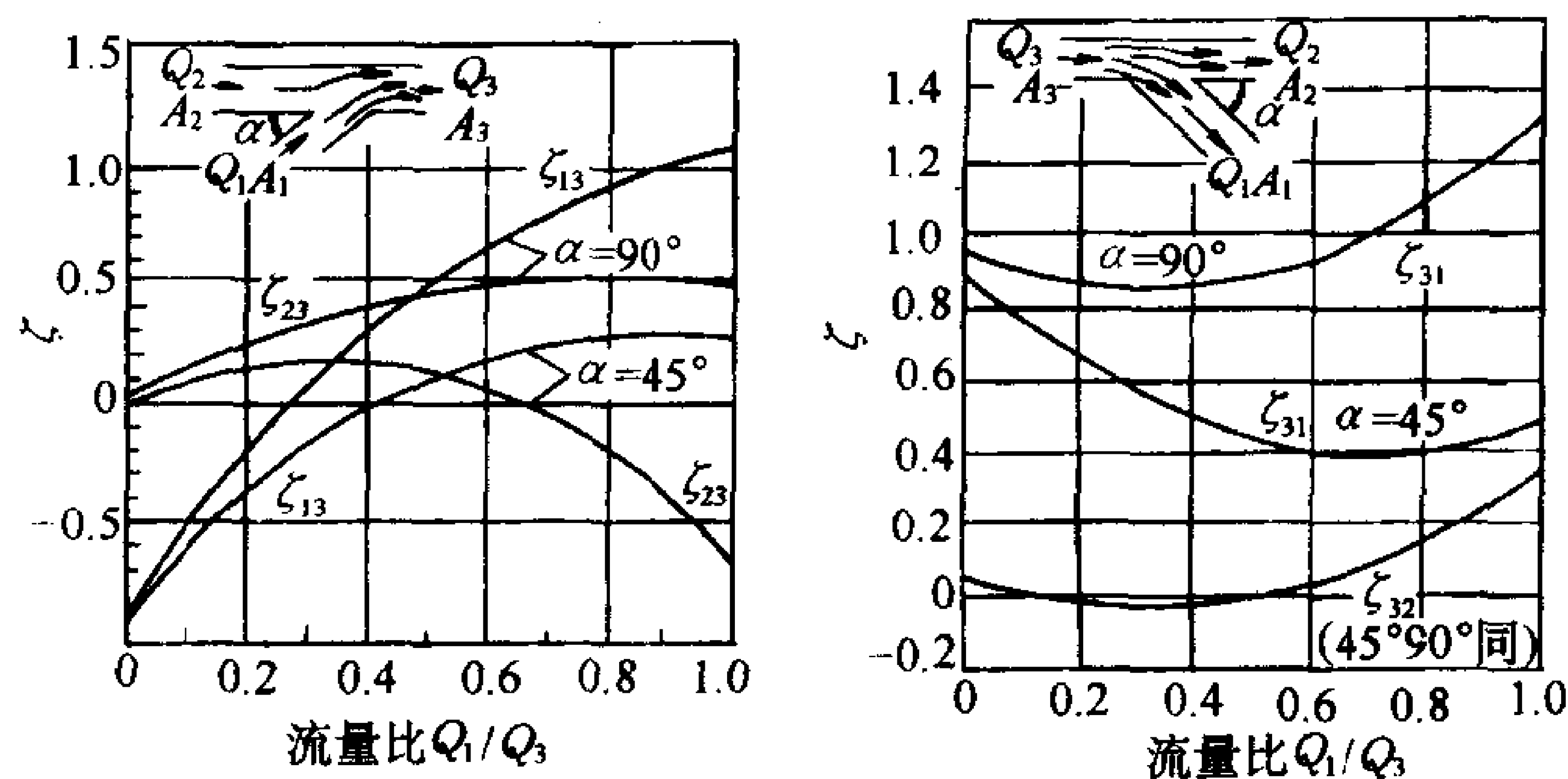


图 4-26　45°和 90°的"T"三通的 ζ 值

合流三通的局部阻力系数常出现负值,这意味着经过三通后流体的单位能量不仅没有减少,反而增加了。合流时出现的这种现象是不难理解的。当两股流速不同的流股汇合后,它们在混合的过程中,必然会有动量的交换。高速流股将它的一部分动能传递给了低速流股,使低速流股中的单位能量有所增加。如低速流股获得的这部分能量超过了它在流经三通所损失的能量,低速流股的损失系数就会出现负值。至于两股流动的总能量,则只可能减少,不可能增加。所以三通两个支管的阻力系数,绝不会同时出现负值。

五、局部阻力之间的相互干扰

局部阻碍前的断面流速分布和脉动强度对局部阻力系数 ζ 有明显的影响。而一般手册上或书上给出的 ζ 值是在局部阻碍的前后都有足够长的直管段,使进入和流出局部阻碍的流动具有或恢复均匀流正常流速分布与脉动强度的条件下测定的。测得的局部损失也不仅仅是局部阻碍范围内的损失,还包括影响长度内因紊流脉动加剧而引起的附加损失。因此,如两个局部阻碍距离很近,前一个局部阻碍没有足够的影响长度,损失不能完全显示出来,后一个局部阻碍也因邻近流速的分布和紊流脉动不同于正常均匀流动,使它们的阻力系数都有所改变。这样就提出了按一般水头损失迭加计算的修正问题。

虽然在不少工业管道的设计中避免不了局部阻碍之间的相互干扰,但到目前为止,对这个问题还研究得很不够。英国 D.S.Miller 等于 1970 年前后曾对不同情况的圆弯管-圆弯管、折弯管-圆弯管、圆弯管-渐扩管、渐扩管-圆弯管的相互干扰进行了系统的实验研究,现将其主要结果介绍于后。

计算局部阻力相互干扰的水头损失时,一般用干扰修正系数 c 来估算它的影响,它的定义是:

$$c_{1.2}=\frac{\text{两个相互干扰的局部阻碍的总阻力系数 }\zeta_{1.2}}{\text{未受干扰时该两局部阻碍的阻力系数之和,即 }\zeta_1+\zeta_2}$$

c 不仅决定于靠近的是两个什么局部阻碍,还和局部阻碍之间的相对距离 l_s/d 有关。不同的 l_s/d 时,c 值的变化幅度见表 4-3。

干扰修正系数 c 的变化幅度　　表 4-3

用管径倍数表示的相对间距 l_s/d	0	1	2	3	4	10
c 的下限	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.7
c 的上限	3	2	1.3	1.2	1.1	1.0

注：选自 D.S.Miller 著《Internal Flow》43 页。

表中的数据表明，相互干扰的结果使局部水头损失既可能减小，也可能增大。如前一个局部阻碍在影响长度上的附加损失占有较大比重，则后一个局部阻碍靠近时，这部分损失大大减少了。同时，进入后一个局部阻碍的流速分布和紊流脉动至少不至于使它的局部损失大大增加，那么干扰的结果是使局部损失减少。例如间距 $l_s=2d$ 的 90°的圆弯管($R/d=2$)，和 $n=2, l_d/r_1=4$ 的渐扩管的相互干扰。其修正系数 $c_{b.d}=0.66$。这是因为前面的圆弯管有 45%的损失发生在 2 倍直径以后的直管段上，现在不再损失了。同时经过 $2d$ 的距离后，流速分布已不是很不均匀，而流速的强烈脉动，又有助于缩小渐扩管中的旋涡区，使渐扩管的阻力系数也有所减少。因而总的局部损失减少了约三分之一。

上例中如改用 $R/d=1$ 的弯管，并把渐扩管直接连接在圆弯管上($l_s=0$)，则 $c_{b.d}=2$。即局部损失比相互不干扰时增加了一倍。这是因为受弯管内侧旋涡区挤压的主流，在还没有扩大到整个过流断面之前，就进入了渐扩管，使其更难扩展。而渐扩管内主流偏于一侧，另一侧出现远大于正常情况的旋涡区。渐扩管的水头损失大大增加，总的局部损失也随之加大。

并不是一切直接连接的局部阻碍的相互干扰影响都是使水头损失增加。如两个 $R/d=1$ 的 90°圆弯管组成的使流动方向转 180°的组合弯管，它的干扰系数只有 0.535 亦即两个弯管的总损失比一个弯管只稍大一点。

由此可见，局部阻碍直接连接时，水头损失常出现大幅度的变化。可能增大，也可能减小。视前一个局部阻碍出口断面上的流速分布是否会大大增加后一个的局部损失而定。直接连接时干扰修正系数很大的两个局部阻碍，如在它们中间连接一段长度即使只有 1～$2d$ 的短管，使进入后一个局部阻碍之前流动已成为缓变流，干扰修正系数就会显著下降。如局部阻碍之间的直管段长度大于 $3d$，干扰修正系数一般都小于 1。这就是说，在设计管道时，如各局部阻碍之间的距离都大于 3 倍管径，忽略相互干扰的影响的计算结果，一般是偏于安全的。

第九节　减小阻力的措施

减小阻力长期以来就是工程流体力学中的一个重要的研究课题。这方面的研究成果，对国民经济和国防建设的很多部门都有十分重大的意义。例如，对于在流体中航行的各种运载工具(飞机、轮船等)，减小阻力就意味着减小发动机的功率和节省燃料消耗，或者在可能提供的动力条件下提高航行速度。这一点在军事上具有更大的意义。长距离输送像原油这类粘性很高的液体，需要消耗巨大的能量，如能将原油的管输摩阻大幅度降低，当然会给国民经济带来很大好处。对于经常运转的其它管道系统，减阻在节约能源上的意义也是不容忽视的。因此近年来减阻问题的研究，日益引起各有关领域的重视。

减小管中流体运动的阻力有两条完全不同的途径：一是改进流体外部的边界，改善边壁对流动的影响；另一是在流体内部投加极少量的添加剂，使其影响流体运动的内部结构来实

现减阻。

添加剂减阻是近二十年来才迅速发展起来的减阻技术。虽然到目前为止，它在工业技术中还没有得到广泛的应用，但就当前了解的实验研究成果和少数生产使用情况来看，它的减阻效果是很突出的。此外，添加剂减阻又和紊流机理这个流体力学中的基本理论问题密切相关。通过对添加剂减阻的机理的研究，必将推动紊流理论的进一步发展。添加剂减阻已成为流体力学中一项富有生命力的研究课题。

下面介绍改善边壁的减阻措施。

要降低粗糙区或过渡区内的紊流沿程阻力，最容易想到的减阻措施是减小管壁的粗糙度。此外，用柔性边壁代替刚性边壁也可能减少沿程阻力。水槽中的拖曳试验表明，高雷诺数下的柔性平板的摩擦阻力比刚性平板小 50%。对安放在另一管道中间的弹性软管进行过阻力试验，两管间的环形空间充满液体，结果比同样条件的刚性管道的沿程阻力小 35%。环形空间内液体的粘性愈大，软管的管壁愈薄，减阻效果愈好。

减小紊流局部阻力的着眼点在于防止或推迟流体与壁面的分离，避免旋涡区的产生或减小旋涡区的大小和强度。下面选几种典型的常用配件为例来说明这个问题：

管道进口

图 4-27 表明，平顺的管道进口可以减小局部损失系数 90% 以上。

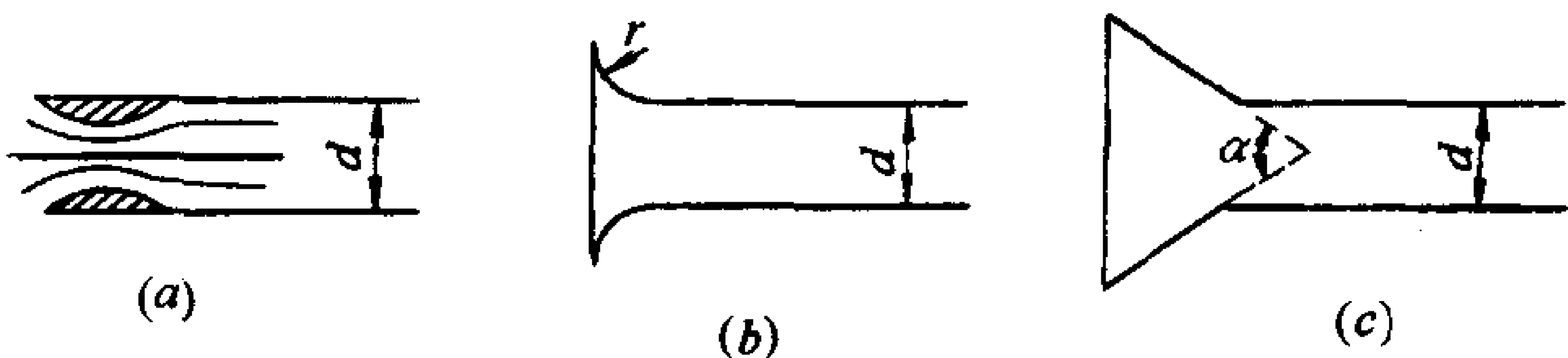


图 4-27　几种进口阻力系数

$(a)\zeta=1$；$(b)\frac{r}{d}=0.2$　$\zeta=0.03$；$(c)\alpha=40^\circ\sim80^\circ$　$\frac{b}{d}=0.25\sim1.0$

$\zeta=0.1\sim0.2$

渐扩管和突扩管

扩散角大的渐扩管阻力系数较大。如制成图 4-28*a* 所示的形式，阻力系数约减小一半。突扩管如制成图 4-28*b* 所示的台阶式，阻力系数也可能有所减小。

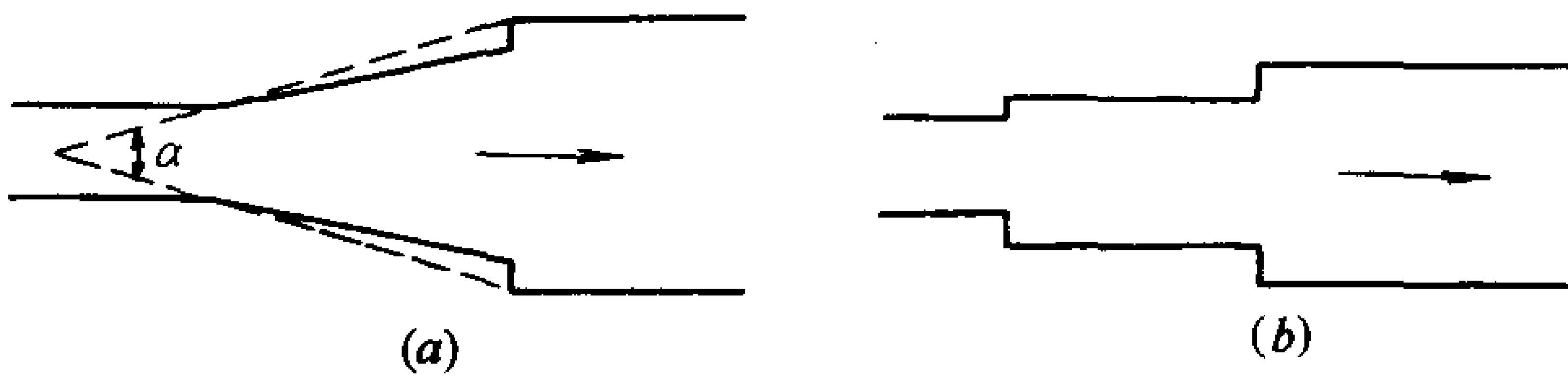


图 4-28　复合式渐扩管和台阶式突扩管

弯管

弯管的阻力系数在一定范围内随曲率半径 R 的增大而减小。表 4-4 给出了 90°弯管在不同 R/d 时的 ζ 值。

不同 R/d 时 90°弯管的 ζ 值（$Re=10^6$）　　　　**表 4-4**

R/d	0	0.5	1	2	3	4	6	10
ζ	1.14	1.00	0.246	0.159	0.145	0.167	0.20	0.24

由表可知,如 $R/d<1$,ζ 值随 R/d 的减小而急剧增加。这与旋涡区的出现和增大有关。如 $R/d>3$,ζ 值又随 R/d 的加大而增加,这是由于弯管加长后,摩阻增大造成的。因此弯管的 R 最好在$(1\sim4)d$ 的范围内。

断面大的弯管,往往只能采用较小的 R/d,可在弯管内部布置一组导流叶片,以减小旋涡区和二次流,降低弯管的阻力系数。愈接近内侧,导流叶片应布置得愈密些。图 4-29 所示的弯管,装上圆弧形导流叶片后,阻力系数由 1.0 减小到 0.3 左右。

三通

尽可能地减小支管与合流管之间的夹角,或将支管与合流管连接处的折角改缓,都能改进三通的工作,减小局部阻力系数。例如将 90°"T"形三通的折角切割成如图 4-30 所示的 45°斜角,则合流时的 ζ_{1-3}和 ζ_{2-3}约减小 30%～50%,分流时的 ζ_{3-1}减小 20%～30%。但对分流的 ζ_{3-2}影响不大。如将切割的三角形加大,阻力系数还能显著下降。

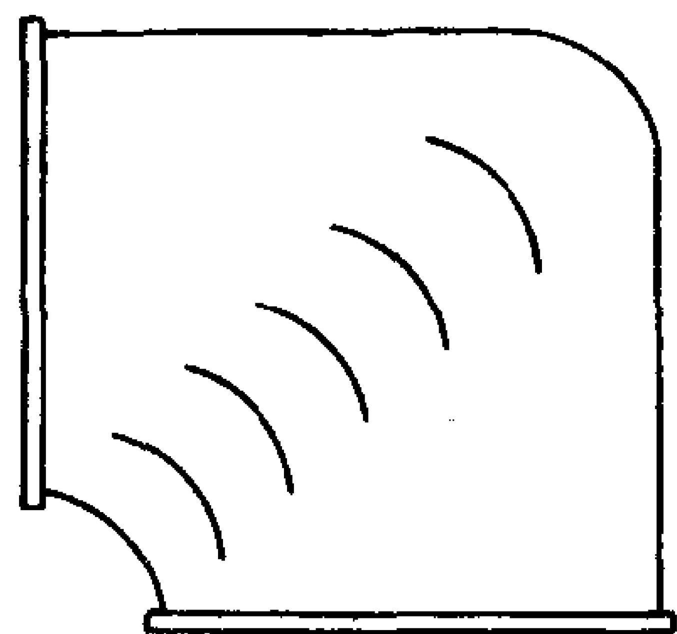


图 4-29 装有导叶的弯管

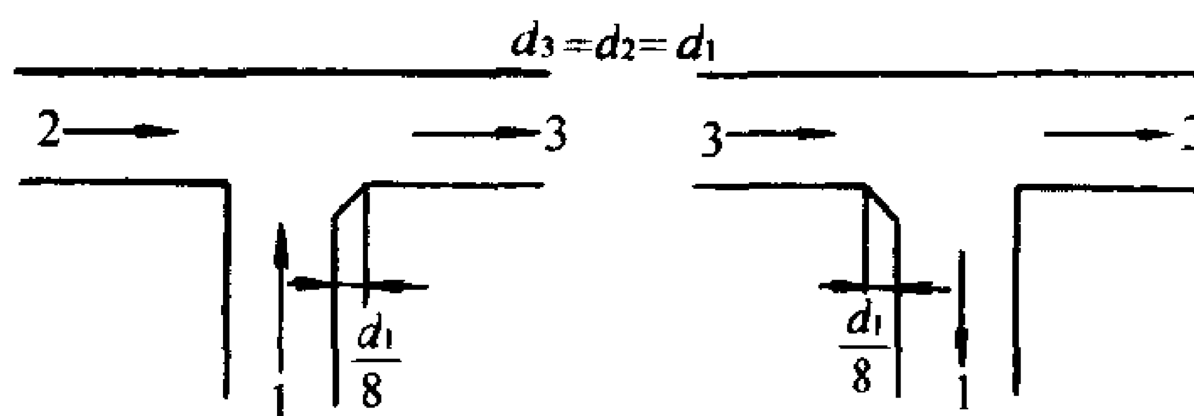
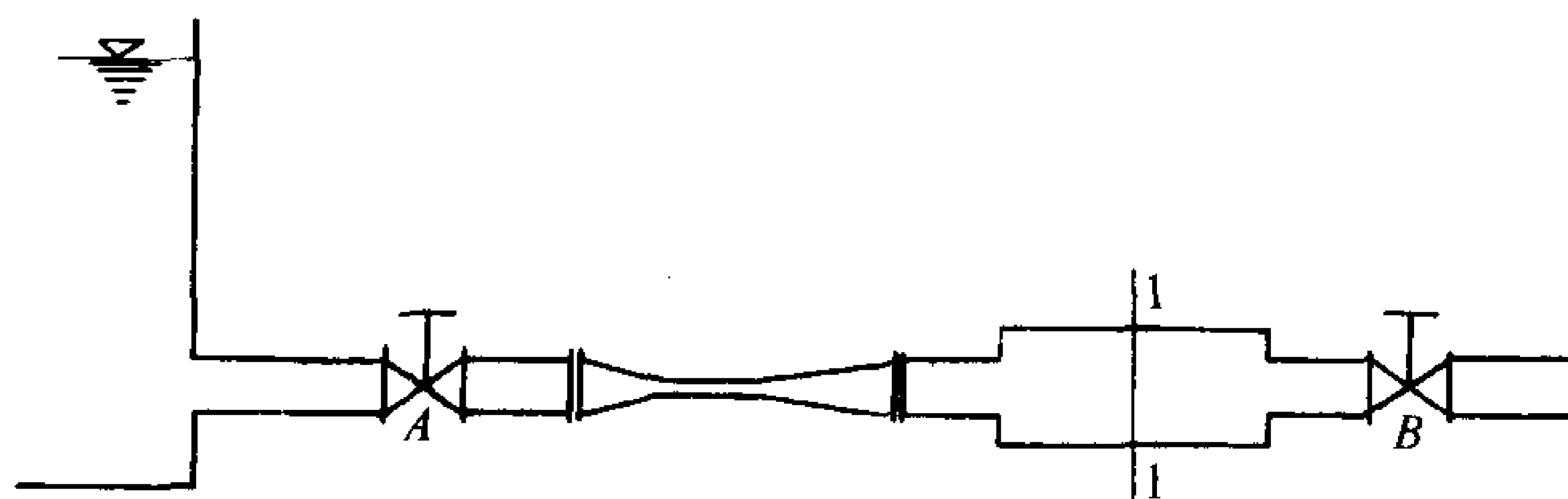


图 4-30 切割折角的"T"形三通

配件之间的不合理衔接,也会使局部阻力加大。例如在既要转 90°,又要扩大断面的流动中。如均选用 $R/d=1$ 的弯管和 $A_2/A_1=2.28$、$l_d/r_1=4.1$ 的渐扩管,在直接连接($l_s=0$)的情况下,先弯后扩的水头损失为先扩后弯的水头损失的 4 倍。即使中间都插入一段 $l_s=4d$ 的短管,也仍然大 2.4 倍。因此,如果没有其它原因,先弯后扩是不合理的。

习 题

4-1 如图所示:(1) 绘制水头线;(2) 若关小上游阀门 A,各段水头线如何变化?若关小下游阀门 B,各段水头线又如何变化?(3) 若分别关小或开大阀门 A 和 B,对固定断面 1-1 的压强产生什么影响?



题 4-1 图

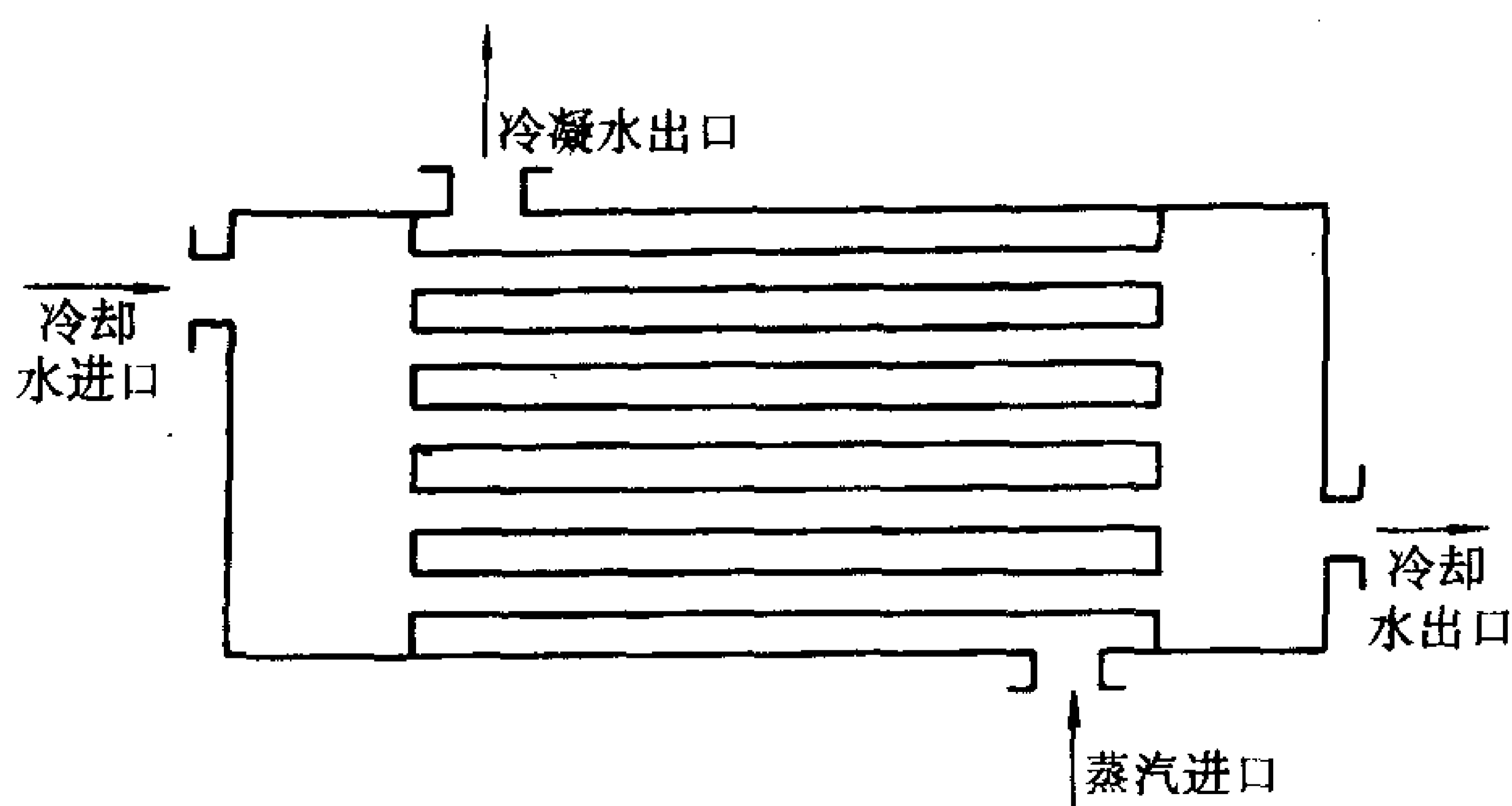
4-2 用直径 $d=100$mm 的管道,输送流量为 10kg/s 的水,如水温为 5℃,试确定管内水的流态。如用这管道输送同样质量流量的石油,已知石油密度 $\rho=850\text{kg/m}^3$,运动粘滞系数 $\nu=1.14\text{cm}^2/\text{s}$,试确定石油的流态。

4-3 有一圆形风道,管径为 300mm,输送的空气温度 20℃,求气流保持层流时的最大流量。若输送的空气量为 200kg/h,气流是层流还是紊流?

4-4 水流经过一个渐扩管,如小断面的直径为 d_1,大断面的直径为 d_2,而$\frac{d_2}{d_1}=2$,试问哪个断面雷诺

数大？这两个断面的雷诺数的比值 Re_1/Re_2 是多少？

4-5 有一个蒸汽冷凝器，内有 250 根平行的黄铜管，通过的冷却水总流量为 8L/s，水温为 10℃，为了使黄铜管内冷却水保持为紊流（紊流时，黄铜管的热交换性能比层流好），问黄铜管的直径不得超过多少？



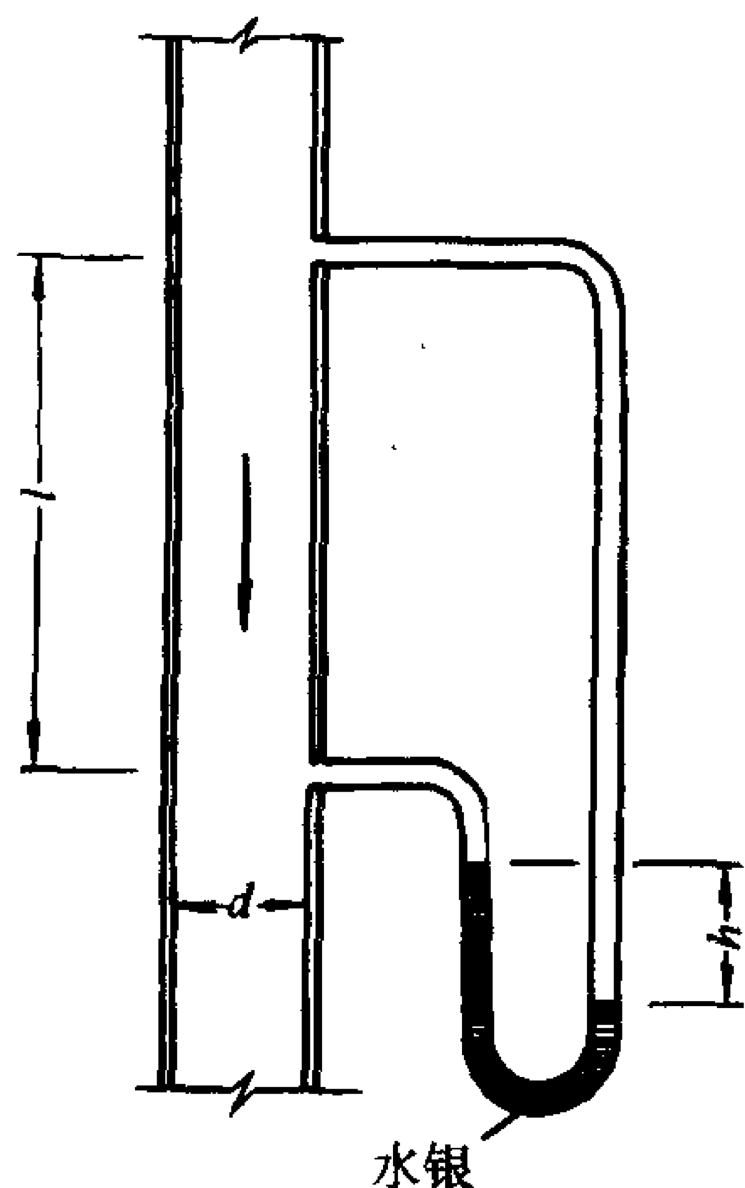
题 4-5 图

4-6 设圆管直径 $d=200\text{mm}$，管长 $l=1000\text{m}$，输送石油的流量 $Q=40\text{L/s}$，运动粘滞系数 $\nu=1.6\text{cm}^2/\text{s}$，求沿程水头损失。

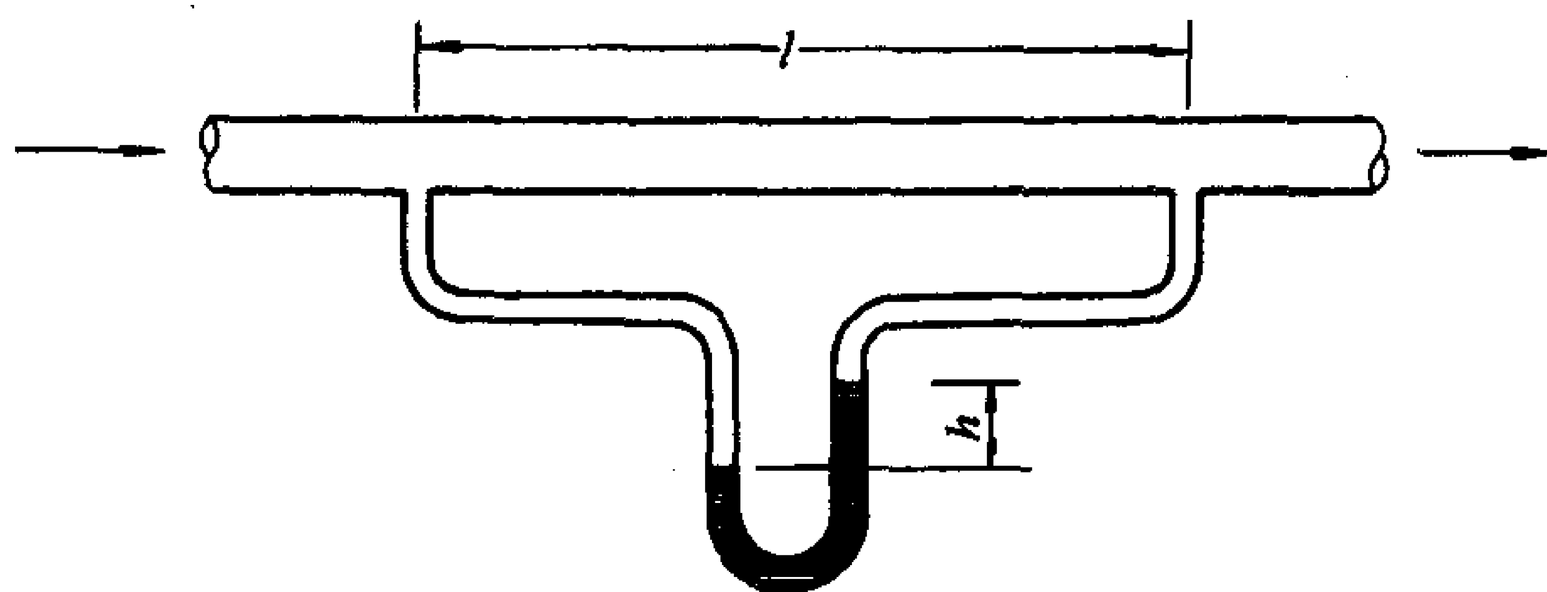
4-7 有一圆管，在管内通过 $\nu=0.013\text{cm}^2/\text{s}$ 的水，测得通过的流量为 $35\text{cm}^3/\text{s}$，在管长 15m 的管段上测得水头损失为 2cm，试求该圆管内径 d。

4-8 油在管中以 $v=1\text{m/s}$ 的速度流动，油的密度 $\rho=920\text{kg/m}^3$，$l=3\text{m}$，$d=25\text{mm}$ 水银压差计测得 $h=9\text{cm}$，试求（1）油在管中的流态？（2）油的运动粘滞系数 ν？（3）若保持相同的平均流速反向流动，压差计的读数有何变化？

4-9 油的流量 $Q=77\text{cm}^3/\text{s}$，流过直径 $d=6\text{mm}$ 的细管，在 $l=2\text{m}$ 长的管段两端水银压差计读数 $h=30\text{cm}$，油的密度 $\rho=900\text{kg/m}^3$，求油的 μ 和 ν 值。



题 4-8 图



题 4-9 图

4-10 利用圆管层流 $\lambda=\frac{64}{Re}$，水力光滑区 $\lambda=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}$ 和粗糙区 $\lambda=0.11\left(\frac{K}{d}\right)^{0.25}$ 这三个公式，论证在层流中 $h_1 \backsim v$，光滑区 $h_1 \backsim v^{1.75}$，粗糙区 $h_1 \backsim v^2$。

4-11 某风管直径 $d=500\text{mm}$，流速 $v=20\text{m/s}$，沿程阻力系数 $\lambda=0.017$，空气温度 $t=20℃$，求风管的 K 值。

4-12 有一 $d=250\text{mm}$ 圆管，内壁涂有 $K=0.5\text{mm}$ 的砂粒，如水温为 10℃，问流动要保持为粗糙区的最小流量为多少？

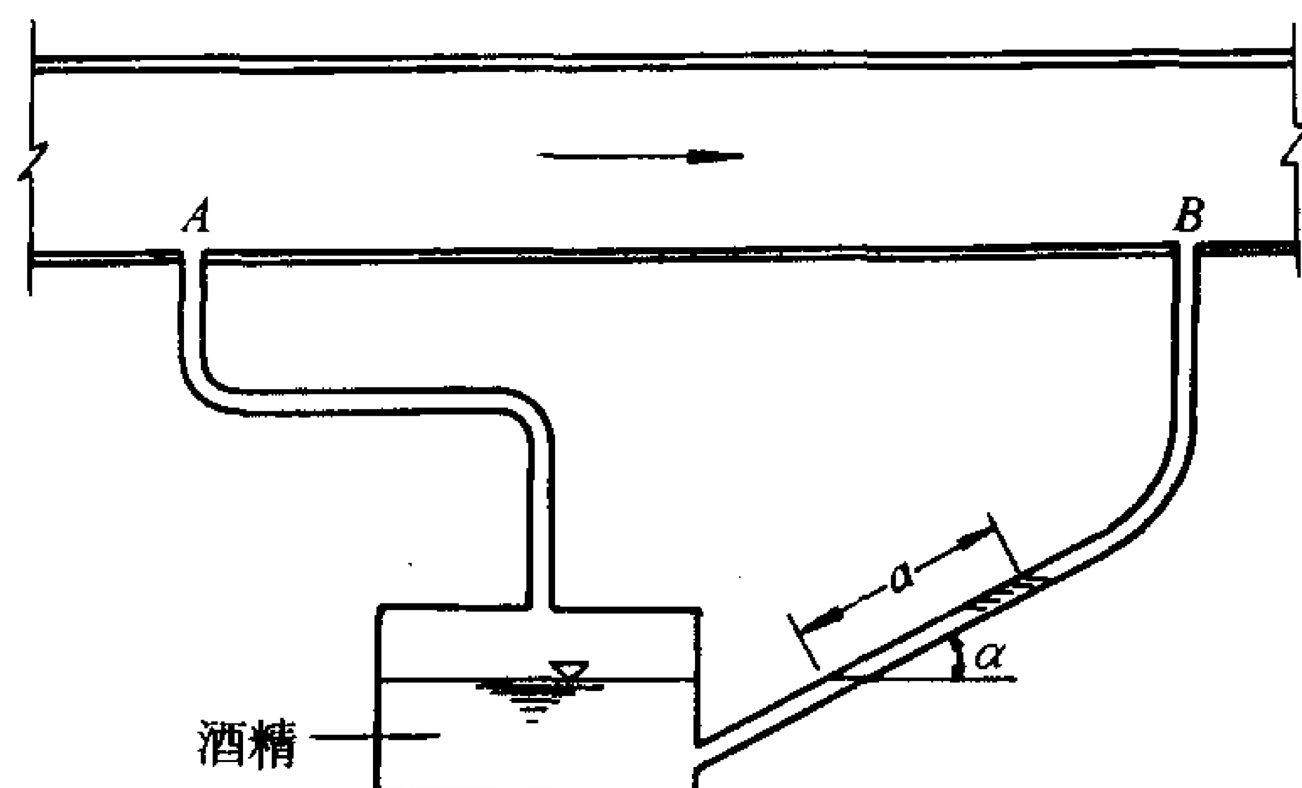
4-13　上题中管中通过流量分别为 5L/s,20L/s;200L/s 时,各属于什么阻力区？其沿程阻力系数各为若干？若管长 $l=100$m,求沿程水头损失各为多少。

4-14　在管径 $d=50$mm 的光滑铜管中,水的流量为 3L/s,水温 $t=20$℃。求在管长 $l=500$m 的管道中的沿程水头损失。

4-15　某铸管直径 $d=50$mm,当量糙度 $K=0.25$mm,水温 $t=20$℃,问在多大流量范围内属于过渡区流动。

4-16　镀锌铁皮风道,直径 $d=500$mm,流量 $Q=1.2m^3/s$,空气温度 $t=20$℃,试判别流动处于什么阻力区。并求 λ 值。

4-17　某管径 $d=78.5$mm 的圆管,测得粗糙区的 $\lambda=0.0215$,试分别用图 4-14 和式(4-6-4),求该管道的当量糙度 K。



题 4-19　图

4-18　长度 10m,直径 $d=50$mm 的水管,测得流量为 4L/s,沿程水头损失为 1.2m,水温为 20℃,求该种管材的 K 值。

4-19　矩形风道的断面尺寸为 1200×600mm,风道内空气的温度为 45℃,流量为 $42000m^3/h$,风道壁面材料的当量糙度 $K=0.1$mm,今用酒精微压计量测风道水平段 AB 两点的压差,微压计读值 $a=7.5$mm,已知 $\alpha=30°$,$l_{AB}=12$m,酒精的密度 $\rho=860kg/m^3$,试求风道的沿程阻力系数 λ。

4-20　水在环形断面的水平管道中流动,水温为 10℃,流量 $Q=400$L/min,管道的当量粗糙粒高度 $K=0.15$mm,内管的外径 $d=75$mm,外管内径 $D=100$mm。试求在管长 $l=300$m 的管段上的沿程水头损失。

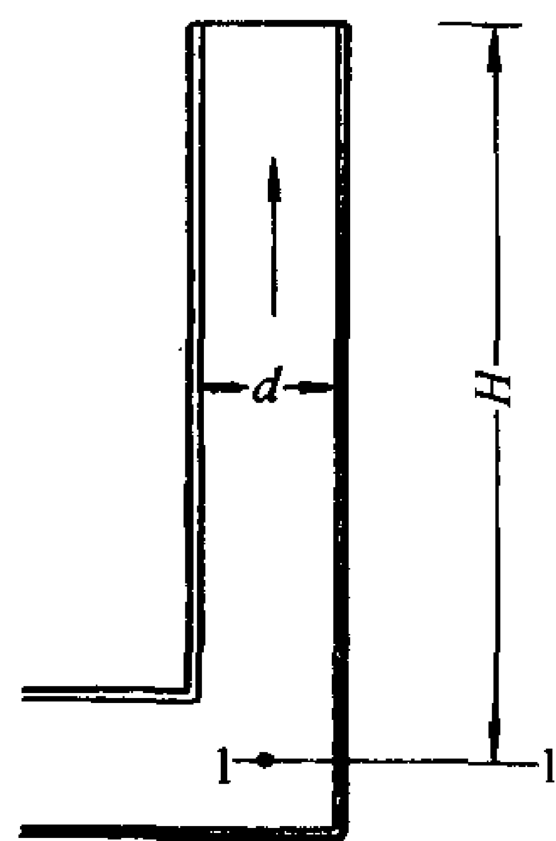
4-21　如管道的长度不变,通过的流量不变,欲使沿程水头损失减少一半,直径需增大百分之几？试分别讨论下列三种情况:

(1) 管内流动为层流 $\lambda=\frac{64}{Re}$

(2) 管内流动为光滑区 $\lambda=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}$

(3) 管内流动为粗糙区 $\lambda=0.11\left(\frac{K}{d}\right)^{0.25}$

4-22　有一管路,流动的雷诺数 $Re=10^6$,通水多年后,由于管路锈蚀,发现在水头损失相同的条件下,流量减少了一半。试估算此旧管的管壁相对粗糙度 K/d。假设新管时流动处于光滑区 $\left(\lambda=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}\right)$,锈蚀以后流动处于粗糙区 $\left[\lambda=0.11\left(\frac{K}{d}\right)^{0.25}\right]$。



题 4-23　图

4-23　烟囱的直径 $d=1$m,通过的烟气流量 $Q=18000$kg/h,烟气的密度 $\rho=0.7kg/m^3$,外面大气的密度按 $\rho=1.29kg/m^3$ 考虑,如烟道的 $\lambda=0.035$,要保证烟囱底部 1-1 断面的负压不小于 $100N/m^2$,烟囱的高度至少应为多少。

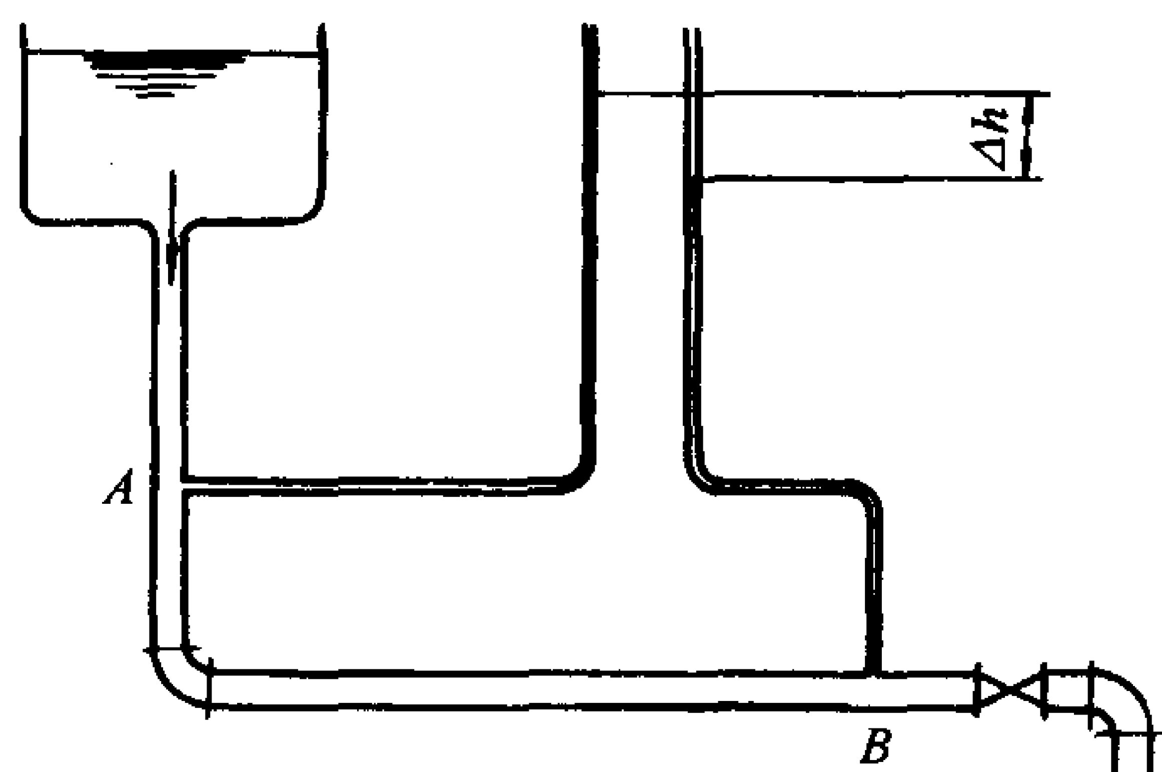
4-24　为测定 90°弯头的局部阻力系数 ζ,可采用如图所示的装置。已知 AB 段管长 $l=10$m,管径 $d=50$mm,$\lambda=0.03$。实测数据为(1) AB 两断面测压管水头差 $\Delta h=0.629$m;(2) 经两分钟流入量水箱的水量为 $0.329m^3$。求弯头的局部阻力系数 ζ。

4-25　测定一阀门的局部阻力系数,在阀门的上下游装设了 3 个测压管,其间距 $L_1=1$m,$L_2=2$m,若直径 $d=50$mm,实测 $H_1=150$cm,$H_2=125$cm,$H_3=40$cm,流速 $v=3$m/s,求阀门的 ζ 值。

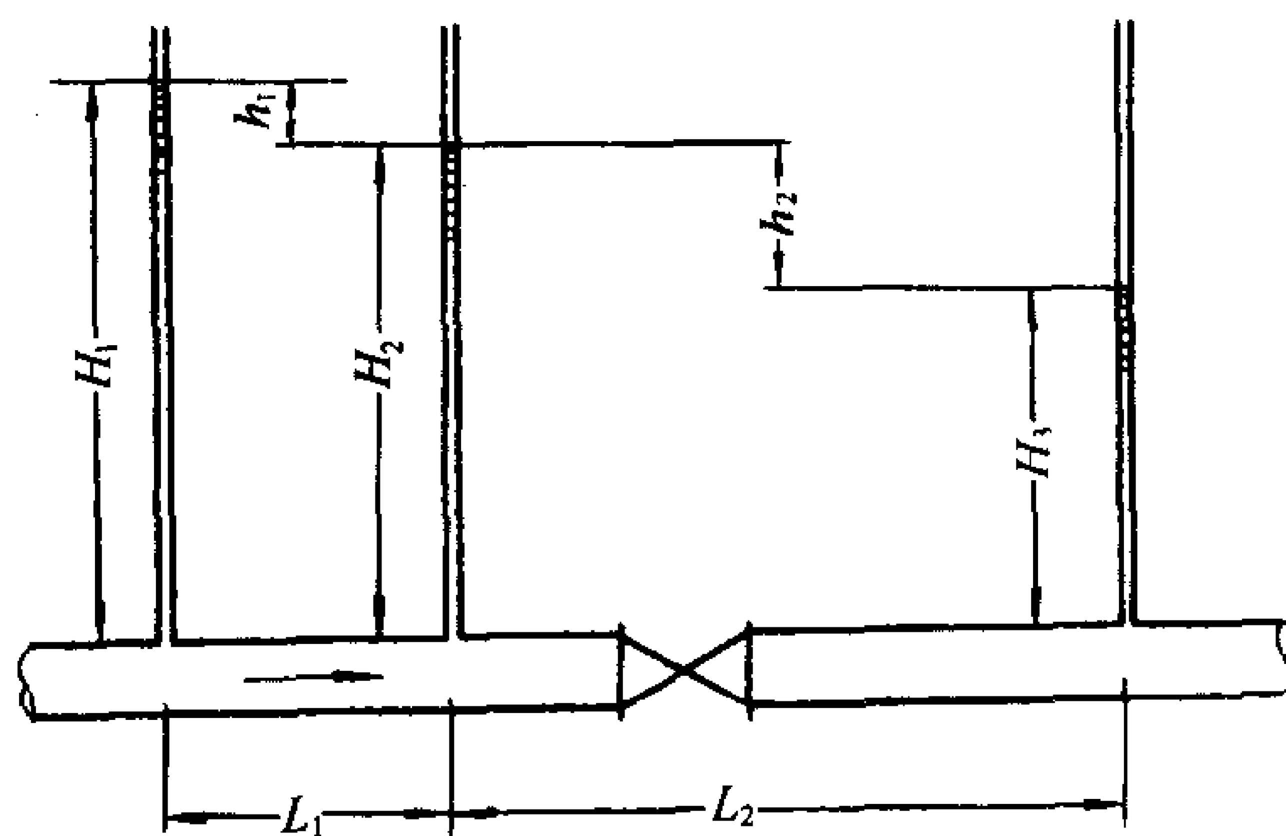
4-26　试计算如图所示的四种情况的局部水头损失。在断面积 $A=78.5cm^2$ 的管道中,流速 $v=2$m/s。

4-27　流速由 v_1 变到 v_2 的突然扩大管，如分为两次扩大，中间流速 v 取何值时局部损失最小？此时水头损失为多少？并与一次扩大时比较。

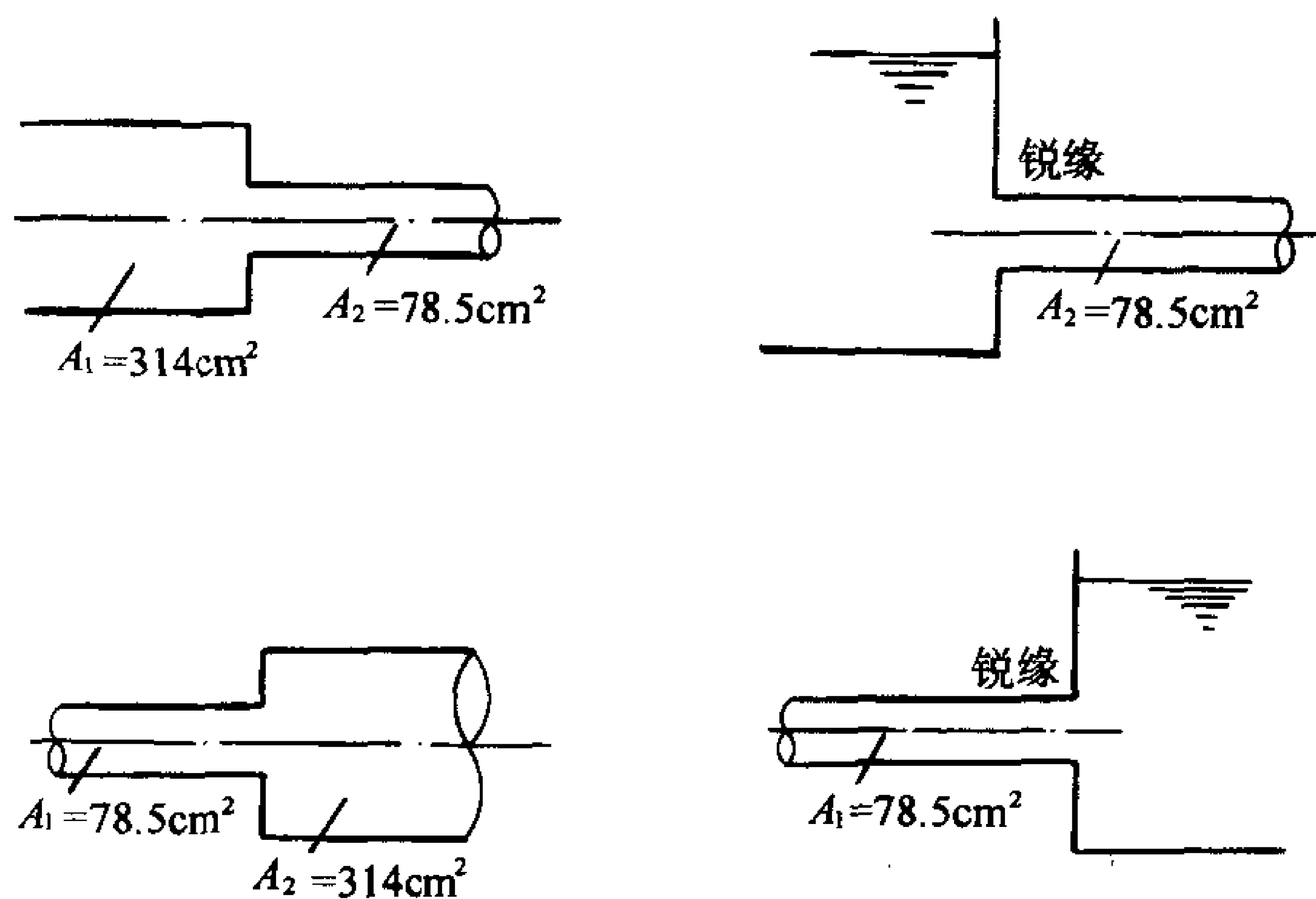
4-28　一直立的突然扩大水管，已知 $d_1 = 150\text{mm}$，$d_2 = 300\text{mm}$，$h = 1.5\text{m}$，$v_2 = 3\text{m/s}$，试确定水银比压计中的水银液面哪一侧较高？差值为多少？



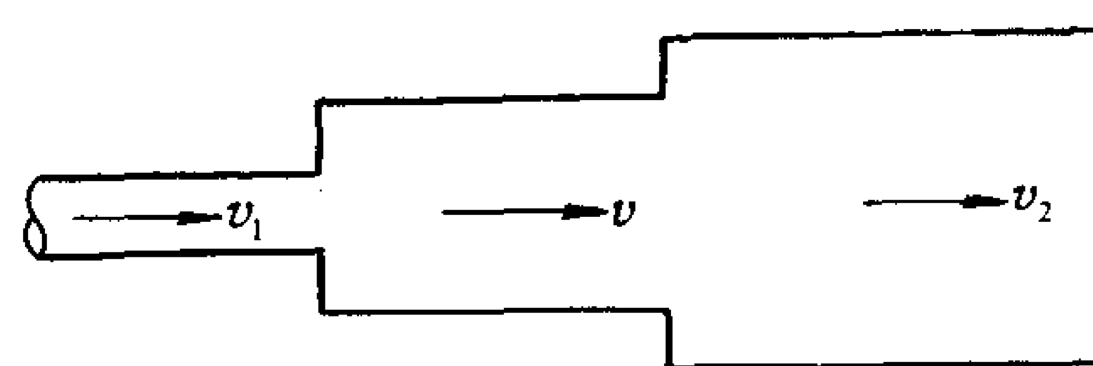
题 4-24　图



题 4-25　图

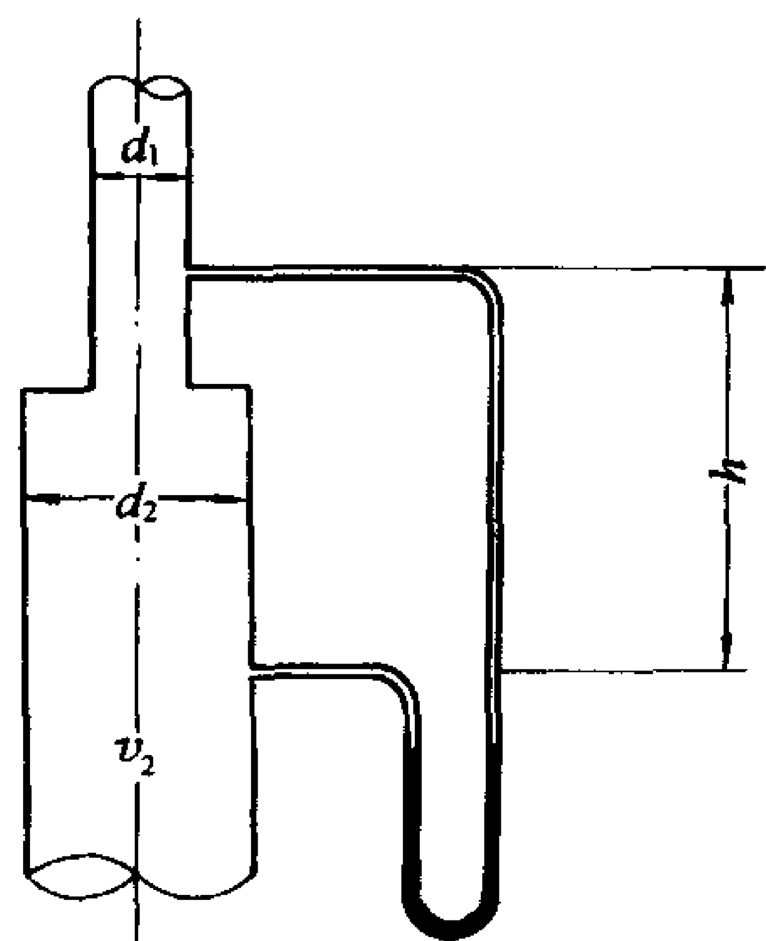


题 4-26　图

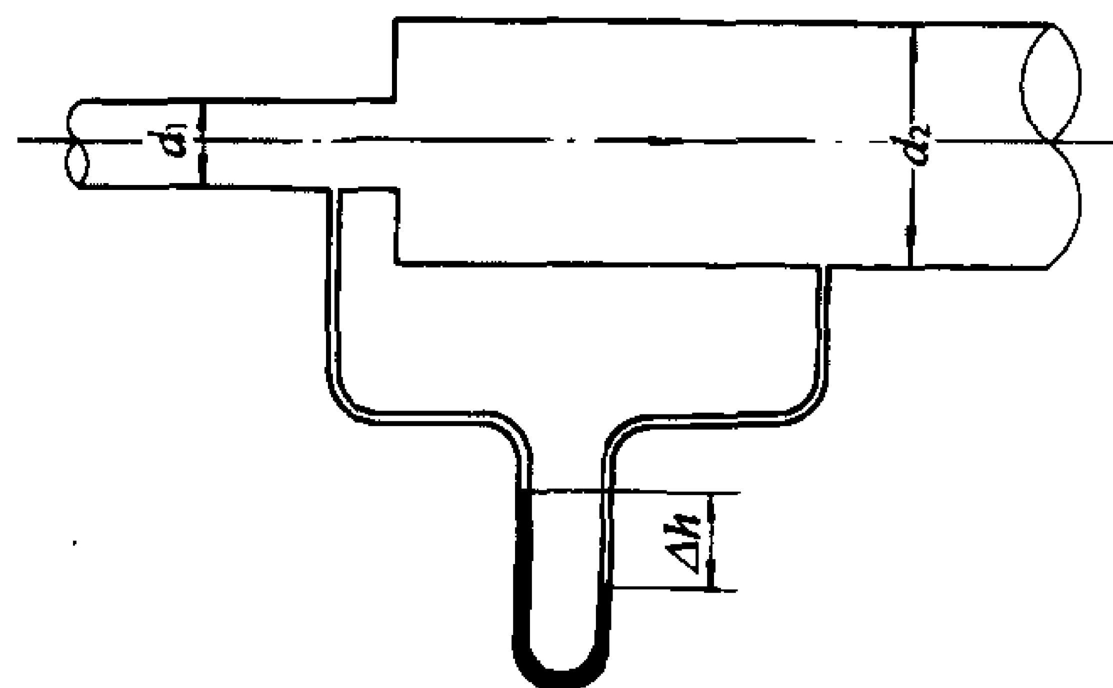


题 4-27　图

4-29　一水平放置的突然扩大管路，直径由 $d_1 = 50\text{mm}$ 扩大到 $d_2 = 100\text{mm}$，在扩大前后断面接出的双液比压计中，上部为水，下部为容重 $\gamma = 15.7\text{kN/m}^3$ 的四氯化碳，当流量 $Q = 16\text{m}^3/\text{h}$ 时的比压计读数 $\Delta h = 173\text{mm}$，求突然扩大的局部阻力系数，并与理论计算值进行比较。



题 4-28　图

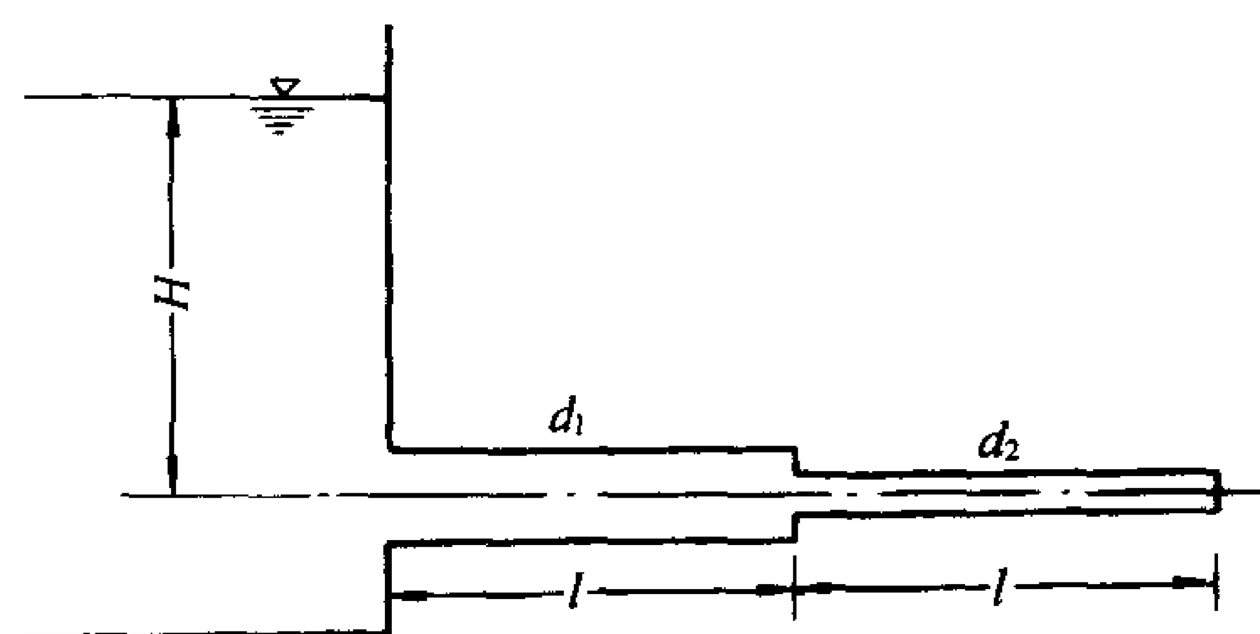


题 4-29　图

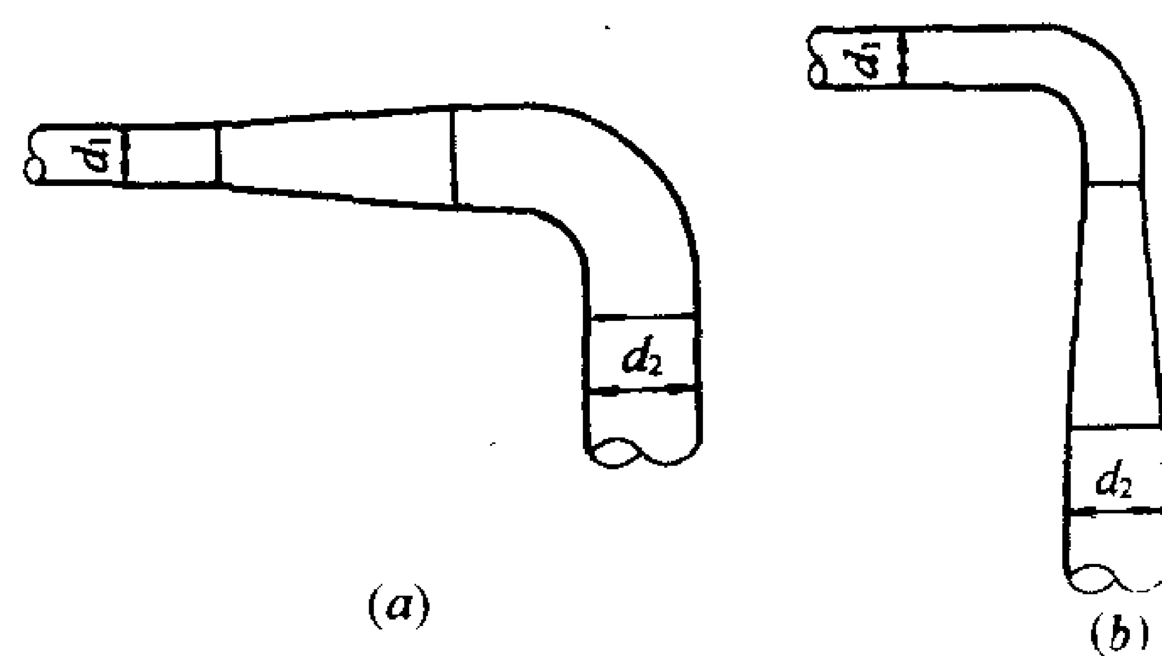
4-30 水箱侧壁接出一根由两段不同管径所组成的管道。已知 $d_1=150\text{mm}$，$d_2=75\text{mm}$，$l=50\text{m}$，管道的当量糙度 $K=0.6\text{mm}$，水温为20℃。若管道的出口流速 $v_2=2\text{m/s}$，求(1) 水位 H。(2) 绘出总水头线和测压管水头线。

4-31 两条长度相同，断面积相等的风管，它们的断面形状不同，一为圆形，一为正方形，如它们的沿程水头损失相等，而且流动都处于阻力平方区，试问哪条管道过流能力大？大多少？

4-32 在断面既要由 d_1 扩大到 d_2，方向又转 90°的流动中，图(a)为先扩后弯，图(b)为先弯后扩。已知：$d_1=50\text{mm}$，$\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2=2.28$，$v_1=4\text{m/s}$。渐扩管对应于流速 v_1 的阻力系数 $\zeta_d=0.1$；弯管阻力系数(两者相同) $\zeta_b=0.25$；先弯后扩的干扰修正系数 $c_{b.d}=2.30$；先扩后弯的干扰修正系数 $c_{d.b}=1.42$。求两种情况的总局部水头损失。



题 4-30 图



题 4-32 图

第五章　孔口管嘴管路流动

本章应用流体力学基本原理,结合具体流动条件,研究孔口、管嘴及管路的流动。

研究流体经容器器器壁上孔口或管嘴出流,以及流体沿管路的流动,对供热通风及燃气工程具有很大的实用意义。如自然通风中空气通过门窗的流量计算,供热管路中节流孔板的计算,工程上各种管道系统的计算,都需要掌握这方面的规律及计算方法。

第一节　孔口自由出流

在容器侧壁或底壁上开一孔口,容器中的液体自孔口出流到大气中,称为孔口自由出流。如出流到充满液体的空间,则称为淹没出流。

图 5-1 给出一自由出流孔口,容器中液体从四面八方流向孔口。由于质点的惯性,当绕过孔口边缘时,流线不能成直角突然地改变方向,只能以圆滑曲线逐渐弯曲。在孔口断面上仍然继续弯曲且向中心收缩,造成孔口断面上的急变流。直至出流流股距孔 1/2d(d 为孔径)处,断面收缩达到最小,流线趋于平直,成为渐变流,该断面称为收缩断面,即图 5-1 中的 C-C 断面。

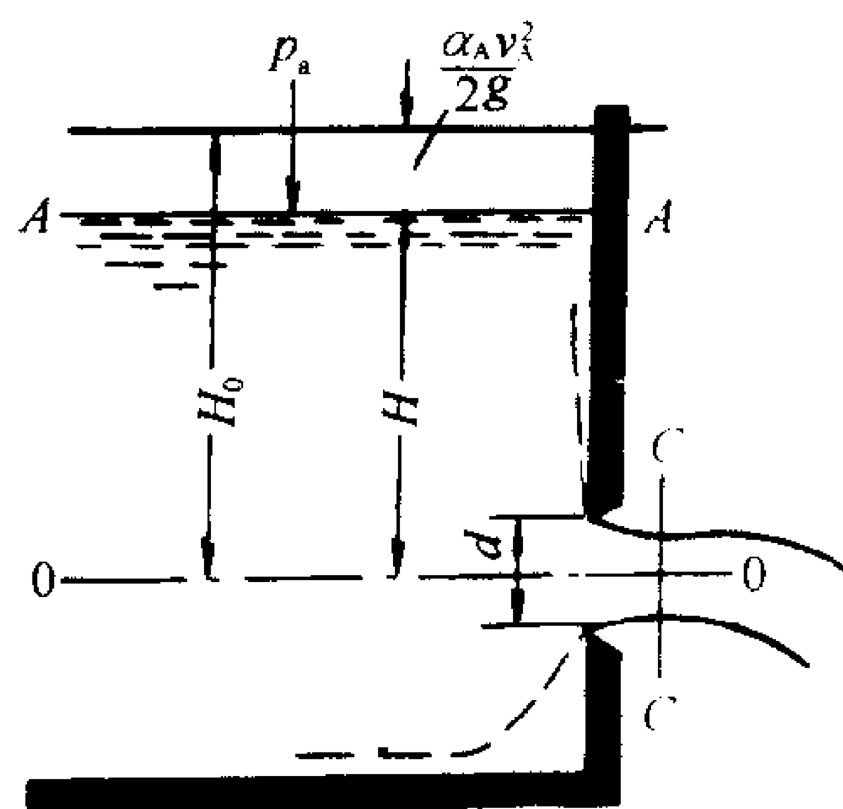


图 5-1　孔口自由出流

下面讨论出流规律。通过收缩断面形心引基准线 0-0,列出 A-A 及 C-C 两断面的能量方程。

$$Z_A+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}=Z_C+\frac{p_C}{\gamma}+\frac{\alpha_C v_C^2}{2g}+h_e$$

式中,h_e 为孔口出流的能量损失。由于水在容器中流动的沿程损失甚微,故仅在孔口处发生能量损失。如图 5-1 中所示具有锐缘的孔口,出流流股与孔口壁接触仅是一条周线,这种条件的孔口称为薄壁孔口。若孔壁厚度和形状促使流股收缩后又扩开,与孔壁接触形成面而不是线,这种孔口称为厚壁孔口或管嘴。

无论薄壁、厚壁孔口或管嘴,能量损失都发生在孔与嘴的局部为局部损失,对比管路流动而言,这正是这种流动的特点。对于薄壁孔口来说 $h_e=h_m=\zeta_1\frac{v_C^2}{2g}$,代入上式。经移项整理得。

$$(\alpha_C+\zeta_1)\frac{v_C^2}{2g}=(Z_A-Z_C)+\frac{p_A-p_C}{\gamma}+\frac{\alpha_A\cdot v_A^2}{2g}$$

令
$$H_0=(Z_A-Z_C)+\frac{p_A-p_C}{\gamma}+\frac{\alpha_A\cdot v_A^2}{2g} \tag{5-1-1}$$

则就 v_C 求解得

$$v_C = \frac{1}{\sqrt{\alpha_C + \zeta_1}} \cdot \sqrt{2gH_0} \tag{5-1-2}$$

H_0 称为作用水头，是促使出流的全部能量。从(5-1-1)式可知，H_0 包括孔口上游对孔口收缩断面 C—C 位差、压差及上游来流的速度头。H_0 中一部分用来克服阻力而损失，一部分变成 C—C 断面上的动能使之出流。

在孔口自由出流时(如图 5-1)，H_0 中位差 $Z_A - Z_C = H$，即液面至孔口中心的高度差。对小孔口来说(孔径 $d < 0.1H$)，可忽略孔中心与上下边缘高差的影响，认为孔口面上所有各点均受同一 H 作用，其出流速度相同。

H_0 中压差，因自由出流 $p_C = p_a$，且具有自由液面 $p_A = p_a$，故该项为零。

H_0 中来流速度头，因自由液面速度可略而不计，于是得出具有自由液面，自由出流时，$H_0 = H$ 的结论。

对于其它条件下孔口出流 H_0 的决定，应视其具体条件，从 H_0 的定义式(5-1-1)出发，来表述作用水头。

(5-1-2)式给出了薄壁孔口自由出流收缩断面 C-C 上速度公式，现令

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_C + \zeta_1}} \tag{5-1-3}$$

φ 称为速度系数，φ 的意义可以从下面讨论得知。若 $\alpha_C = 1$ 且无损失情况下，$\zeta_1 = 0$，则 $\varphi = 1$。这时是理想流体的流动，其速度为 $v'_C = 1 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}$。与(5-1-2)式相比便得 φ

$$\frac{v_C}{v'_C} = \frac{\varphi \cdot \sqrt{2gH_0}}{1 \cdot \sqrt{2gH_0}} = \varphi$$

$$\varphi = \frac{\text{实际流体的速度}}{\text{理想流体的速度}}$$

φ 值可通过实验测得，对圆形薄壁小孔口速度系数 $\varphi = 0.97 \sim 0.98$。

现来推求通过孔口出流的流量公式。

$$Q = v_C \cdot A_C \tag{5-1-4}$$

式中，A_C 是收缩断面的面积。由于一般情况下给出孔口面积，故引入

$$\varepsilon = A_C / A \tag{5-1-5}$$

称 ε 为收缩系数。实验得知，圆形薄壁小孔口的 $\varepsilon = 0.62 \sim 0.64$。现用 $\varepsilon \cdot A = A_C$ 代入流量公式

$$Q = v_C \cdot \varepsilon \cdot A = \varepsilon \cdot \varphi \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot H_0} \tag{5-1-6}$$

令

$$\mu = \varepsilon \cdot \varphi$$

称 μ 为流量系数。对于圆形薄壁小孔口，其值为 $\mu = 0.62 \times 0.97 \sim 0.64 \times 0.97 \approx 0.60 \sim 0.62$。则

$$Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot H_0} \quad \mathrm{m^3/s} \tag{5-1-7}$$

(5-1-7)式就是孔口自由出流的基本公式。当计算流量 Q 时，根据具体的孔口及出流条件，确定 μ 及 H_0。

从(5-1-6)式知，μ 值与 ε、φ 有关。φ 值接近于 1。ε 值则因孔口开设的位置不同而造成收缩情况不同，因而有较大的变化。如图 5-2 上孔口 Ⅰ 四周的流线全部发生弯曲，水股在

各方向都发生收缩为全部收缩孔口。而孔口Ⅱ只有1、2边发生收缩，其它3、4边没有收缩称为非全部收缩孔口。在相同的作用水头下，非全部收缩时的收缩系数 ε 比全部收缩时的大，其流量系数 μ' 值亦将相应增大，两者之间的关系可用下列经验公式表示[1]

$$\mu' = \mu\left(1 + C\frac{S}{X}\right) \tag{5-1-8}$$

式中 μ——全部收缩时孔口流量系数；

S——未收缩部分周长(如图5-2上3+4边长)；

X——孔口全部周长(如图5-2上1+2+3+4边长)；

C——系数，圆孔取0.13，方孔取0.15。

全部收缩的水股，又根据器壁对流线弯曲有无影响而分为完善收缩与不完善收缩。图5-2上孔口Ⅰ，周边离侧壁的距离大于3倍孔口在该方向的尺寸，即 $l_1 > 3a$，$l_2 > 3b$。此时出流流线弯曲率最大，收缩得最充分，为全部完善收缩。对于薄壁小孔口出流的全部完善收缩，流量系数为 $\mu = 0.6 \sim 0.62$。

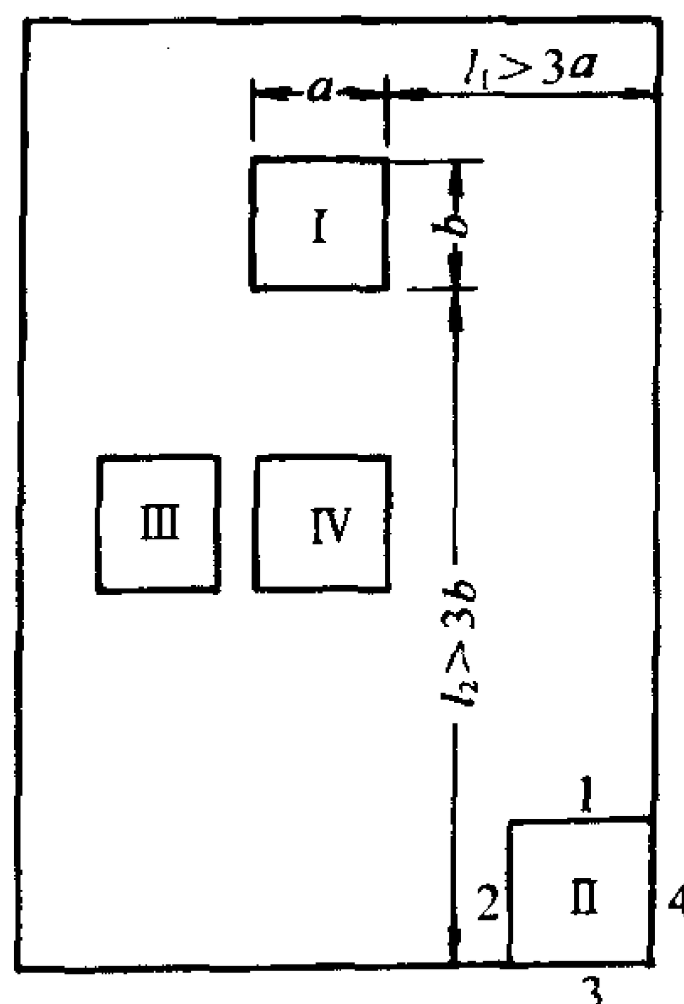


图5-2 孔口收缩与位置关系

当孔口任何一边到器壁的距离不满足上述条件时，如孔口Ⅲ和Ⅳ则将减弱流线的弯曲，减弱收缩，使 ε 增大，相应 μ 值亦将增大。不完善收缩的 μ''可用下式估算。

$$\mu'' = \mu\left[1 + 0.64\left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right] \tag{5-1-9}$$

式中 μ——全部完善收缩时孔口流量系数；

A——孔口面积；

A_0——孔口所在壁的全部面积。

(5-1-9)式适用条件是，孔口处在壁面的中心位置，各方向上影响不完善收缩的程度近于一致的情况。

第二节 孔口淹没出流

如前述，当液体通过孔口出流到另一个充满液体的空间时称为淹没出流，如图5-3所示。

现以孔口中心线为基准线，取上下游自由液面1-1及2-2，列能量方程：

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \zeta_1\frac{v_C^2}{2g} + \zeta_2\frac{v_C^2}{2g}$$

令 $H_0 = (H_1 - H_2) + \dfrac{p_1 - p_2}{\gamma} + \dfrac{\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2}{2g}$，称为作用水头。

上式为：

$$H_0 = (\zeta_1 + \zeta_2)\frac{v_C^2}{2g}$$

就 v_C 求解

[1] 依据 M.И.АГРОСКИН 著水力学公式。

$$v_C = \frac{1}{\sqrt{\zeta_1 + \zeta_2}} \cdot \sqrt{2gH_0} \tag{5-2-1}$$

则出流流量为

$$Q = v_C \cdot A_C = v_C \cdot \varepsilon \cdot A = \frac{1}{\sqrt{\zeta_1 + \zeta_2}} \varepsilon \cdot A \cdot \sqrt{2gH_0} \tag{5-2-2}$$

式中 ζ_1——液体经孔口处的局部阻力系数；

ζ_2——液体在收缩断面之后突然扩大的局部阻力系数。2—2 断面比 C—C 断面大得多，所以 $\zeta_2 = \left(1 - \frac{A_C}{A_2}\right)^2 \approx 1$。

于是令

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\zeta_1 + \zeta_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_1}} \tag{5-2-3}$$

φ 为淹没出流速度系数。对比自由出流 φ 在孔口形状、尺寸相同情况下，其值相等，但其含义有所不同。自由出流时 $\alpha_C \approx 1$，淹没出流时 $\zeta_2 \approx 1$。引入 $\mu = \varepsilon\varphi$，μ 为淹没出流流量系数。(5-2-2)式可写成：

$$Q = \varepsilon \cdot \varphi \cdot A\ \sqrt{2g \cdot H_0} = \mu \cdot A\ \sqrt{2gH_0} \quad \mathrm{m^3/s} \tag{5-2-4}$$

这就是淹没出流流量公式。对比自由出流(5-1-7)式，φ、μ 相同，只是作用头 H_0 中速度头略有不同，自由出流时上游速度头全部转化为作用水头，而淹没出流时，仅上下游速度头之差转化为作用水头。

孔口自由出流与淹没出流其公式形式完全相同，φ、μ 在孔口相同条件下亦相等，只需注意作用水头 H_0 中各项，按具体条件代入。

如图 5-3 所示，具有自由液面的淹没出流 $p_1 = p_2 = p_a$，且忽略上下游液面的速度头时，则作用水头为：

$$H_0 = H_1 - H_2 = H \tag{5-2-5}$$

于是出流流量

$$Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2gH} \quad \mathrm{m^3/s} \tag{5-2-6}$$

从(5-2-6)式可得，当上下游液面高度一定时，即 H 一定时，出流流量与孔口在液面下开设的位置高低无关。

图 5-4 给出具有 p_0 表面压强(相对压强)的有压容器，液体经孔口出流。流量应用

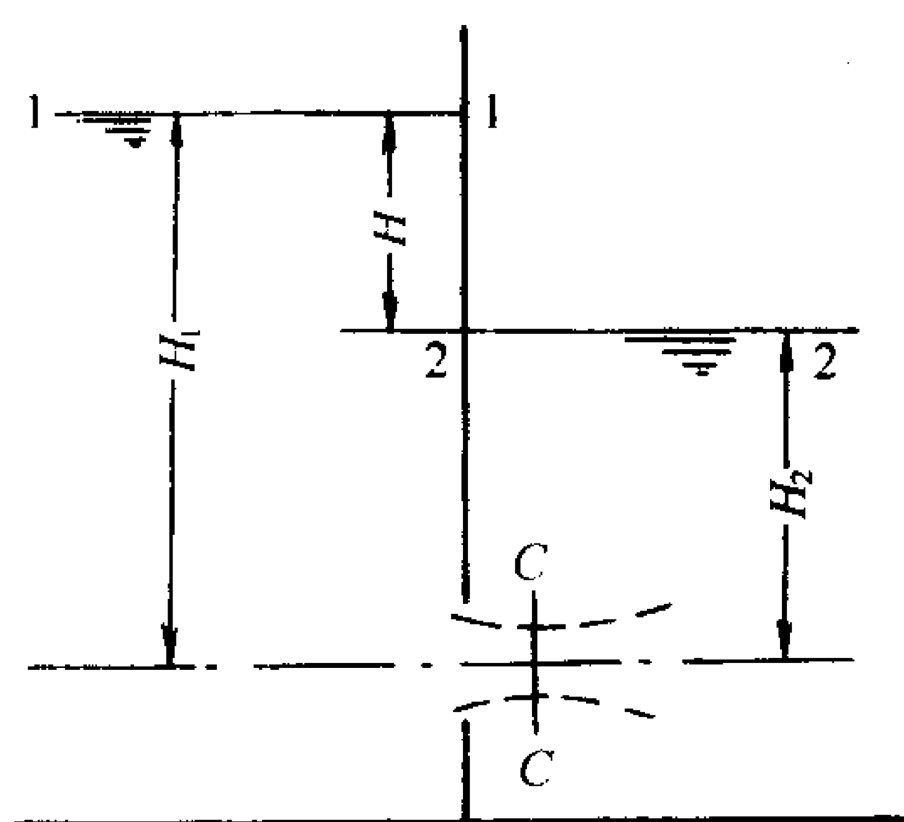


图 5-3 孔口淹没出流

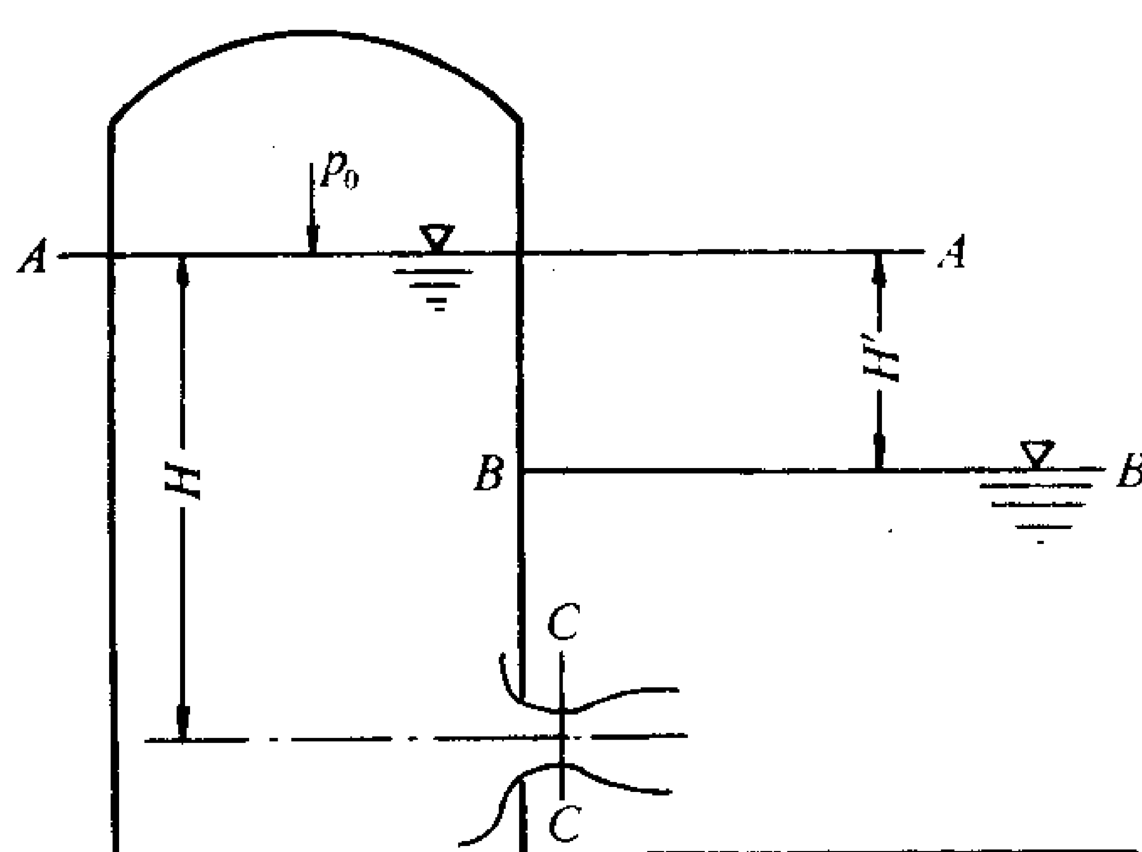


图 5-4 压力容器出流

(5-2-4)式计算。

$$Q=\mu\cdot A\cdot\sqrt{2gH_0}$$

式中，当自由出流时，

$$H_0=(Z_A-Z_C)+\frac{p_0'-p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}$$

$$=H+\frac{p_0}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A{}^2}{2g}$$

p_0'——液面的绝对压强。

忽略$\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}$项，则 $H_0=H+\frac{p_0}{\gamma}$

当淹没出流时，

$$H_0=(H_A-H_B)+\frac{p'_0-p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A^2-\alpha_B v_B^2}{2g}$$

$$=H'+\frac{p_0}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A^2-\alpha_B v_B^2}{2g}$$

气体出流一般为淹没出流，流量计算与(5-2-4)式相同，但用压强差代替水头差

$$Q=\mu\cdot A\cdot\sqrt{\frac{2\Delta p_0}{\rho}} \tag{5-2-7}$$

式中 Δp_0——如同(5-2-4)式中 H_0，是促使出流的全部能量；

$$\Delta p_0=(p_A-p_B)+\frac{\rho(\alpha_A v_A^2-\alpha_B v_B^2)}{2} \qquad \text{N/m}^2$$

ρ——气体的密度，kg/m^3。

气体管路中装一有薄壁孔口的隔板，称为孔板(如图 5-5)，此时通过孔口的出流是淹没出流。因为流量、管径在给定条件下不变，所以测压断面上 $v_A=v_B$。故

$$\Delta p_0=p_A-p_B$$

应用(5-2-7)式

$$Q=\mu\cdot A\sqrt{\frac{2\Delta p_0}{\rho}}=\mu\cdot A\cdot\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_A-p_B)} \tag{5-2-8}$$

在管道中装设如上所说孔板，测得孔板前后渐变断面上的压差，即可求得管中流量。这种装置叫孔板流量计。

孔板流量计的流量系数 μ 值如前所说，是通过实验测定得来。为了便于练习做题，现给出圆形薄壁孔板的流量系数曲线(见图 5-6)，以供参考。工程中应按具体孔板查有关孔板流量计手册获得 μ 值。

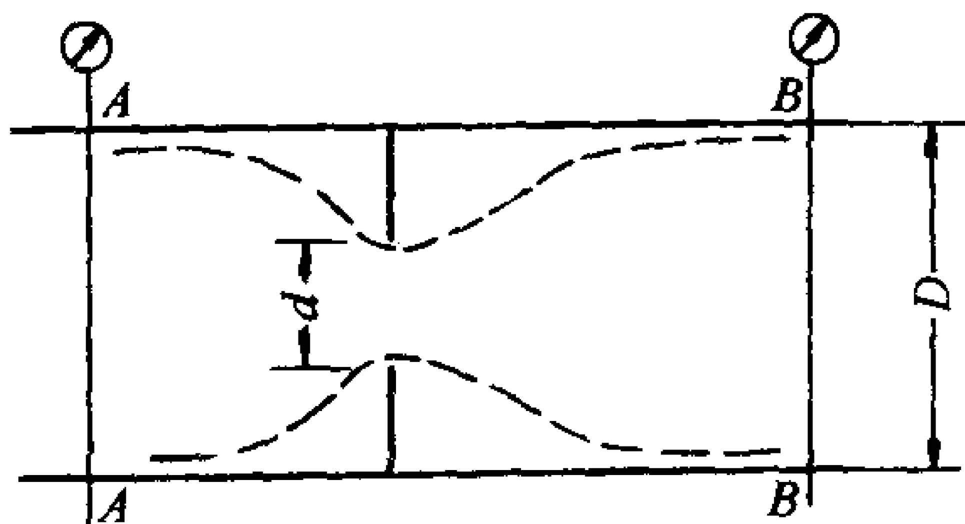


图 5-5 孔板流量计

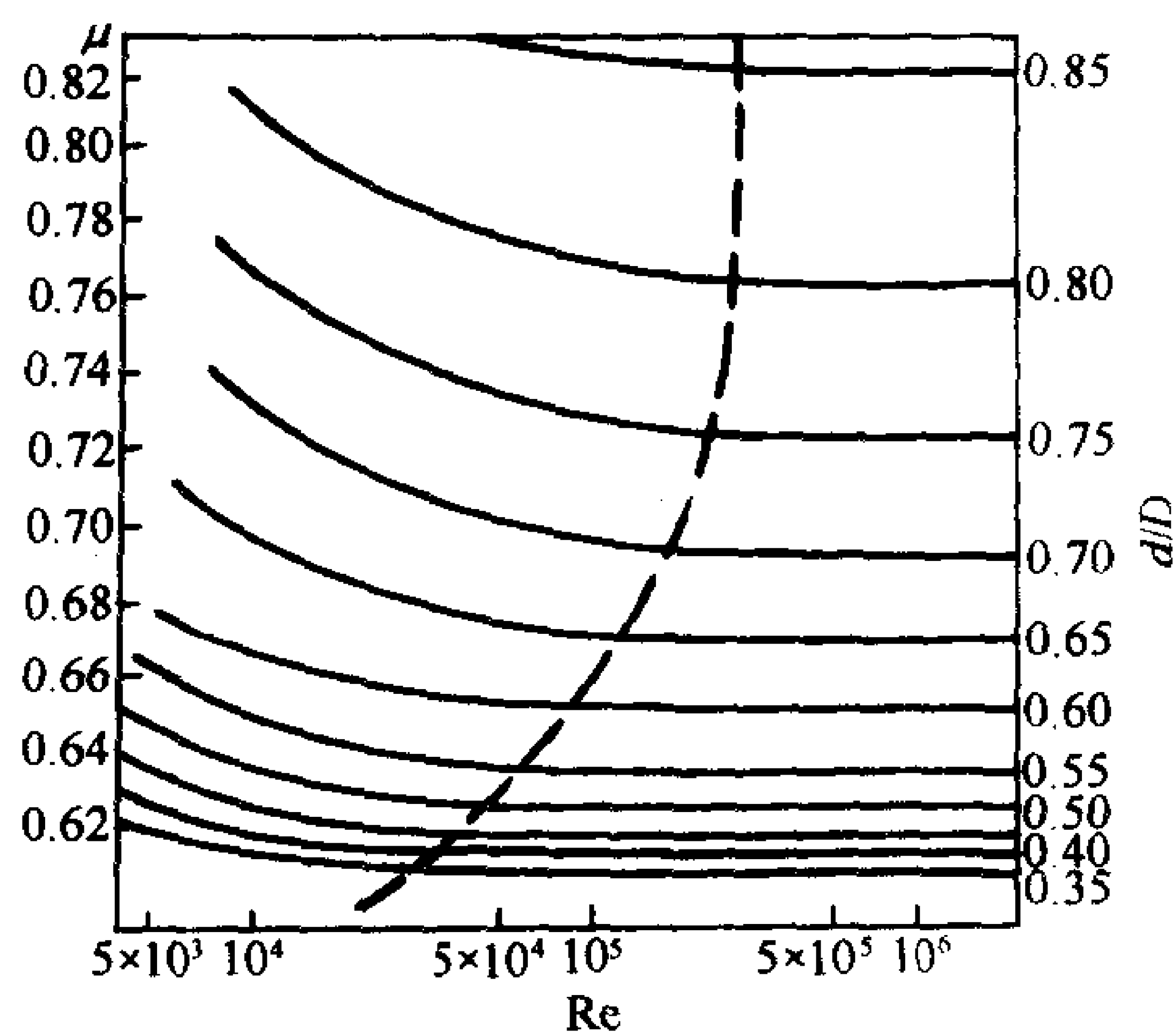


图 5-6 孔板流量计 μ 值

【例 5-1】 有一孔板流量计，测得 $\Delta p=50\text{mmH}_2\text{O}$，管道直径为 $D=200\text{mm}$，孔板直径为 $d=80\text{mm}$，试求水管中流量 Q。

【解】 (1) 此题为液体淹没出流，用(5-2-4)式求 Q，式中

$$H_0=(H_1-H_2)+\frac{p_1-p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2-\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

此时 $H_1=H_2, v_1=v_2$

$$H_0=\frac{p_1-p_2}{\gamma}=\frac{50}{1000}=0.05\text{m}$$

(2) $\frac{d}{D}=\frac{80}{200}=0.4$。若认为流动处在阻力平方区，$\mu$ 与 Re 无关，则在图 5-6 上查得 $\mu=0.61$。

(3) $Q=\mu\cdot A\cdot\sqrt{2gH_0}=0.61\times0.785\times0.08^2\times\sqrt{2\times9.81\times0.05}$

$=0.61\times0.00502\times\sqrt{0.981}=0.003033\text{m}^3/\text{s}$

【例 5-2】 如上题，孔板流量计装在气体管路中，测得 $p_1-p_2=50\text{mmH}_2\text{O}$，其 D、d 尺寸同上例，求气体流量。

【解】 (1) 此题为气体淹没出流，可由(5-2-8)式求 Q。

$$\Delta p=50\times9.81=490.5\text{N/m}^2$$

(2) $d/D=0.4$，采用上题 $\mu=0.61$

(3) $Q=\mu\cdot A\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$

$=0.61\times0.00502\cdot\sqrt{\frac{2\times490.5}{1.2}}=0.0876\text{m}^3/\text{s}$

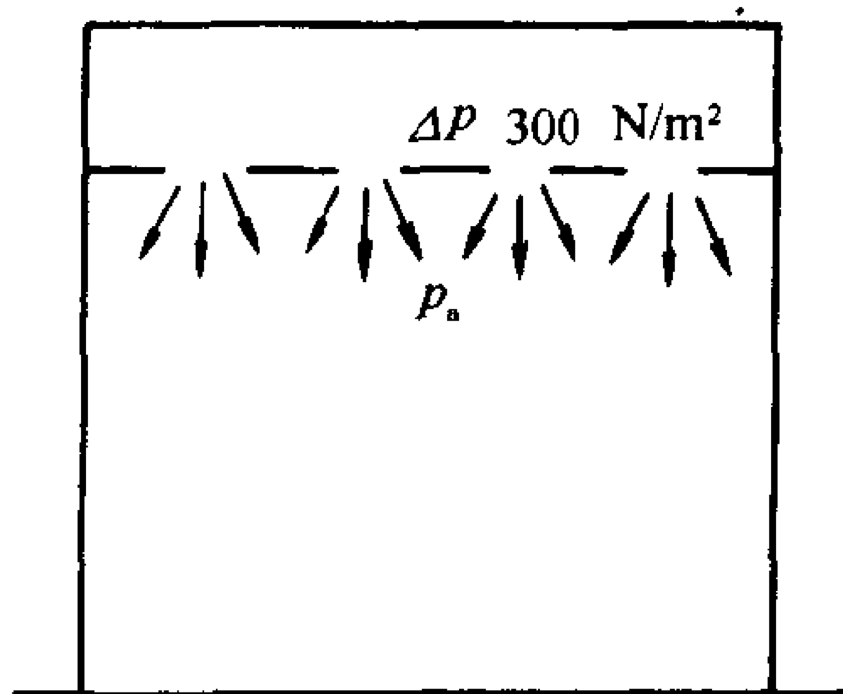


图 5-7 孔板送风

【例 5-3】 房间顶部设置夹层，把处理过的清洁空气用风机送入夹层中，并使层中保持 300Pa 的压强。清洁空气在此压强作用下，通过孔板的孔口向房间流出，这就是孔板送风(见图 5-7)。求每个孔口出流的流量及速度。孔的直径为 1cm。

【解】 孔口流量公式用(5-2-8)式

$$Q=\mu\cdot A\cdot\sqrt{2\cdot\frac{\Delta p}{\rho}}$$

孔板流量系数 $\mu=0.6$，速度系数 $\varphi=0.97$(从手册中查到)

空气的密度 ρ 取为 1.2kg/m^3

孔口的面积 $A=\frac{\pi}{4}d^2=0.785\times0.01^2=0.785\times10^{-4}\text{m}^2$

$$Q=0.6\times0.785\times10^{-4}\cdot\sqrt{\frac{2\times300}{1.2}}=0.6\times0.785\times10^{-4}\times22.4=10.5\times10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$$

出流速度可从 $v_C=\varphi\cdot\sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}}$ 求出

$$v_C=0.97\times\sqrt{\frac{2\times300}{1.2}}=0.97\times22.4=21.73\text{m/s}$$

第三节 管 嘴 出 流

一、圆柱形外管嘴出流

当圆孔壁厚 δ 等于 $3\sim4d$ 时，或者在孔口处外接一段长 $l=3\sim4d$ 的圆管时（如图 5-8 所示），此时的出流称为圆柱形外管嘴出流，外接短管称为管嘴。

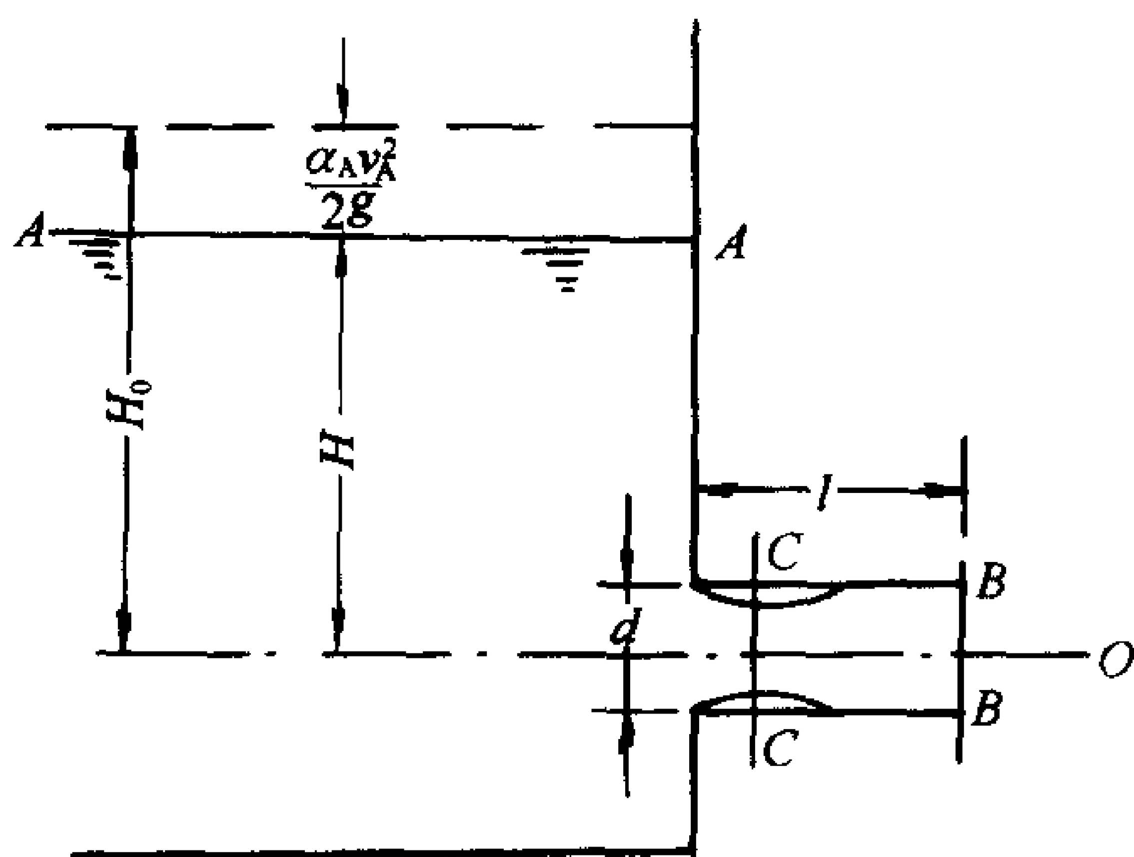


图 5-8 管嘴出流

水流入管嘴时如同孔口出流一样，流股也发生收缩，存在着收缩断面 C-C。尔后流股逐渐扩张，至出口断面上完全充满管嘴断面流出。

在收缩断面 C-C 前后流股与管壁分离，中间形成旋涡区，产生负压，出现了管嘴的真空现象。如前讨论孔口的作用水头 H_0，其中压差项 $\dfrac{p_A-p_C}{\gamma}$，在管嘴出流中由于 p_C（绝对压强）小于大气压，从而使 H_0 增大，则出流流量亦增大。所以由于管嘴出流出现真空现象，促使出流流量增大，这是管嘴出流不同于孔口出流的基本特点。

下面讨论管嘴出流的速度、流量计算公式。

列 A-A 及 B-B 断面的能量方程，以管嘴中心线为基准线。

$$Z_A+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}=Z_B+\frac{p_B}{\gamma}+\frac{\alpha_B v_B^2}{2g}+\zeta\frac{v_B^2}{2g}$$

$$(Z_A-Z_B)+\frac{p_A-p_B}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}=(\alpha_B+\zeta)\frac{v_B^2}{2g}$$

与孔口出流一样，令

$$H_0=(Z_A-Z_B)+\frac{p_A-p_B}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_A^2}{2g} \tag{5-3-1}$$

则由上式可得

$$H_0=(\alpha_B+\zeta)\frac{v_B^2}{2g}$$

所以

$$v_B\frac{1}{\sqrt{\alpha_B+\zeta}}\cdot\sqrt{2gH_0}=\varphi\cdot\sqrt{2gH_0} \tag{5-3-2}$$

$$Q=v_B\cdot A=\varphi\cdot A\cdot\sqrt{2gH_0}=\mu\cdot A\cdot\sqrt{2gH_0} \tag{5-3-3}$$

由于出口断面 B-B 流股完全充满（不同于孔口），$\varepsilon=1$，则 $\varphi=\mu=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_B+\zeta}}$，取 $\alpha_B=1$，则 $\varphi=\mu=\dfrac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$。

管嘴的阻力损失主要是进口损失，沿程阻力损失很小可略去。于是从局部阻力系数图 4-23 中查得锐缘进口 $\zeta=0.5$，作为管嘴的阻力系数。这样 $\varphi=\mu=\dfrac{1}{\sqrt{1+0.5}}=0.82$。

（5-3-1）式中 H_0 为管嘴出流的作用水头。在图 5-8 所给的具体条件下，$Z_A-Z_B=H$，$p_A=p_B=p_a$，v_A 对比 v_B 可忽略不计，于是 $H_0=H$。流量则为

$$Q=\mu\cdot A\sqrt{2gH} \qquad (5\text{-}3\text{-}4)$$

以上(5-3-2)式及(5-3-4)式就是管嘴自由出流的速度 v_B 与流量 Q 的计算公式。

管嘴真空现象及真空值,可通过收缩断面 C-C 与出口断面 B-B 建立能量方程得到证明。

$$\frac{p_C}{\gamma}+\frac{\alpha_C v_C^2}{2g}=\frac{p_B}{\gamma}+\frac{\alpha_B v_B^2}{2g}+h_1$$

$$h_1=\text{突扩损失}+\text{沿程损失}=\left(\zeta_m+\lambda\frac{l}{d}\right)\frac{v_B^2}{2g};$$

取

$$\alpha_C=\alpha_B=1;$$

$$v_C=\frac{A}{A_C}\cdot v_B=\frac{1}{\varepsilon}v_B;$$

$$p_B=p_a。$$

则上式变为

$$\frac{p_C}{\gamma}=\frac{p_B}{\gamma}-\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}-1-\zeta_m-\lambda\frac{l}{d}\right)\frac{v_B{}^2}{2g}$$

从(5-3-2)式可得$\frac{v_B^2}{2g}=\varphi^2\cdot H_0$,从突扩阻力系数计算式求得 $\zeta_m=\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2$,因此

$$\frac{p_C}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}-\left[\varepsilon^{\frac{1}{2}}-1-\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2-\lambda\frac{l}{d}\right]\varphi^2\cdot H_0$$

当 $\varepsilon=0.64$,$\lambda=0.02$,$l/d=3$,$\varphi=0.82$ 时,

$$\frac{p_C}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}-0.75H_0$$

则圆柱形管嘴在收缩断面 C—C 上的真空值为:

$$\frac{p_a-p_C}{\gamma}=0.75H_0 \qquad (5\text{-}3\text{-}5)$$

可见 H_0 愈大,收缩断面上真空值亦愈大。当真空值达到 7～8mH_2O 时,常温下的水发生汽化而不断产生气泡,破坏了连续流动。同时空气在较大的压差作用下,经 B-B 断面冲入真空区,破坏了真空。气泡及空气都使管嘴内部液流脱离管内壁,不再充满断面,于是成为孔口出流。因此为保证管嘴的正常出流,真空值必须控制在 7mH_2O 以下,从而决定了作用水头 H_0 的极限值$[H_0]=\frac{7}{0.75}=9.3$m。这就是外管嘴正常工作条件之一。

其次,管嘴长度也有一定极限值,太长阻力大,使流量减少。太短则流股收缩后来不及扩大到整个断面而呈非满流流出,仍如孔口一样,因此一般取管嘴长度$[l]=(3～4)d$。这就是外管嘴正常工作条件之二。

二、其它类型管嘴出流

对于其它类型的管嘴出流,速度、流量计算公式与圆柱形外管嘴公式形式相同。但速度系数、流量系数各有不同。下面介绍工程上常用的几种管嘴。

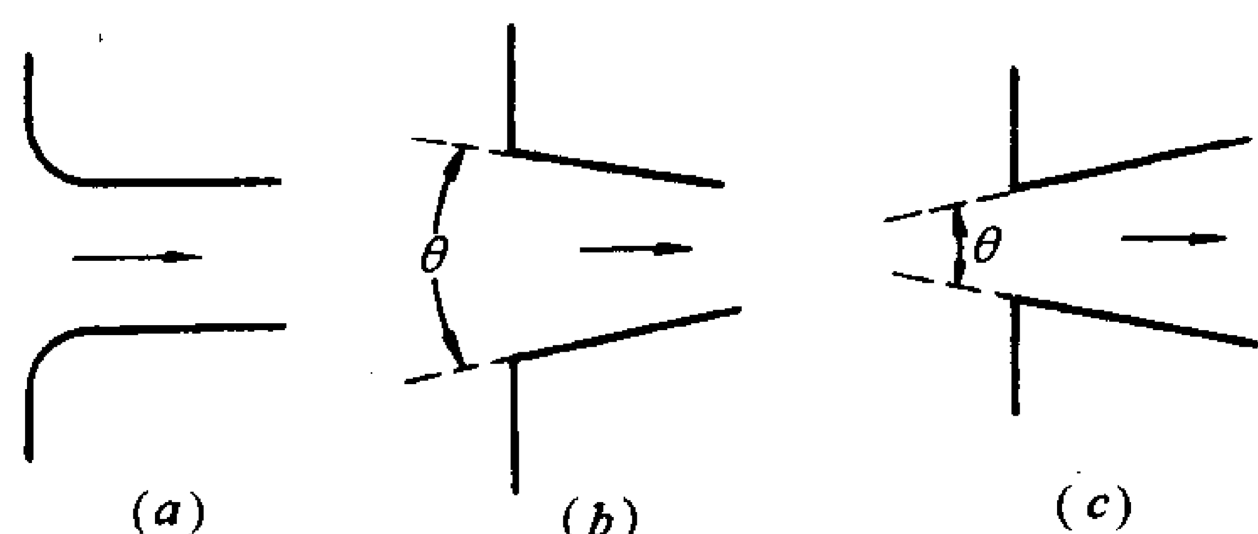


图 5-9 各种常用管嘴

1. 流线形管嘴 如图 5-9a,流速系数

$\varphi=\mu=0.97$，适用于要求流量大，水头损失小，出口断面上速度分布均匀的情况。

2. 收缩圆锥形管嘴　如图 5-9*b*，出流与收缩角度 θ 有关。$\theta=30°24'$，$\varphi=0.963$，$\mu=0.943$ 为最大值。适用于要求加大喷射速度的场合。如消防水枪。

3. 扩大圆锥形管嘴　如图 5-9*c*，当 $\theta=5°\sim7°$ 时，$\mu=\varphi=0.42\sim0.50$。用于要求将部分动能恢复为压能的情况如引射器的扩压管。

【例 5-4】 液体从封闭的立式容器中经管嘴流入开口水池(图 5-10)，管嘴直径 $d=8\text{cm}$，$h=3\text{m}$，要求流量为 $5\times10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$。试求作用于容器内液面上的压强为多少？

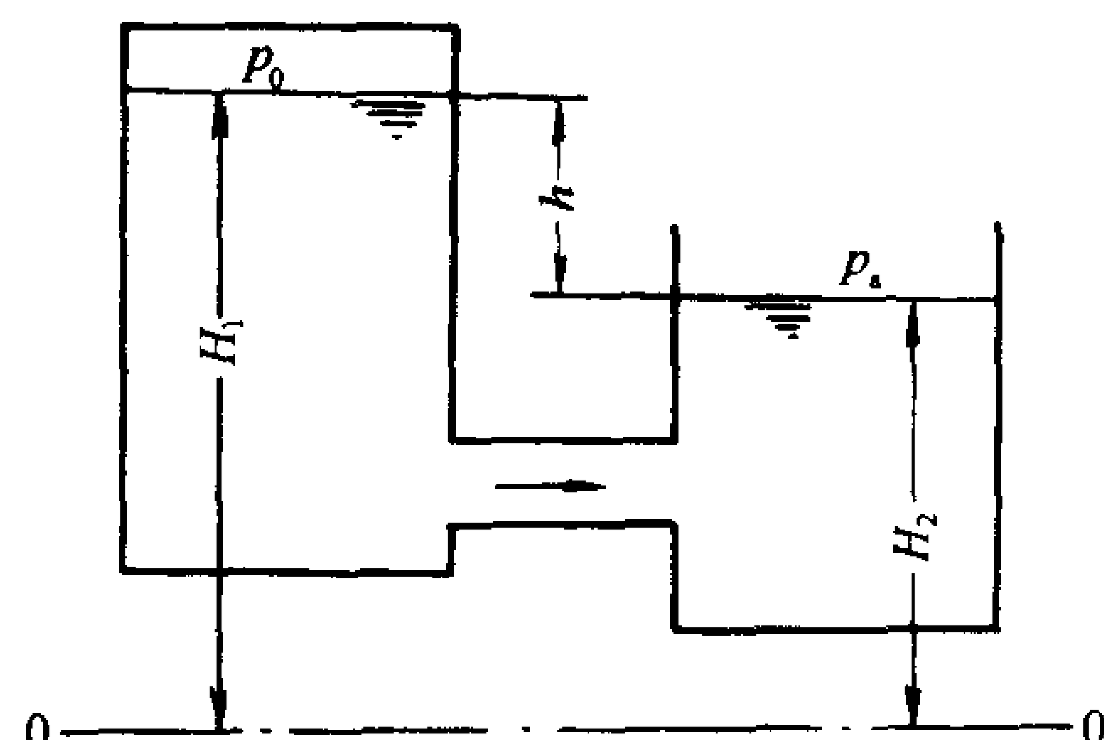


图 5-10　管嘴计算例题

【解】 按管嘴出流流量公式

$$Q=\mu A\cdot\sqrt{2gH_0}$$

求作用水头 H_0，

$$H_0=\frac{Q^2}{2g\mu^2A^2}$$

取 $\mu=0.82$

则

$$H_0=\frac{0.05^2}{2\times9.8\times0.82^2\times(0.785\times0.08^2)^2}=7.5\text{m}$$

在图 5-10 所给具体条件下，忽略上下游液面速度，则 $H_0=\dfrac{p_b-p_a}{\gamma}+(H_1-H_2)=\dfrac{p_0}{\gamma}+h$

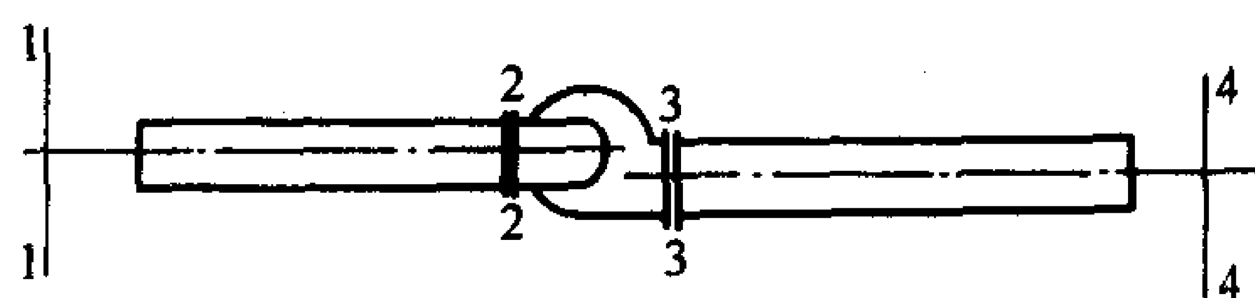
于是解出

$$\frac{p_0}{\gamma}=H_0-h=7.5-3=4.5\text{m}$$

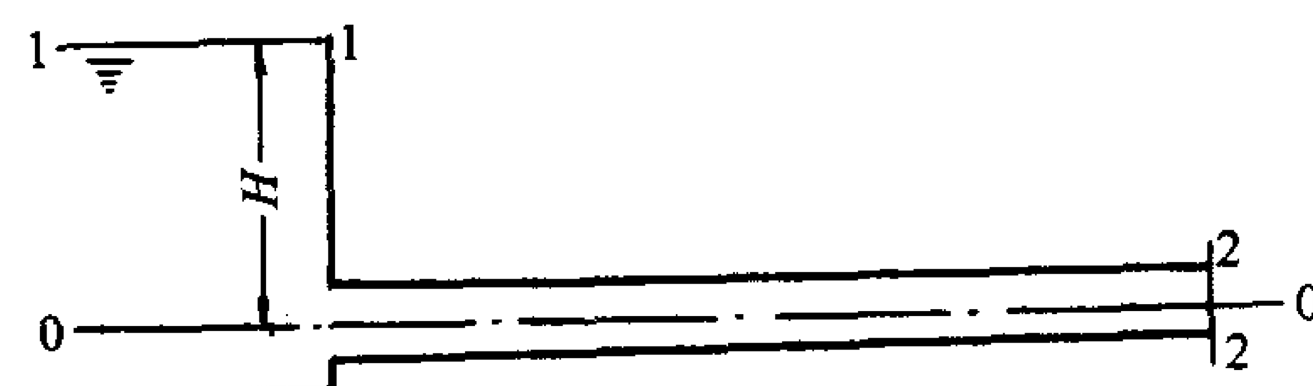
$$p_0=4.5\times1000\times9.8=4.41\text{kN/m}^2$$

第四节　简　单　管　路

为了研究流体在管路中的流动规律，首先讨论流体在简单管路中的流动。所谓简单管路就是具有相同管径 d，相同流量 Q 的管段，它是组成各种复杂管路的基本单元。如图 5-11*b* 所示。



(*a*)



(*b*)

图 5-11　简单管路

当忽略自由液面速度，且出流流至大气。以 0-0 为基准线，列 1-1，2-2 两断面间的能量方程式：

$$H=\lambda\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}+\frac{v^2}{2g}$$

$$H=\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta+1\right)\frac{v^2}{2g}$$

因出口局部阻力系数 $\zeta_0=1$，若将 1 作为 ζ_0 包括到 $\Sigma\zeta$ 中去，则上式

$$H=\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{v^2}{2g}$$

用 $v^2=\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2$ 代入上式

$$H=\frac{8\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)}{\pi^2\cdot d^4\cdot g}Q^2$$

令

$$S_H=\frac{8\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)}{\pi^2\cdot d^4\cdot g}\quad s^2/m^5 \tag{5-4-1}$$

则

$$H=S_H\cdot Q^2\quad m \tag{5-4-2}$$

对于图 5-11a 所示风机带动的气体管路，(5-4-2)式仍适用。气体常用压强表示，于是

$$p=\gamma H=\gamma\cdot S_H\cdot Q^2$$

令

$$S_p=\gamma\cdot S_H=\frac{8\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\rho}{\pi^2\cdot d^4}kg/m^7 \tag{5-4-3}$$

则

$$p=S_p\cdot Q^2\quad N/m^2 \tag{5-4-4}$$

(5-4-4)式多应用于不可压缩的气体管路计算中，如空调、通风管道计算。而(5-4-2)式则多用于液体管路计算上，如给水管路的计算。

无论 S_p 或 S_H，对于一定的流体(即 γ、ρ 一定)，在 d、l 已给定时，S 只随λ 和$\Sigma\zeta$ 变化。从第四章知 λ 值与流动状态有关，当流动处在阻力平方区时，λ 仅与k/d 有关，所以在管路的管材已定的情况下，λ 值可视为常数。$\Sigma\zeta$ 项中只有进行调节的阀门的 ζ 可以改变，而其它局部构件已确定局部阻力系数是不变的。所以从(5-4-1)、(5-4-3)两式可知：S_p、S_H 对已给定的管路是一个定数，它综合反映了管路上的沿程阻力和局部阻力情况，故称为管路阻抗。引入这一概念对分析管路流动较为方便。(5-4-1)、(5-4-3)式即为阻抗的两种表达式。两者形式上的区别仅在于有无容重 γ。

从(5-4-2)、(5-4-4)式即可看出，用阻抗表示的图 5-11a、b 两种简单管路流动规律非常简练。两式所表示的规律为：简单管路中，总阻力损失与体积流量平方成正比。这一规律在管路计算中广为应用。

【例 5-5】 某矿渣混凝土板风道，断面积为 1m×1.2m，长为 50m，局部阻力系数 $\Sigma\zeta=2.5$，流量为 14m^3/s，空气温度为 20℃，求压强损失。

【解】 1. 矿渣混凝土板 $K=1.5$mm，20℃空气的运动粘滞系数 $\nu=15.7\times10^{-6}m^2/s$。

对矩形风道计算阻力损失应用当量直径 d_e

$$d_e=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2\times1\times1.2}{1+1.2}=1.09m$$

求矩形风道流动速度 v

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{14}{1\times1.2}=11.65\text{m/s}$$

求雷诺数 Re

$$\text{Re}=\frac{vd_e}{\nu}=\frac{11.65\times1.09}{15.7\times10^{-6}}=8\times10^5$$

$$\frac{K}{d_e}=\frac{1.5}{1.09\times10^3}=1.38\times10^{-3}$$

然后应用莫迪图查得 $\lambda=0.021$

2. 计算 S_p 值

因为

$$v=\frac{Q}{A},v^2=\frac{Q^2}{A^2}$$

$$p=\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{Q^2/A^2}{2}\cdot\rho=\frac{\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\rho}{2A^2}\cdot Q^2$$

则对矩形管道其

$$S_p=\frac{\left(\lambda\frac{l}{d_e}+\Sigma\zeta\right)\cdot\rho}{2A^2}$$

$$S_p=\frac{\left(0.021\times\frac{50}{1.09}+2.5\right)\times1.2}{2\times(1\times1.2)^2}=1.443$$

$$p=S_p\cdot Q^2=1.443\times14^2=282.84\text{N/m}^2$$

(5-4-4)及(5-4-2)两式是在图 5-11 具体条件下(出流至大气,1-1 断面 $p_1=p_a$,无高差)导出,得到水池水位 H 及风机风压 p 全部用来克服流动阻力。但对另一些管路并不如此,必须具体加以分析。图 5-12 给出,水泵向压力水箱送水简单管路(d 及 Q 不变),应用第三章中有能量输入的伯努利方程

$$H_i=(Z_2-Z_1)+\frac{p'_0-p_a}{\gamma}+\frac{\alpha_2v_2^2-\alpha_1v_1^2}{2g}+h_{l1-2}$$

略去液面速度头,输入水头为

$$H_i=H+\frac{p_0}{\gamma}+S_H\cdot Q^2\qquad(5\text{-}4\text{-}5)$$

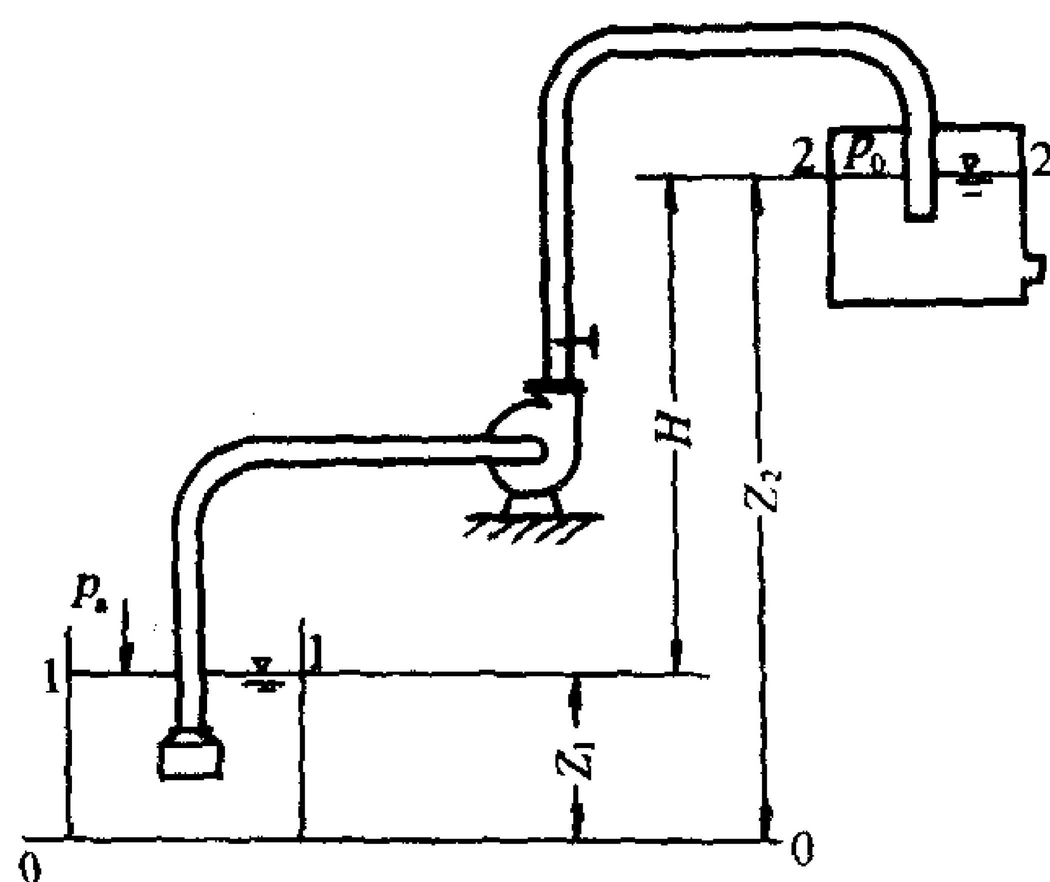


图 5-12 水泵系统

(5-4-5)式说明水泵水头,(又称扬程)不仅用来克服流动阻力,还用来提高液体的位置水头、压强水头,使之流到高位压力水箱中。

下面讨论工程中常用的虹吸管。所谓虹吸管即管道中一部分高出上游供水液面的简单管路(见图 5-13)。

正因为虹吸管的一部分高出上游供水液面,必然在虹吸管中存在真空区段。当真空达到某一限值时,将使溶解在水中的空气分离出来,随真空度的加大,空气量增加。大量气体集结在虹吸管顶部,缩小了有效过流断面阻碍流动。严重时造成气塞,破坏液体连续输送。为了保证虹吸管正常流动,必须限定管中最大真空高度不得超过允许值$[h_v]$

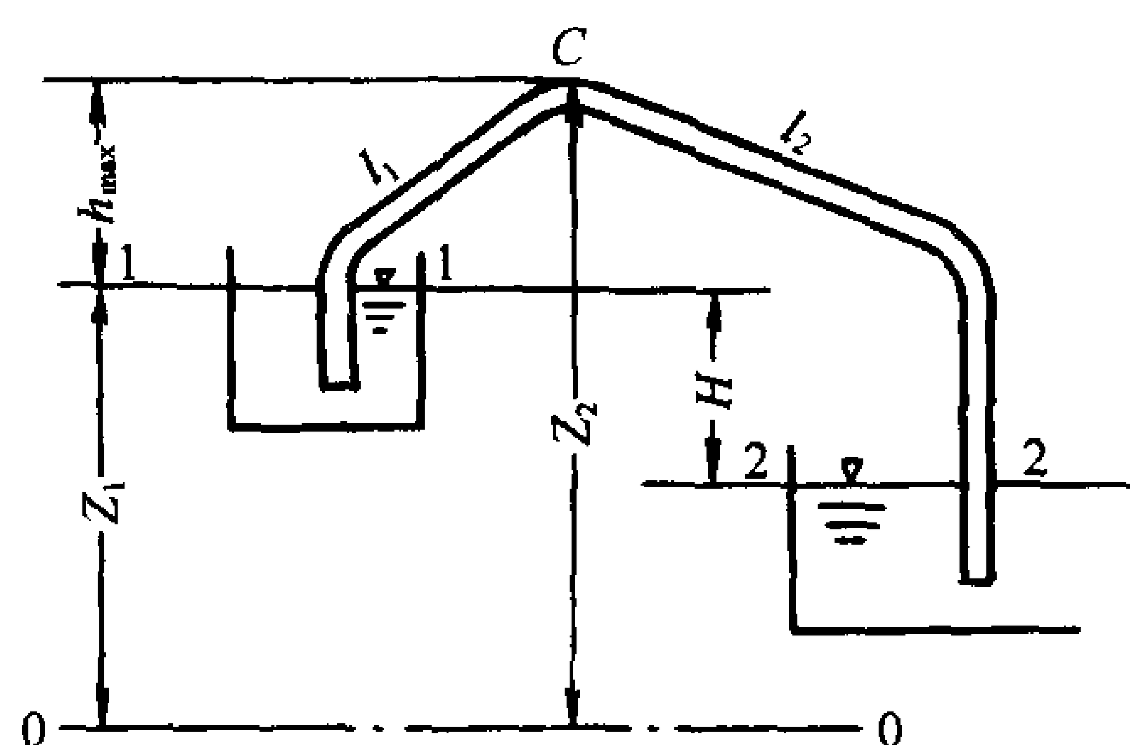


图 5-13　虹吸管

$$[h_v]=7\sim8.5\text{m}$$

虹吸管中存在真空区段是它的流动特点，控制真空高度则是虹吸管的正常工作条件。

现以水平线 0-0 为基准线，列出图 5-13 中 1-1、2-2 能量方程。

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{l1-2}$$

同前令　$H_0=(Z_1-Z_2)+\dfrac{p_1-p_2}{\gamma}+\dfrac{\alpha_1 v_1^2-\alpha_2 v_2^2}{2g}$　(5-4-6)

于是

$$H_0=h_{l1-2}=S_H\cdot Q^2 \tag{5-4-7}$$

$$Q=\sqrt{\frac{H_0}{S_H}} \tag{5-4-8}$$

这就是虹吸管流量计算公式。

式中

$$S_H=\frac{8\left(\lambda\dfrac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)}{\pi^2 d^4 g}\qquad \text{s}^2/\text{m}^5$$

在图 5-13 条件下：

$$l=l_1+l_2$$

$$\Sigma\zeta=\zeta_e+3\zeta_b+\zeta_0$$

式中　ζ_e——进口阻力系数；

ζ_b——转弯阻力系数；

ζ_0——出口阻力系数。

式中，H_0 在图 5-13 条件下：

$$p_1=p_2=p_a\qquad v_1=v_2=0$$

$$H_0=(Z_1-Z_2)=H$$

以上数值代入(5-4-8)式中

于是流量为：

$$Q=\frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{\sqrt{\zeta_e+3\zeta_b+\zeta_0+\lambda\dfrac{l_1+l_2}{d}}}\cdot\sqrt{2gH} \tag{5-4-9}$$

所以

$$v=\frac{1}{\sqrt{\zeta_e+3\zeta_b+\zeta_0+\lambda\dfrac{l_1+l_2}{d}}}\cdot\sqrt{2gH} \tag{5-4-10}$$

上两式即是图 5-13 情况下虹吸管的速度及流量计算公式。

为了计算最大真空高度，取 1-1 及最高断面 C-C 列能量方程。

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=Z_C+\frac{p_C}{\gamma}+\frac{\alpha v^2}{2g}+\left(\zeta_e+2\zeta_b+\lambda\frac{l_1}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$$

在图 5-13 条件下，$p_1=p_a$，$v_1\approx0$，$\alpha\approx1$，上式为

$$\frac{p_a - p_C}{\gamma} = (Z_C - Z_1) + \left(1 + \zeta_e + 2\zeta_b + \lambda\frac{l_1}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$$

用(5-4-10)式的 v 代入上式中得出

$$\frac{p_a - p_C}{\gamma} = (Z_C - Z_1) + \frac{1 + \zeta_e + 2\zeta_b + \lambda l_1/d}{\zeta_e + 3\zeta_b + \zeta_0 + \lambda\dfrac{l_1 + l_2}{d}}H \tag{5-4-11}$$

为了保证虹吸管正常工作,(5-4-11)式计算所得的真空高度 $\dfrac{p_a - p_C}{\gamma}$ 应小于最大允许值 $[h_v]$。

【例 5-6】 给出图 5-13 的具体数值如下:

$H=2\text{m}, l_1=15\text{m}, l_2=20\text{m}, d=200\text{mm}, \zeta_e=1, \zeta_b=0.2, \zeta_0=1, \lambda=0.025, [h_v]=7\text{m}$。

求通过虹吸管流量及管顶最大允许安装高度。

【解】 由(5-4-9)式求得流量。

$$Q = \frac{\dfrac{1}{4}\pi d^2}{\sqrt{\zeta_e + 3\zeta_b + \zeta_0 + \lambda\dfrac{l_1 + l_2}{d}}}\sqrt{2gH}$$

$$= \frac{0.0314}{\sqrt{1 + 3\times0.2 + 1 + 4.38}}\cdot\sqrt{39.2}$$

$$= 0.0745\text{m}^3/\text{s}$$

由(5-4-11)式求得最大安装高度。

$$Z_C - Z_1 = \frac{p_a - p_C}{\gamma} - \frac{1 + \zeta_e + 2\zeta_b + \lambda l_1/d}{\zeta_e + 3\zeta_b + \zeta_0 + \lambda\dfrac{l_1 + l_2}{d}}\cdot H$$

当 $\dfrac{p_a - p_C}{\gamma} = [h_v]$ 时, $Z_C - Z_1 = h_{max}$

$$h_{max} = [h_v] - \frac{1 + \zeta_e + 2\zeta_b + \lambda l_1/d}{\zeta_e + 3\zeta_b + \zeta_0 + \lambda\dfrac{l_1 + l_2}{d}}\cdot H$$

$$= 7 - \frac{4.275}{6.98}\times 2 = 5.78\text{m}$$

第五节　管路的串联与并联

任何复杂管路都是由简单管路经串联、并联组合而成。因此研究串联、并联管路的流动规律十分重要。

一、串联管路

串联管路是由许多简单管路首尾相接组合而成,如图 5-14 所示。

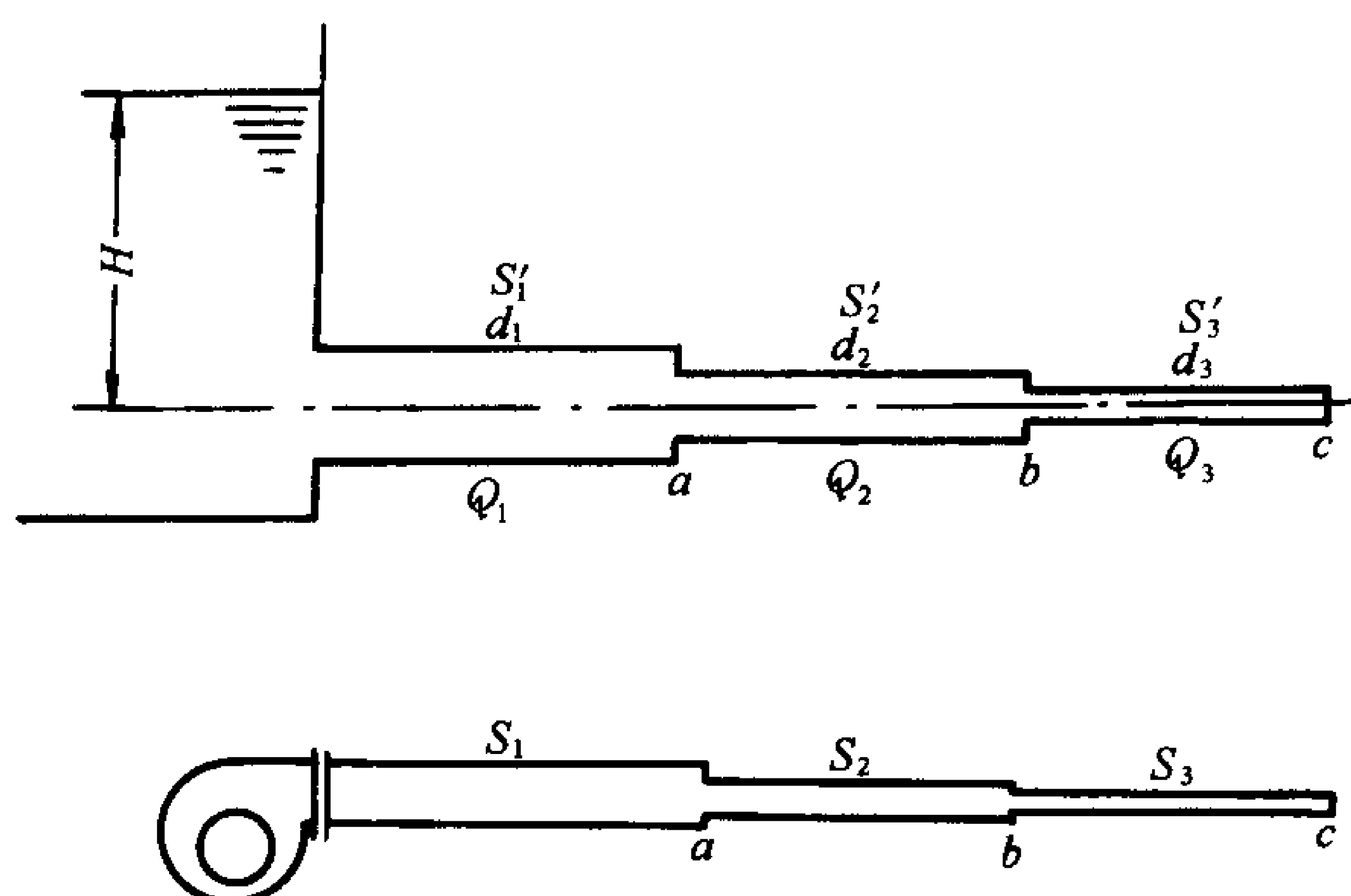


图 5-14　串联管路

管段相接之点称为节点，如图中 a 点、b 点。在每一个节点上都遵循质量平衡原理，即流入的质量流量与流出的质量流量相等，当 $\rho=$ 常数时，流入的体积流量等于流出的体积流量，取流入流量为正，流出流量为负，则对于每一个节点可以写出 $\Sigma Q=0$。因此对串联管路（无中途分流或合流）则有：

$$Q_1=Q_2=Q_3 \tag{5-5-1}$$

串联管路阻力损失，按阻力叠加原理有：

$$h_{l1-3}=h_{l1}+h_{l2}+h_{l3}=S_1Q_1^2+S_2Q_2^2+S_3\cdot Q_3^2 \tag{5-5-2}$$

因流量 Q 各段相等，于是得

$$S=S_1+S_2+S_3 \tag{5-5-3}$$

由此得出结论：无中途分流或合流，则流量相等，阻力叠加，总管路的阻抗 S 等于各管段的阻抗叠加。这就是串联管路的计算原则。

二、并联管路

流体从总管路节点 a 上分出两根以上的管段，而这些管段同时又汇集到另一节点 b 上，在节点 a 和 b 之间的各管段称为并联管路，如图 5-15 所示。

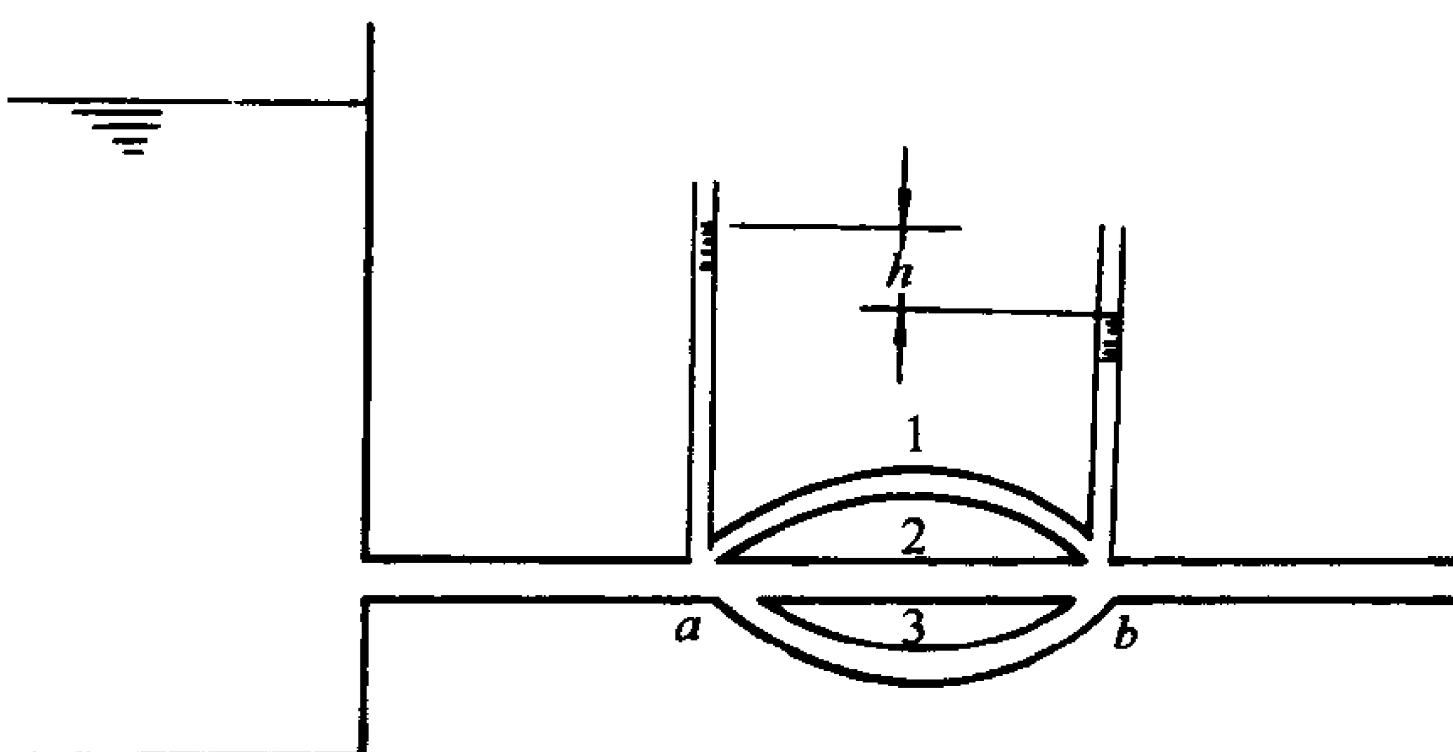


图 5-15　并联管路

同串联管路一样，遵循质量平衡原理，$\rho=$ 常数时，应满足 $\Sigma Q=0$，则 a 点上流量为

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3 \tag{5-5-4}$$

并联节点 a、b 间的阻力损失，从能量平衡观点来看，无论是 1 支路、2 支路、3 支路均等于 a、b 两节点的压头差。于是

$$h_{l1}=h_{l2}=h_{l3}=h_{la-b} \tag{5-5-5}$$

设 S 为并联管路的总阻抗，Q 为总流量，则有

$$S_1\cdot Q_1^2=S_2\cdot Q_2^2=S_3\cdot Q_3^2=S\cdot Q^2 \tag{5-5-6}$$

而
$$Q=\frac{\sqrt{h_{la-b}}}{\sqrt{S}},Q_1=\frac{\sqrt{h_{l1}}}{\sqrt{S_1}},Q^2=\frac{\sqrt{h_{l2}}}{\sqrt{S_2}},Q_3=\frac{\sqrt{h_{l3}}}{\sqrt{S_3}} \tag{5-5-7}$$

将(5-5-7)和(5-5-5)代入(5-5-4)式中得出：

$$\frac{1}{\sqrt{S}}=\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}} \tag{5-5-8}$$

于是得到并联管路计算原则：并联节点上的总流量为各支管中流量之和；并联各支管上的阻力损失相等。总的阻抗平方根倒数等于各支管阻抗平方根倒数之和。

现在进一步分析(5-5-7)式，将它变为：

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\sqrt{\frac{S_2}{S_1}};\frac{Q_2}{Q_3}=\sqrt{\frac{S_3}{S_2}};\frac{Q_3}{Q_1}=\sqrt{\frac{S_1}{S_3}} \tag{5-5-9}$$

写成连比形式：

$$Q_1:Q_2:Q_3=\frac{1}{\sqrt{S_1}}:\frac{1}{\sqrt{S_2}}:\frac{1}{\sqrt{S_3}} \tag{5-5-10}$$

此两式即为并联管路流量分配规律。式(5-5-10)的意义在于，各分支管路的管段几何尺寸、局部构件确定后，按照节点间各分支管路的阻力损失相等，来分配各支管上的流量，阻抗 S 大的支管其流量小，S 小的支管其流量大。在专业上并联管路设计计算中，必须进行"阻力平衡"，它的实质就是应用并联管路中流量分配规律，在满足用户需要的流量下，设计合适的管路尺寸及局部构件，使各支管上阻力损失相等。

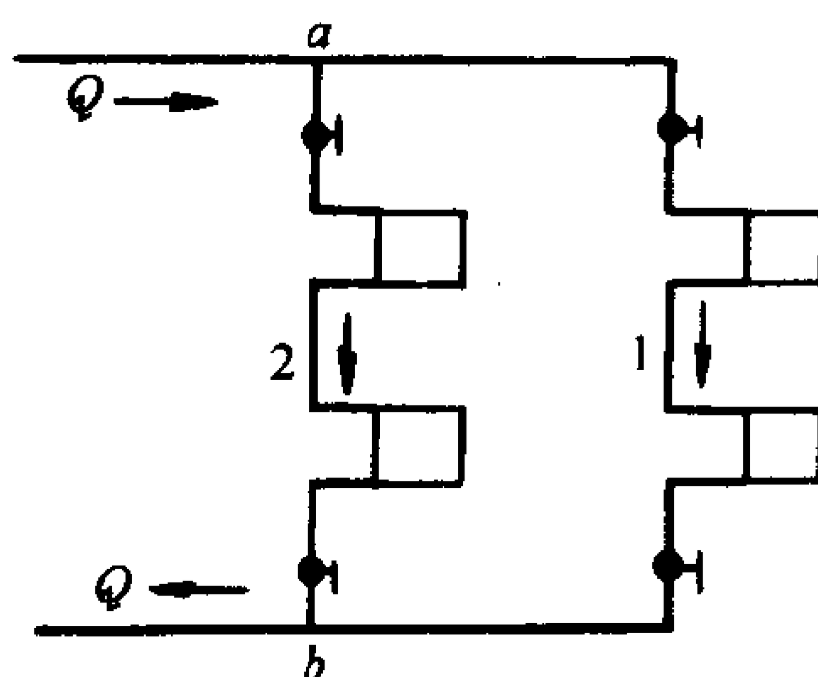


图 5-16　例 5-7 图

【例 5-7】　某两层楼的供暖立管，管段 1 的直径为 20mm，总长为 20m，$\Sigma\zeta_1=15$。管段 2 的直径为 20mm，总长为 10m，$\Sigma\zeta_2=15$，管路的 $\lambda=0.025$，干管中的流量 $Q=1\times10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$，求 Q_1 和 Q_2。

【解】　从图 5-16 可知，节点 a、b 间并联有 1、2 两管段。由 $S_1\cdot Q_1^2=S_2\cdot Q_2^2$ 得

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$$

计算 S_1、S_2，

$$S_1=\left(\lambda_1\frac{l}{d}+\Sigma\zeta_1\right)\frac{8\rho}{\pi^2d^4}=\left(0.025\times\frac{20}{0.02}+15\right)\frac{8\times1000}{3.14^2\times0.02^4}=2.03\times10^{11}\text{kg/m}^7$$

$$S_2=\left(0.025\times\frac{10}{0.02}+15\right)\frac{8\times1000}{3.14^2\times0.02^4}=1.39\times10^{11}\text{kg/m}^7$$

所以
$$\frac{Q_1}{Q_2}=\sqrt{\frac{1.39\times10^{11}}{2.03\times10^{11}}}=0.828$$

则
$$Q_1=0.828Q_2$$

又因
$$Q=Q_1+Q_2=0.828Q_2+Q_2=1.828Q_2$$

$$Q_2=\frac{1}{1.828}\cdot Q=0.55\times10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$$

于是得 $Q_1=0.828Q_2=0.828\times0.55\times10^{-3}=0.45\times10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$

从计算看出：支管 1 中，阻抗 S_1 比支管 2 中 S_2 为大，所以流量分配是支管 1 中流量小于支管 2 中流量。如果要求两管段中流量相等，显然现有的管径 d 及 $\Sigma\zeta$ 必须进行改变，使 S 相等才能达到流量相等。这种重新改变 d 及 $\Sigma\zeta$，使在 $Q_1=Q_2$ 下达到 $S_1=S_2$；$h_1=h_2$ 的计算，就是"阻力平衡"的计算。

第六节　管网计算基础

管网是由简单管路、并联、串联管路组合而成，基本上可分为枝状管网和环状管网两种。

一、枝状管网

例如，作为枝状管网类型之一，图 5-17 所给出的，是由三个吸气口，六根简单管路，并、串联而成的排风枝状管网。

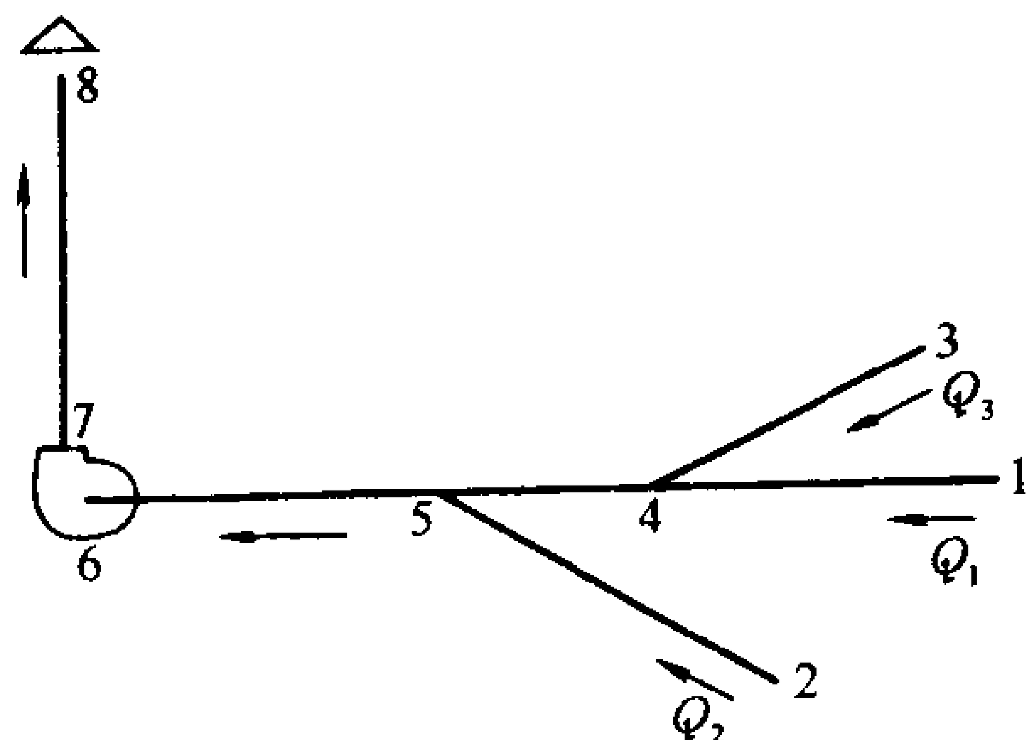


图 5-17　枝状管网

根据并、串联管路的计算原则，可得到该风机应具有的压头为

$$H=\frac{p}{\gamma}=h_{l1-4-5}+h_{l5-6}+h_{l7-8} \qquad (5\text{-}6\text{-}1)$$

风机应具有的风量为

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3 \qquad (5\text{-}6\text{-}2)$$

在节点 4 与大气（相当另一节点）间，存在着 1-4 管段、3-4 管段两根并联的支管。通常以管段最长，局部构件最多的一支参加阻力叠加。而另外一支则不应加入，只按并联管路的规律，在满足流量要求下，与第一支管段进行阻力平衡。

常遇到的水力计算，基本有两类：

1. 管路布置已定，则管长 l 和局部构件的型式和数量均已确定。在已知各用户所需流量 Q 及末端要求压头 h_C 的条件下，求管径 d 和作用压头 H。

这类问题先按流量 Q 和限定流速 v 求管径 d。所谓限定流速，是专业中根据技术、经济要求所规定的合适速度在这个速度下输送流量经济合理。如除尘管路中，防止灰尘沉积堵塞管路，限定了管中最小速度；热水采暖供水干管中，为了防止抽吸作用造成的支管流量过少，而限定了干管的最大速度。各类管路有不同的限定流速，可在设计手册中查得。

在管径 d 确定之后，对枝状管网便可按(5-6-1)式进行阻力计算。然后按总阻力及总流量选择泵或风机。

2. 已有泵或风机，即已知作用水头 H，并知用户所需流量 Q 及末端水头 h_C，在管路布置之后已知管长 l，求管径 d。这类问题首先按 $H-h_C$ 求得单位长度上允许损失的水头 J 即

$$J=\frac{H-h_C}{l+l'} \qquad (5\text{-}6\text{-}3)$$

式中，l'是局部阻力的当量长度。其定义为：

$$\lambda\frac{l'}{d}\frac{v^2}{2g}=\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g} \qquad (5\text{-}6\text{-}4)$$

于是

$$\lambda\frac{l'}{d}=\Sigma\zeta \qquad l'=\Sigma\zeta\frac{d}{\lambda} \qquad (5\text{-}6\text{-}5)$$

引入当量长度之后，计算阻力损失 h_l 较为方便：

$$h_l=\lambda\frac{l+l'}{d}\cdot\frac{v^2}{2g} \qquad (5\text{-}6\text{-}6)$$

在管径 d 尚不知的情况下，l'难于确切得出。所以在(5-6-3)式中，l'可按专业设计手册中查得估计各种局部构件的当量长度后，再代入。

在求出 J 之后根据

$$J=\frac{\lambda}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{\lambda}{d}\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2}\right)^2 \tag{5-6-7}$$

求出管径 d,并定出局部构件型式及尺寸。

最后进行校核计算,计算出总阻力与已知水头核对。

二、环状管网

如图 5-18 所示。它的特点是管段在某一共同的节点分支,然后又在另一共同节点汇合。是很多个并联管路组合而成。因此环状管网遵循串联和并联管路的计算原则,并存在下列两个条件:

(1) 任一节点(如 G 点)流入和流出的流量相等。即

$$\Sigma Q_G=0 \tag{5-6-8}$$

这是质量平衡原理的反映。

(2) 任一闭合环路(如 $ABGFA$)中,如规定顺时针方向流动的阻力损失为正,反之为负,则各管段阻力损失的代数和必等于零。即

图 5-18 环状管网

$$\Sigma h_{ABGFA}=0 \tag{5-6-9}$$

这是并联管路节点间各分支管段阻力损失相等的反映。

环状管网根据上述两个条件进行计算,理论上没什么困难,但在实际计算程序上是相当繁琐的。因此环状管网的计算方法较多,这里仅对哈迪·克罗斯的方法做一简单介绍,采用此方法,易于编制计算机程序。

计算程序如下:

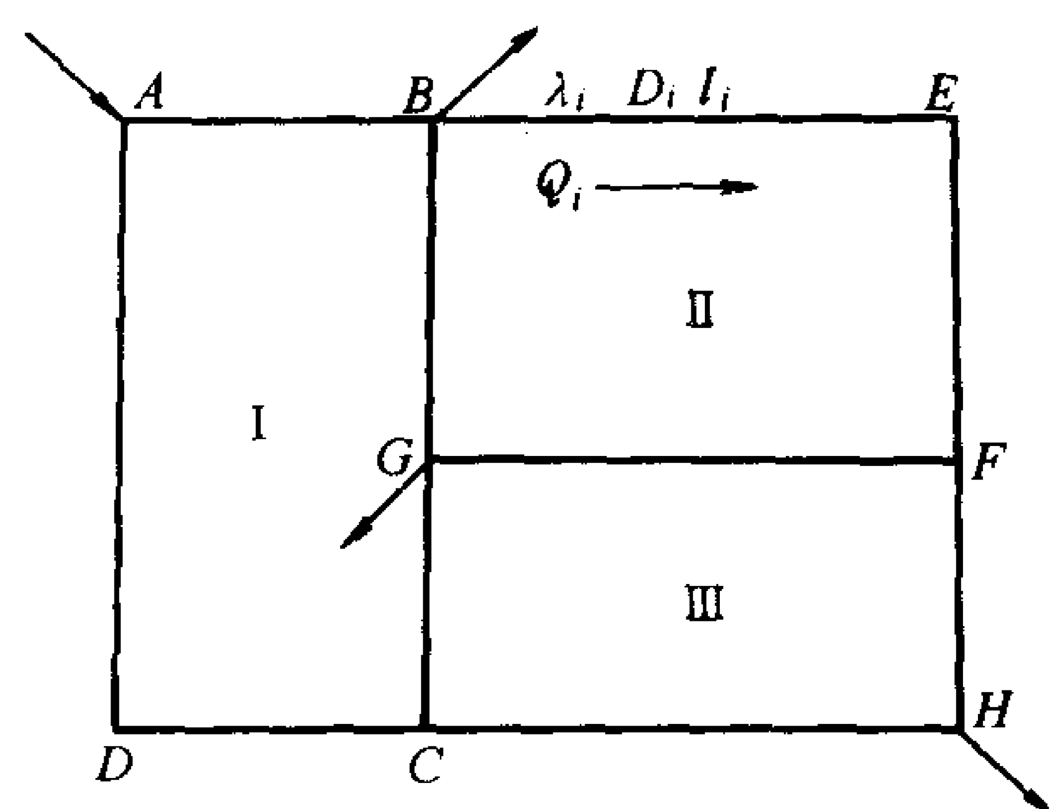


图 5-19 环路划分

1. 将管网分成若干环路如图 5-19 上分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个闭合环路。按节点流量平衡确定流量 Q,选取限定流速 v,定出管径 D。

2. 按照上面规定的流量与损失在环路中的正负值,求出每一环路的总损失 Σh_H(以后写作 Σh_i)。

3. 根据上面给定的流量 Q,若计算出来的 Σh_i 不为零,则每段管路应加校正流量 ΔQ,而与此相适应的阻力损失修正值为 Δh_i。所以,

$$h_i+\Delta h_i=S_i(Q_i+\Delta Q)^2=S_i\cdot Q_i^2+2S_i\cdot Q_i\cdot\Delta Q+S_i\cdot\Delta Q^2$$

略去二阶微量 ΔQ^2

$$h_i+\Delta h_i=S_i\cdot Q_i^2+2\cdot S_i\cdot Q_i\cdot\Delta Q \tag{5-6-10}$$

所以

$$\Delta h_i=2S_i\cdot Q_i\cdot\Delta Q$$

对于整个环路应满足 $\Sigma h_i=0$,则

$$\Sigma(h_i+\Delta h_i)=\Sigma h_i+\Sigma\Delta h_i=\Sigma h_i+2\Sigma S_i\cdot Q_i\cdot\Delta Q=0$$

根据上式就 ΔQ 求解,便得出了闭合环路的校正流量 ΔQ 的计算公式。

$$\Delta Q=-\frac{\Sigma h_i}{2\Sigma S_i\cdot Q_i}=\frac{-\Sigma h_i}{2\Sigma\dfrac{S_iQ_i^2}{Q_i}}=\frac{-\Sigma h_i}{2\Sigma\dfrac{h_i}{Q_i}} \tag{5-6-11}$$

式中，Σh_i 为整个环路的阻力损失之和。注意各管段损失的正负号。

当计算出环路的 ΔQ 之后，加到每一管段原来的流量 Q 上，便得到第一次校正后的流量 Q。

4. 用同样的程序，计算出第二次校正后的流量 Q_2，第三次校正后的流量 Q_3……，直至 $\Sigma h_i=0$ 满足工程精度要求为止。

【例 5-8】 如图 5-20 给出两个闭合环路的管网。l、D、Q 已标在图上。

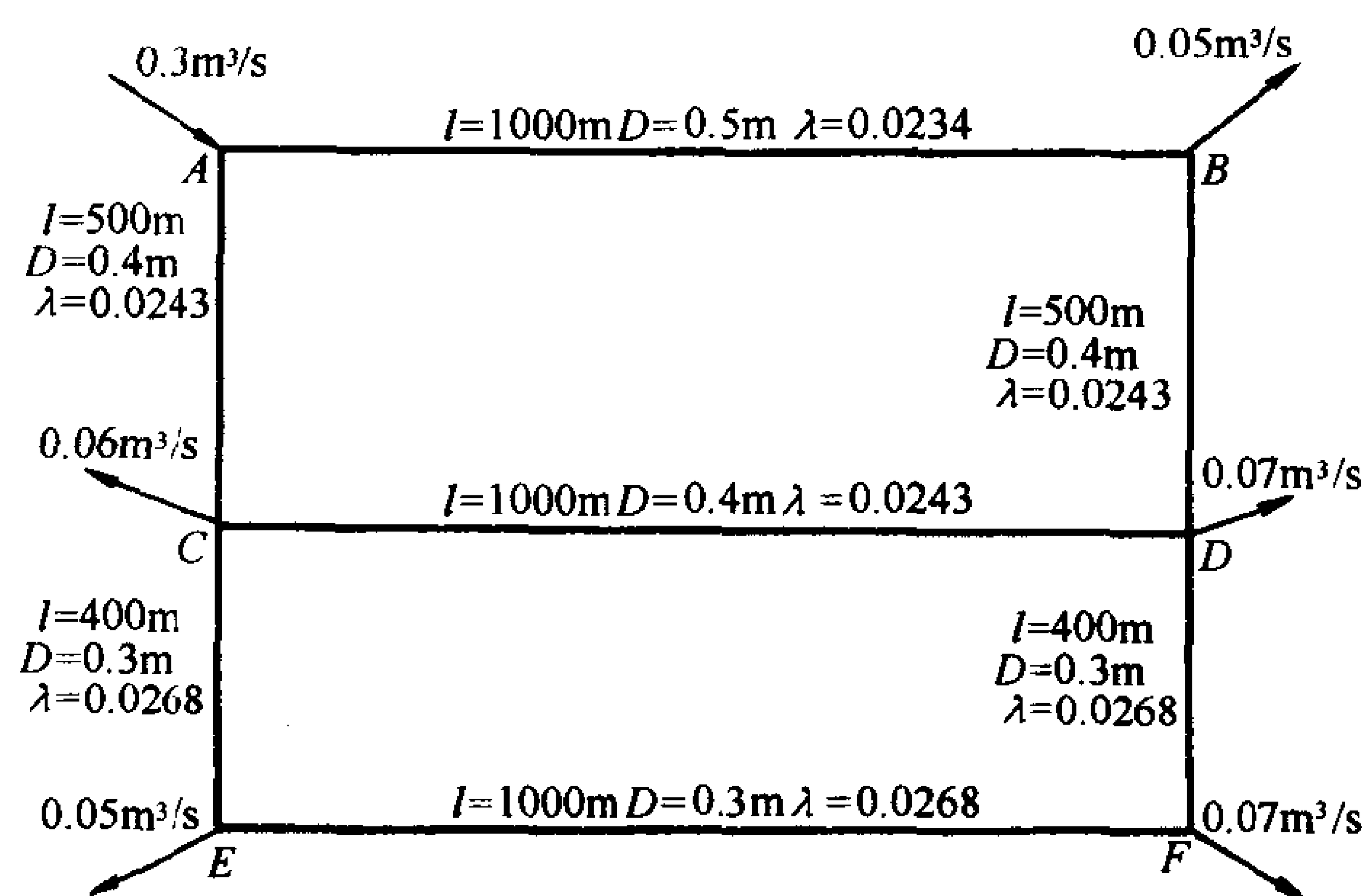


图 5-20 环网计算图

忽略局部阻力，试求第一次校正后的流量。

【解】 (1) 按节点 $\Sigma Q=0$ 分配各管段的流量，列在表 5-1 中假定流量栏内。

(2) 计算各管段阻力损失 h_i

$$h_i=\lambda_i\frac{l_i}{D_i}\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{4}{\pi D_i^3}\right)^2\cdot Q_i^2=S_i\cdot Q_i^2$$

$$S_i=\lambda_i\frac{l_i}{D_i}\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{4}{\pi D_i^2}\right)^2$$

λ_i 在图 5-20 各管段上已注出。

先算出 S_i 填入表中 S_i 栏，再计算出 h_i 填入相应栏内。列出各管段 $\dfrac{h_i}{Q_i}$ 之比值，并计算 Σh_i、$\Sigma\dfrac{h_i}{Q_i}$。

(3) 按校正流量 ΔQ 公式，计算出环路中的校正流量 ΔQ

环 网 计 算 表 **表 5-1**

环路	管段	假定流量 Q_i	S_i	h_i	h_i/Q_i	ΔQ	管段校正流量	校正后流量 Q_i	备注
						$\Delta Q=\frac{-\Sigma h_i}{2\Sigma\frac{h_i}{Q_i}}$			
I	AB	+0.15	59.76	+1.3346	8.897		−0.0014	0.1486	
	BD	+0.10	98.21	+0.9821	9.821		−0.0014	0.0986	
	DC	−0.01	196.42	−0.0196	1.960	= −0.0014	−0.0014 −0.0175	−0.0289	
	CA	−0.15	98.21	−2.2097	14.731		−0.0014	−0.1514	
	共计(Σ)			0.0874	35.410				
II	CD	+0.01	196.42	+0.0196	1.960		+0.0175 +0.0014	0.0289	
	DF	+0.04	364.42	+0.5830	14.575	$\Delta Q=0.0175$	+0.0175	0.0575	
	FE	−0.03	911.05	−0.8199	27.330		+0.0175	−0.0125	
	EC	−0.08	364.42	−2.3323	29.154		+0.0175	−0.0625	
	共计(Σ)			−2.5496	73.019				

$$\Delta Q=-\frac{\Sigma h_i}{2\Sigma\frac{h_i}{Q_i}}$$

(4) 将求得的 ΔQ 加到原假定流量上，便得出第一次校正后流量。

(5) 注意：在两环路的共同管段上，相邻环路的 ΔQ 符号应反号再加上去。参看表中 CD、DC 管段的校正流量。

第七节 有压管中的水击

在前面各章节中所研究的水流运动，没有也不需要考虑液体的压缩性，但对液体在有压管中所发生的水击现象，则必须考虑液体的可压缩性，同时还要考虑管壁材料的弹性。

有压管中运动着的液体，由于阀门或水泵突然关闭，使得液体速度和动量发生急剧变化，从而引起液体压强的骤然变化，这种现象称为水击。水击所产生的增压波和减压波交替进行，对管壁或阀门的作用有如锤击一样，故又称为水锤。

由于水击而产生的压强增加可能达到管中原来正常压强的几十倍甚至几百倍，而且增压和减压交替频率很高，其危害性很大，严重时会使管路发生破裂。

下面就图 5-21 分析管路发生水击时压强变化的情形。

第一阶段　在水头为 $+\frac{p_0}{\gamma}$ 的作用下，水以 $+v_0$ 速度从上游水池流向下游出口。当水管下游阀门突然关闭，则紧靠阀门的第一层水 m-n 受阀门阻碍便停止流动，它的动量在阀门关闭这一瞬间便发生突然变化，由 mv_0 变为零。液体以 (mv_0-0) 的力作用于阀门，使得阀门附近 0 处的压强骤然升高至 $p_0+\Delta p$。于是在 $m-n$ 段上产生两种变形；水的压缩及管壁的胀大。当靠近阀门的第一层水停止运动后，第二层以后的各层都相继地停止下来，直到

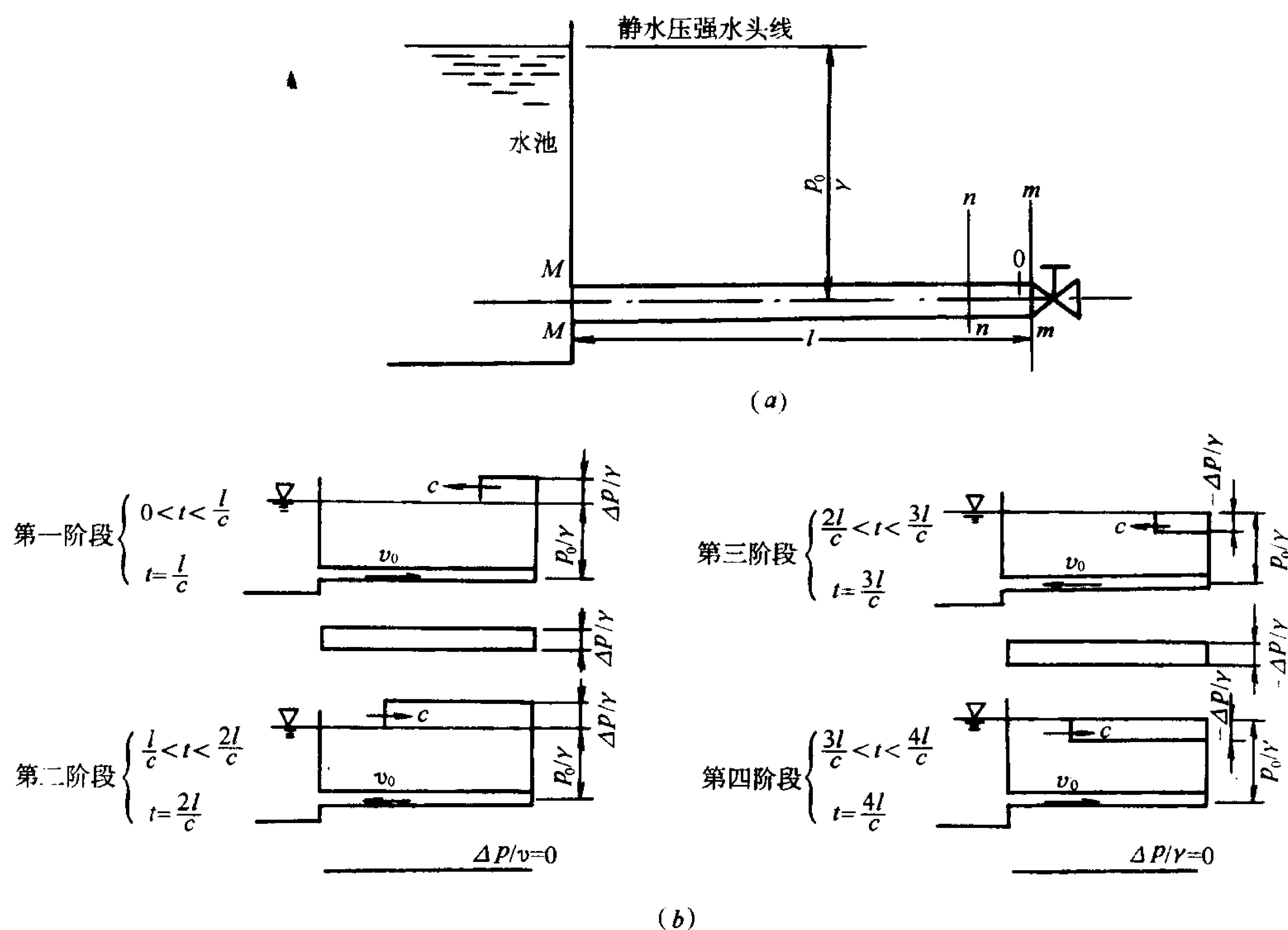


图 5-21 管中水击

靠水池的 M-M 层为止。水流速度 v_0 与动量相继减小必然引起压强相继升高，出现了全管液体暂时的静止受压和整个管壁被胀大的状态。

这种减速增压的过程，是以增压($p_0+\Delta p$)弹性波往上游水池传递的，称此为"水击波"。以 c 表示水击波的传递速度，l 表示水管长度，则经过时间 $t=\frac{l}{c}$ 后，自阀门开始的水击波便传到了水池，这时管内的全部液体便处在 $p_0+\Delta p$ 作用下的受压缩状态。

第二阶段　由于水池中压强不变，在管路进口 M 处的液体，便在管中水击压强与水池静压强的压差 Δp 作用下，以 $-v_0$ 立即向着水池方向流动。这样，管中水受压缩的状态，便自进口 M 处开始以波速 c 向下游方向逐层地迅速解除，这就是从水池反射回来的常压 p_0 弹性波。当 $t=2\frac{l}{c}$ 时，整个管中水流恢复到正常压强 p_0，而且都具有向水池方向的流动速度 $-v_0$。

第三阶段　当在阀门 0 处的压强恢复到常压 p_0 后，由于液体运动的惯性作用，管中的液体仍然存在往水池方向流动趋势，致使阀门 0 处的压强急剧降低至常压之下($p_0-\Delta p$)，并使得 m-n 段液体停止下来，$v_0=0$。这一低压($p_0-\Delta p$)弹性波由阀门 0 处又以波速 c 向上游进口 M 处传递，直至时间 $t=3\frac{l}{c}$ 后传到水池口为止，此时管中液体便处在瞬时减压($p_0-\Delta_p$)的减压状态。

第四阶段　由于进口 M 处，水池压强为 p_0，而管路中的压强为 $p_0-\Delta p$，则在压差的作用下，水又开始从水池以 $+v_0$ 流向管路。管中的水又逐层获得向阀门方向的 $+v_0$，压强也

相应地逐层升到常压 p_0，这是自水池第二次反射回的常压 p_0 弹性波。当 $t=4\,\frac{l}{c}$ 时，阀门 0 处的压强也恢复到正常压强 p_0，此时水流恢复到水击未发生时的起始正常状态。

设水击波在全管长上来回传递一次所用时间 $t=2\,\frac{l}{c}$ 为半周期，则两个半周期的时间 $t=4\,\frac{l}{c}$ 为水击波的全周期，到达此时间后，管中全部液体便恢复到水击未发生时的起始状态。此后在液体的可压缩性及惯性作用下，上述的弹性波传递、反射、水流方向的来回变动，都将周而复始地进行着，直到水流的阻力损失、管壁和水因变形做功而耗尽了引起水击的能量时，水击现象方才终止。综观上述分析不难得出：引起管路中速度突然变化的因素，如阀门突然关闭，这只是水击现象产生的外界条件，而液体本身具有可压缩性和惯性是发生水击现象的内在原因。

图 5-22 给出了理想液体在水击现象下阀门断面 0 处的水击压强随时间的周期变化图。

实际液体压强的变化曲线则如图 5-23 所示，每次水击压强增值逐渐减小，经几次之后完全消失。

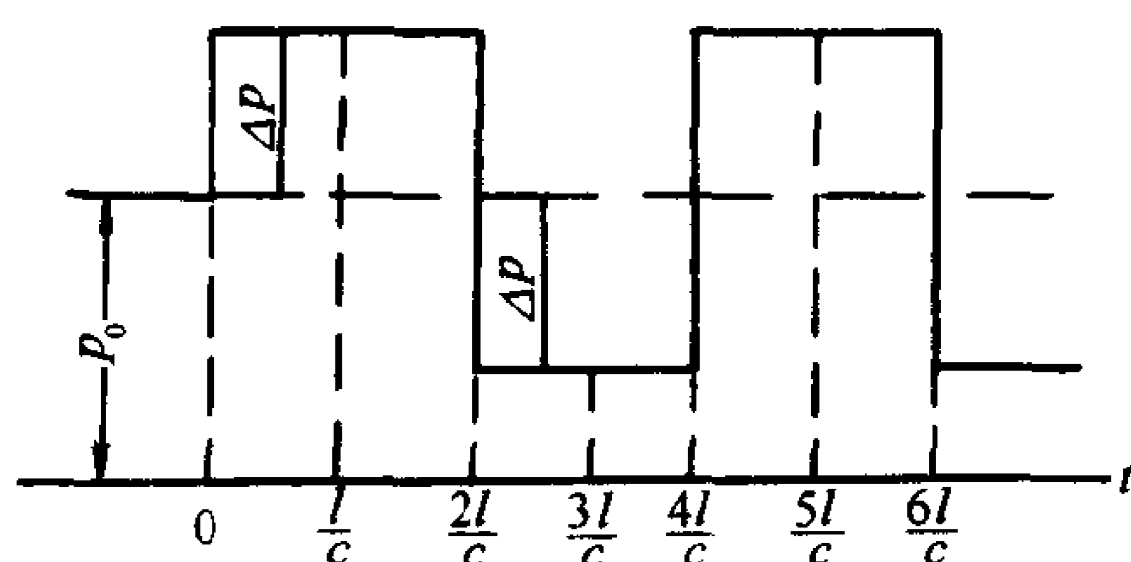


图 5-22　断面 0 处压强波动

图 5-23　自动记录的水击压强曲线

以上分析是在管路阀门瞬间关闭时产生水击。但实际上关闭用的时间不会是零，而总是一个有限的间隔 T_s。这样关闭时间 T_s 与水击波在全管长度上来回传递一次所需时间 $t=\frac{2l}{c}$ 对比，存在下列两种关系：

（一）$T_s<\frac{2l}{c}$ 即阀门关闭的时间很短，在从水池反回来的弹性波未到阀门处时，已关闭完了。这种情况下的水击称为直接水击。以不等式表示管长与时间的关系：

$$l>\frac{C\cdot T_s}{2}$$

直接水击时，阀门处所受的压强增值达到水击所能引起的最大压强，按儒柯夫斯基公式计算：

$$\Delta p=\rho\cdot C\cdot(v_0-v) \qquad (5\text{-}7\text{-}1)$$

式中　ρ——密度；

v——关阀后速度（完全关闭 $v=0$）；

v_0——水锤前管中平均速度；

C——水击波的传递速度。

$$C=\frac{C_0}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon\cdot d}{E\cdot\delta}}} \qquad (5\text{-}7\text{-}2)$$

式中　C_0——水中声音传播速度，在平均情况下 $C_0 \approx 1425\text{m/s}$；

ε——水的弹性系数；

d——管子内径；

δ——管壁厚度；

E——管路材料的弹性系数。

对于钢管　$E = 2.1 \times 10^{-6}\text{kg/cm}^2$

$E = 205.8 \times 10^6\text{kPa}$

对于生铁　$E = 98 \times 10^6\text{kPa}$

数值$\frac{E \cdot \delta}{d}$表示管子的刚度。因此说管子刚度越大，水锤的压强数值也越大。

（二）$T_s > \frac{2l}{C}$即$l < \frac{C \cdot T_s}{2}$，此时从水池反回来的弹性波，在阀门尚未关完时到达，所发生的水击称间接水击。这种情况下水击压强比直接水击压强为小。

水击的危害是较大的，当压力增加时，易将管子胀破，当压力为负值时，则管子易被大气压扁。所以必须减弱水击。具体的办法主要是满足 $T_s > \frac{2l}{C}$即$l < \frac{C \cdot T_s}{2}$条件，尽量减少直接水击，使 Δp 值减小。

(1) 增加管路关闭(或开启)时间 T_s，使过程延长；

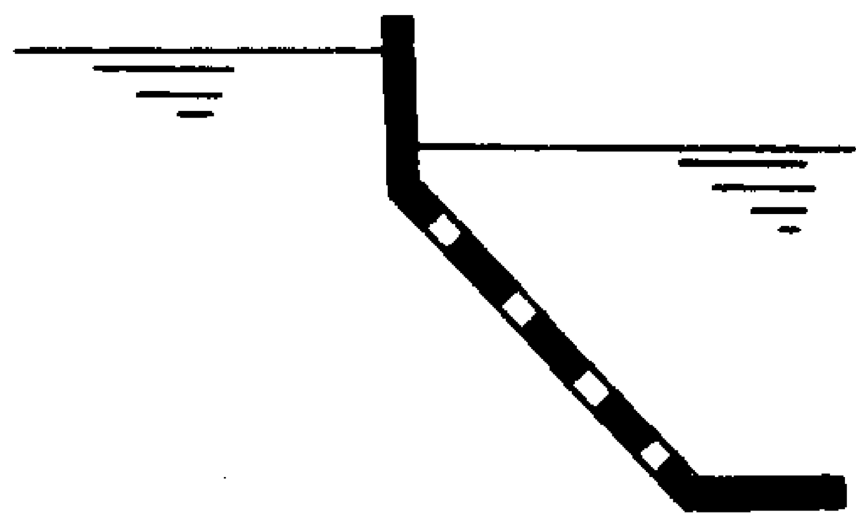
(2) 在管路中装置各种安全瓣，这样在水锤发生瞬间有安全瓣将部分水从管中放出，或把部分空气引入管中。

习　题

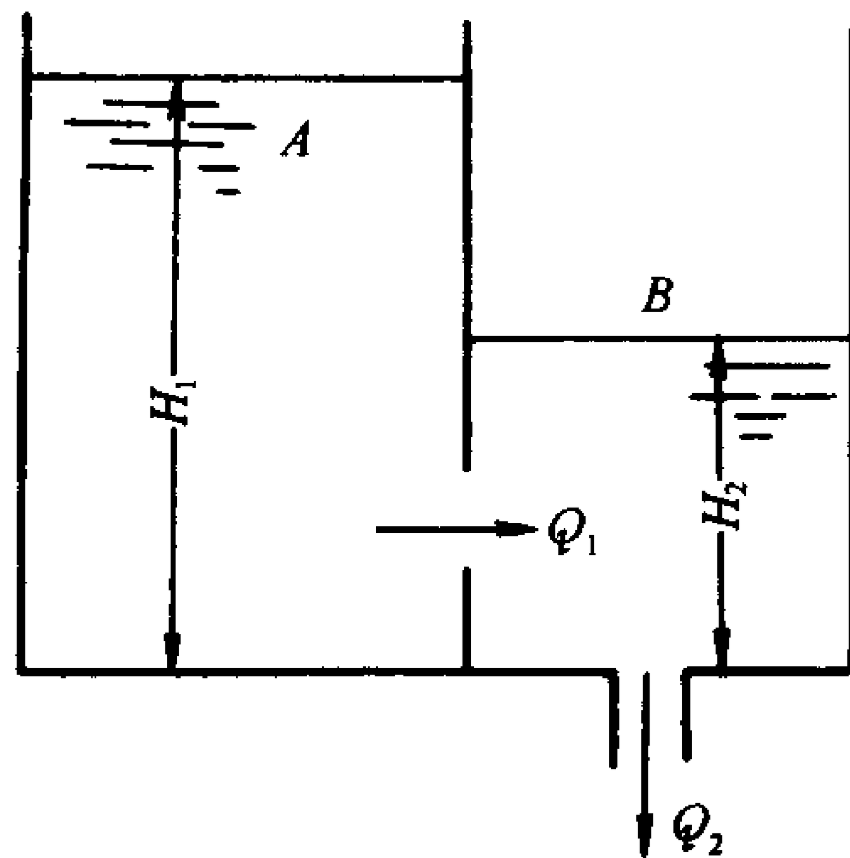
5-1　图中穿孔板上各孔眼的大小形状相同，问每个孔口的出流量是否相同？

5-2　有一水箱水面保持恒定(5m)，箱壁上开一孔口，孔口直径 $d = 10\text{mm}$。(1) 如果箱壁厚度 $\delta = 3\text{mm}$，求通过孔口的流速和流量。(2) 如箱壁厚度 $\delta = 40\text{mm}$，求通过孔口的流速和流量。

5-3　一隔板将水箱分为 A、B 两格，隔板上有直径为 $d_1 = 40\text{mm}$ 的薄壁孔口，如题 5-3 图，B 箱底部有一直径 $d_2 = 30\text{mm}$ 的圆柱形管嘴，管嘴长 $l = 0.1\text{m}$，A 箱水深 $H_1 = 3\text{m}$ 恒定不变。



题 5-1　图



题 5-3　图

(1) 分析出流恒定性条件(H_2 不变的条件)。

(2) 在恒定出流时，B 箱中水深 H_2 等于多少？

(3) 水箱流量 Q_1 为何值？

5-4　证明容器壁上装一段短管(如题 5-4 图所示)，经过短管出流时的流量系数 μ 与流速系数 φ 为

$$\varphi = \mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda \dfrac{l}{d} + \Sigma\zeta + 1}}$$

5-5　某诱导器的静压箱上装有圆柱形管嘴，管径为 4mm，长度 $l = 100\text{mm}$，$\lambda = 0.02$，从管嘴入口到出口的局部阻力系数 $\Sigma\zeta = 0.5$，求管嘴的流速系数和流量系数（见题 5-4 图）。

题 5-4　图

5-6　如上题，当管嘴外空气压强为当地大气压强时，要求管嘴出流流速为 30m/s。此时静压箱内应保持多少压强？空气密度为 $\rho = 1.2\text{kg/m}^3$。

5-7　某恒温室采用多孔板送风，风道中的静压为 200Pa，孔口直径为 20mm，空气温度为 20℃，$\mu = 0.8$。要求通风量为 $1\text{m}^3/\text{s}$。问需要布置多少孔口？

5-8　水从 A 水箱通过直径为 10cm 的孔口流入 B 水箱，流量系数为 0.62。设上游水箱的水面高程 $H_1 = 3\text{m}$ 保持不变。

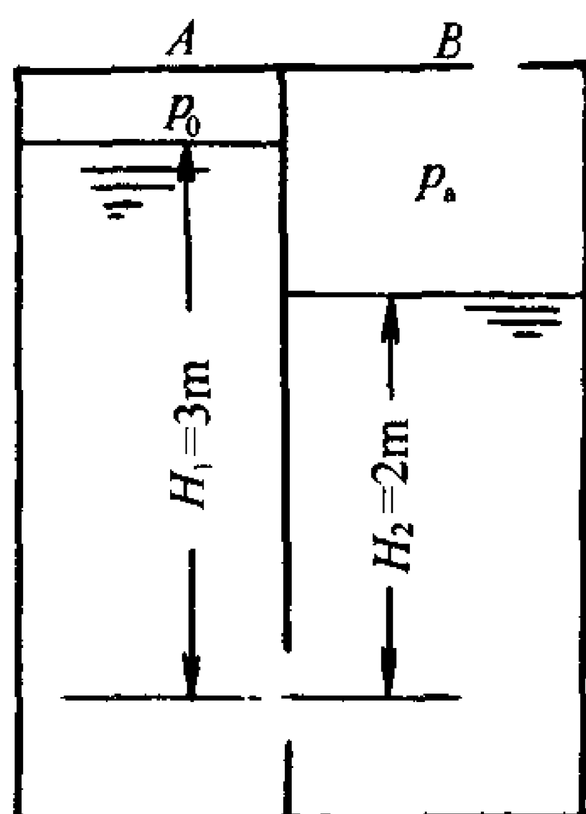
（1）B 水箱中无水时，求通过孔口的流量。

（2）B 水箱水面高程 $H_2 = 2\text{m}$ 时，求通过孔口的流量。

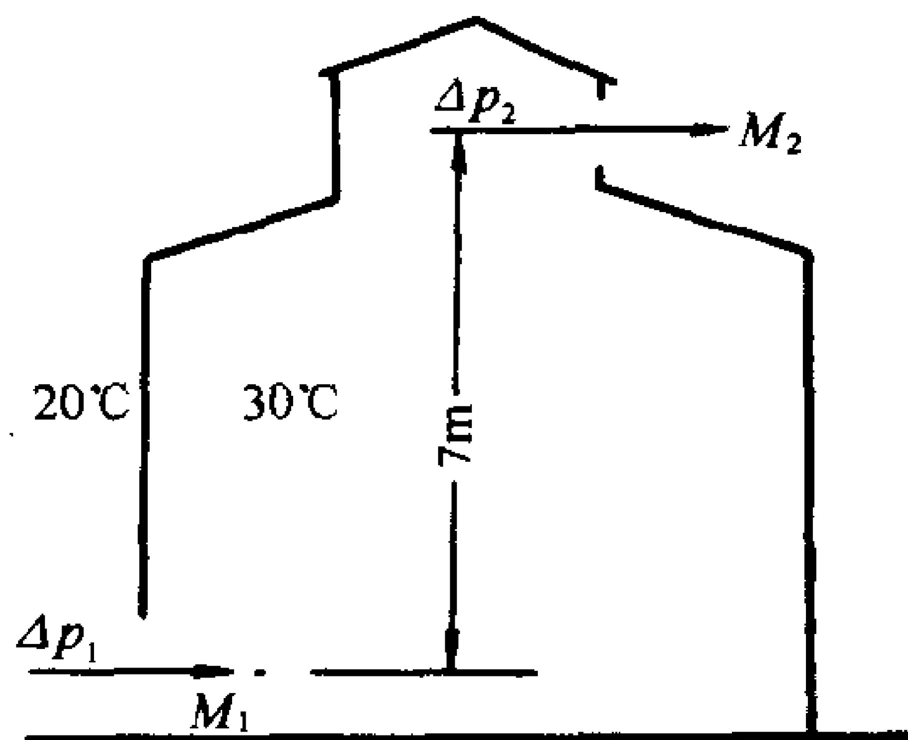
（3）A 箱水面压力为 2000Pa，$H_1 = 3\text{m}$ 时，而 B 水箱水面压力为 0，$H_2 = 2\text{m}$ 时，求通过孔口的流量。

5-9　应用式(3-11-1)解自然通风换气量（质量流量），室内空气温度为 30℃，室外空气温度为 20℃，在厂房上下部各开有 8m^2 的窗口，两窗口的中心高程差为 7m，窗口流量系数 $\mu = 0.64$，气流在自然压头作用下流动。求车间自然通风换气量。

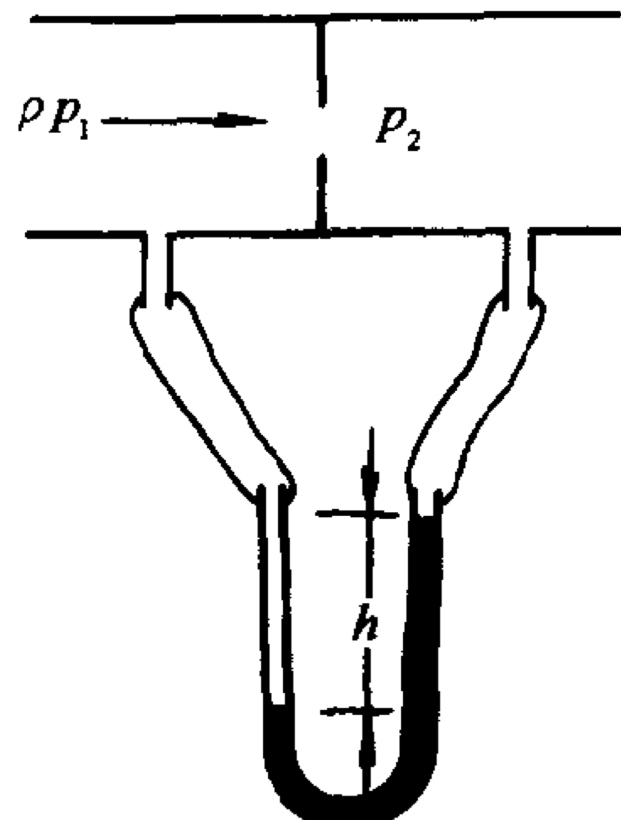
5-10　如图示管路中输送气体，采用 U 形差压计测量压强差为 hm 液体。试推导通过孔板的流量公式。



题 5-8　图



题 5-9　图



题 5-10　图

5-11　如上题图孔板流量计，输送 20℃空气，测量 $h = 100\text{mmH}_2\text{O}$。$\mu = 0.62$，$d = 100\text{mm}$，求 Q。

5-12　什么叫管路阻抗？（又称为综合阻力数）为什么有两种表示？在什么情况下，S 与管中流量无关，仅决定于管道的尺寸及构造？

5-13　供热系统的凝结水箱回水系统如图。试写出水泵应具有的作用水头表达式。

5-14　某供热系统，原流量为 $0.005\text{m}^3/\text{s}$，总水头损失 $h = 5\text{mH}_2\text{O}$，现在要把流量增加到 $0.0085\text{m}^3/\text{s}$，试问水泵应供给多大压头。

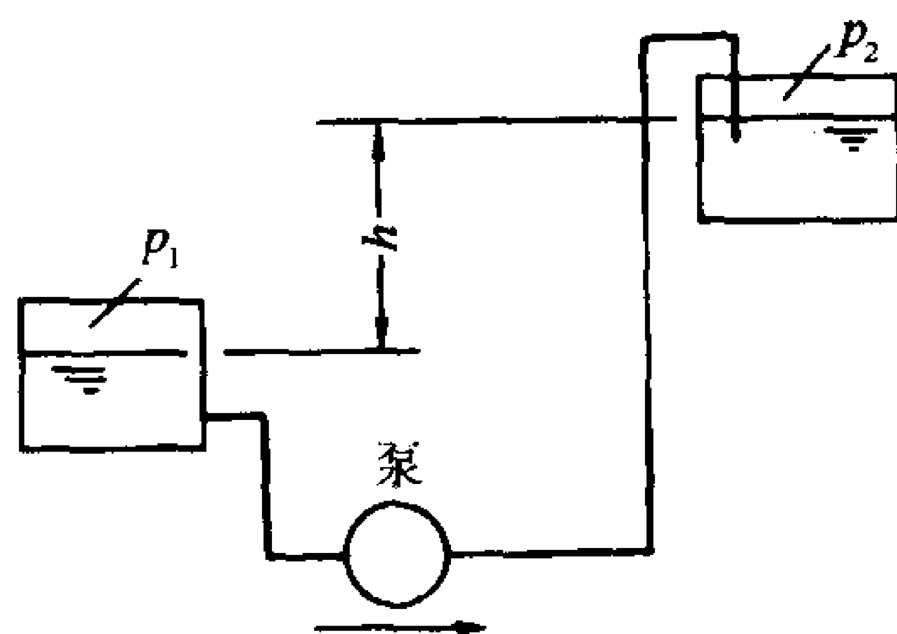
5-15　两水池用虹吸管连通，上下游水位差 $H = 2\text{m}$，管长 $l_1 = 3\text{m}$，$l_2 = 5\text{m}$，$l_3 = 4\text{m}$，直径 $d = 200\text{mm}$，上游水面至管顶高度 $h = 1\text{m}$。已知 $\lambda = 0.026$，进口网 $\zeta = 10$，弯头 $\zeta = 1.5$（每个弯头），出口 $\zeta = 1.0$，求：

（1）虹吸管中的流量；

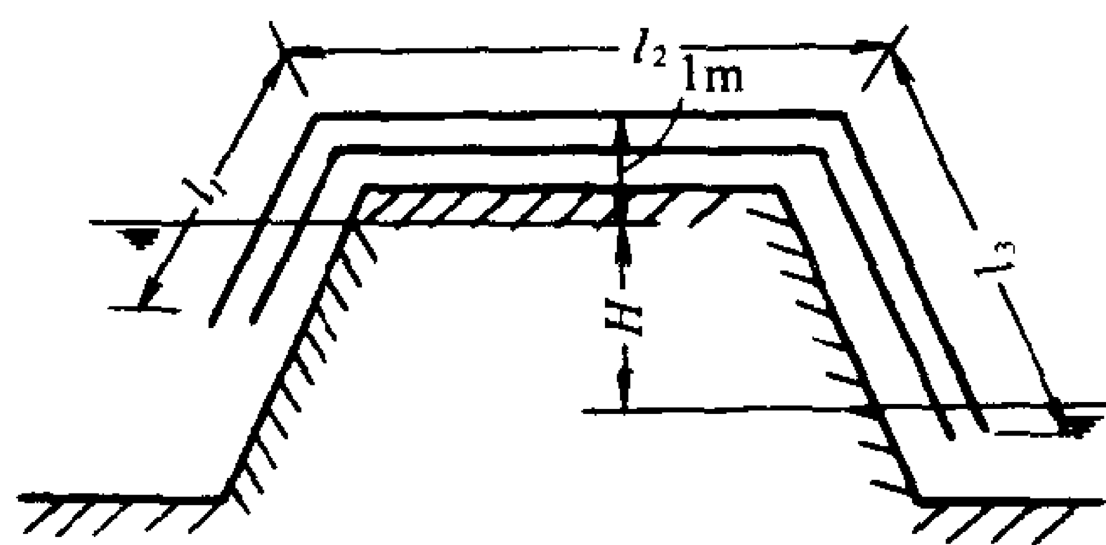
（2）管中压强最低点的位置及其最大负压值。

5-16　如图水泵抽水系统，管长、管径单位为 m，ζ 给于图中，流量 $Q = 40 \times 10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$，$\lambda = 0.03$。求：

（1）吸水管及压水管的 S 数。



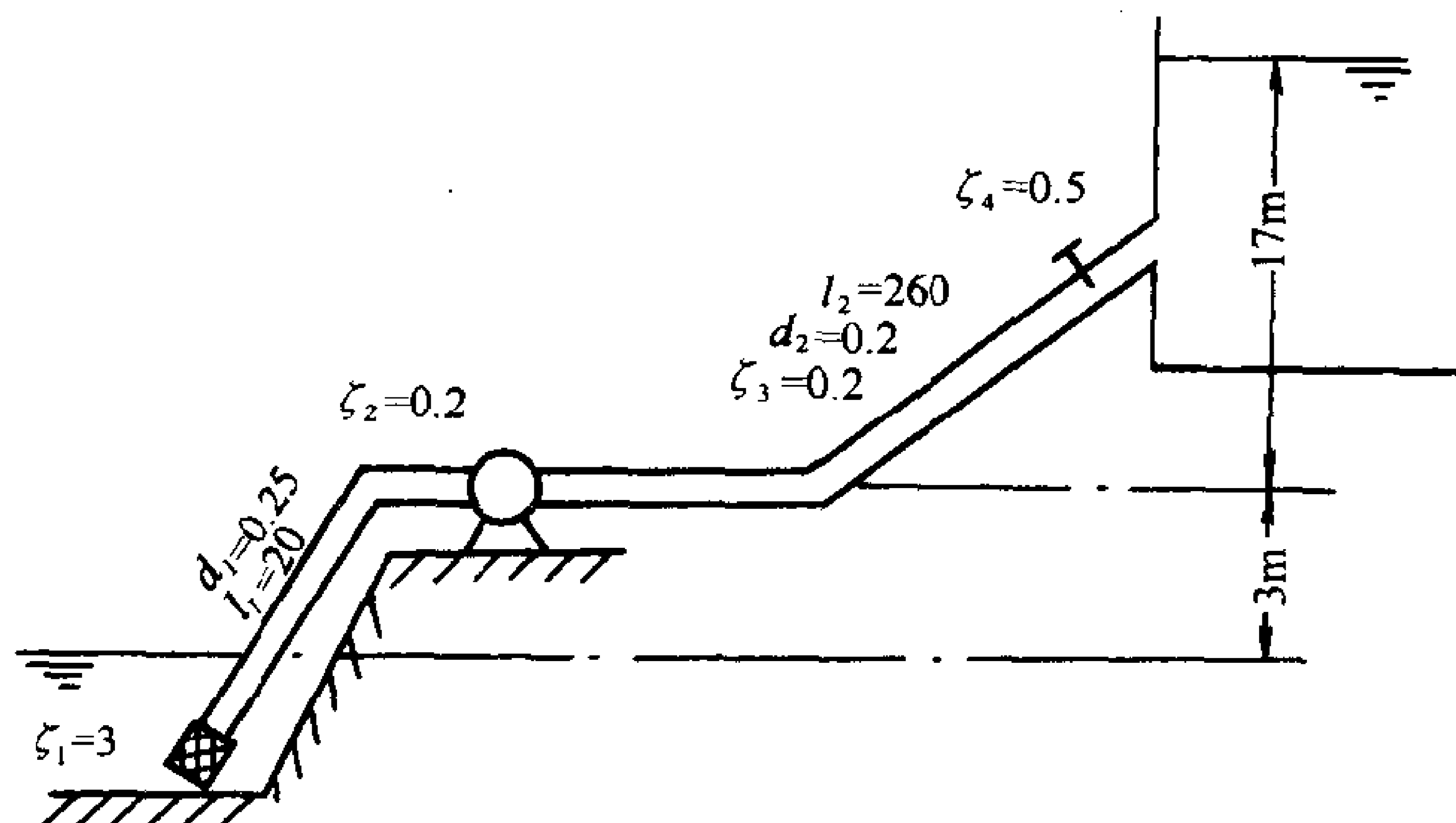
题 5-13 图



题 5-15 图

(2) 求水泵所需水头。

(3) 绘制总水头线。



题 5-16 图

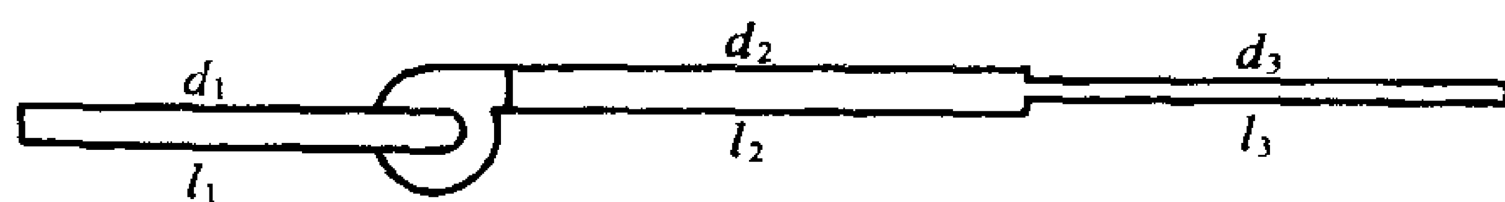
5-17 题 5-22 图为一水平安置的通风机，吸入管 $d_1=200\text{mm}$，$l_1=10\text{m}$，$\lambda=0.02$。压出管为直径不同的两段管段串联组成，$d_2=200\text{mm}$，$l_2=50\text{m}$，$\lambda=0.02$；$d_3=100\text{mm}$，$l_3=50\text{m}$，$\lambda=0.02$。空气密度为 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$，风量为 $Q=0.15\text{m}^3/\text{s}$，不计局部阻力。试计算：

(1) 风机应产生的总压强为多少？

(2) 如风机与管道铅直安装，但管路情况不变，风机的总压有无变化？

(3) 如果流量提高到 $0.16\text{m}^3/\text{s}$，风机总压变化多少？

(4) 绘出全压线与静压线图。

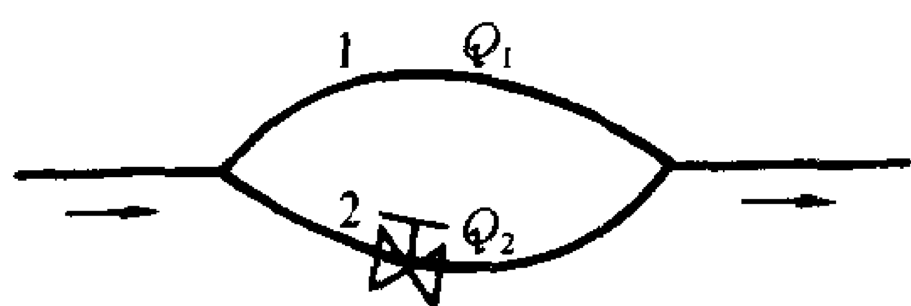


题 5-17 图

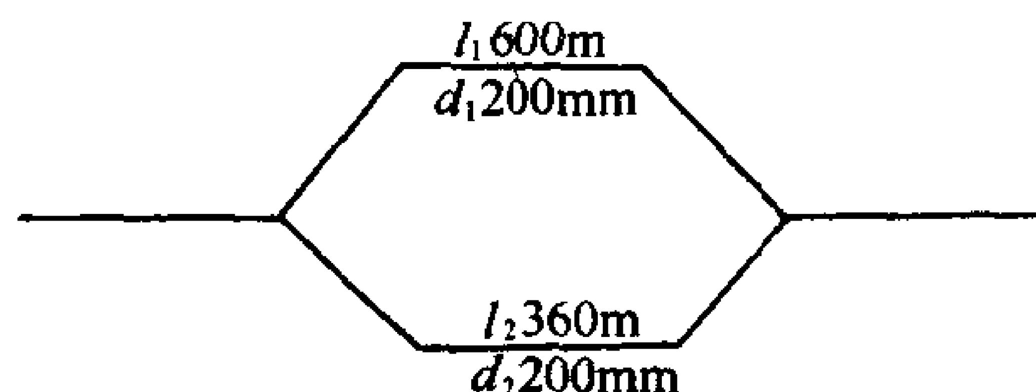
5-18 并联管路中各支管的流量分配，遵循什么原理？如果要得到各支管中流量相等，该如何设计管路？

5-19 有两长度尺寸相同的支管并联，如果在支管 2 中加一个调节阀(阻力系数为 ζ)，则 Q_1 和 Q_2 哪个大些？阻力 h_{f1}和 h_{f2}哪个大些？

5-20 有一简单并联管路如下图，总流量 $Q=80\times10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$，$\lambda=0.02$，求各管段间的流量及两节点间的水头损失。第一支路 $d_1=200\text{mm}$，$l_1=600\text{m}$，第二支路 $d_2=200\text{mm}$，$l_2=360\text{m}$。



题 5-19 图



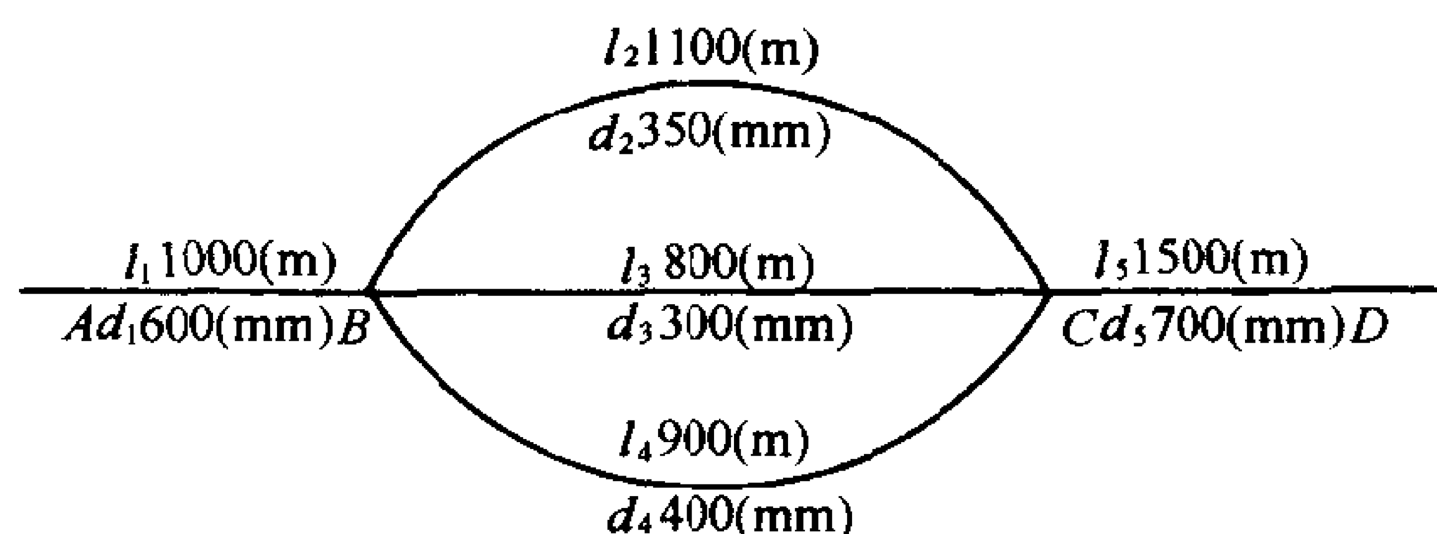
题 5-20 图

5-21　如上题。若使 $Q_1 = Q_2$ 如何改变第二支路？

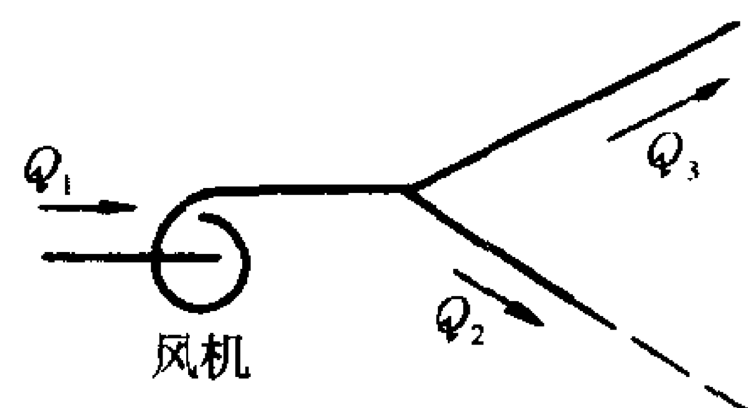
5-22　如图所示管路，设其中的流量 $Q_A = 0.6\text{m}^3/\text{s}$，$\lambda = 0.02$，不计局部损失，其它已知条件如图，求 A、D 两点间的水头损失。

5-23　将[例 5-7]中管段 1 的管径改为 20mm，管段 2 为 25mm，而其它条件皆不变，流量分 配有何变化？

5-24　已知某枝状管网的 Q_1、Q_2、Q_3，若在支管 2 的末端再加一段管子，如图中虚线所示。问 Q_1 和 Q_2、Q_3 各有何变化？



题 5-22　图

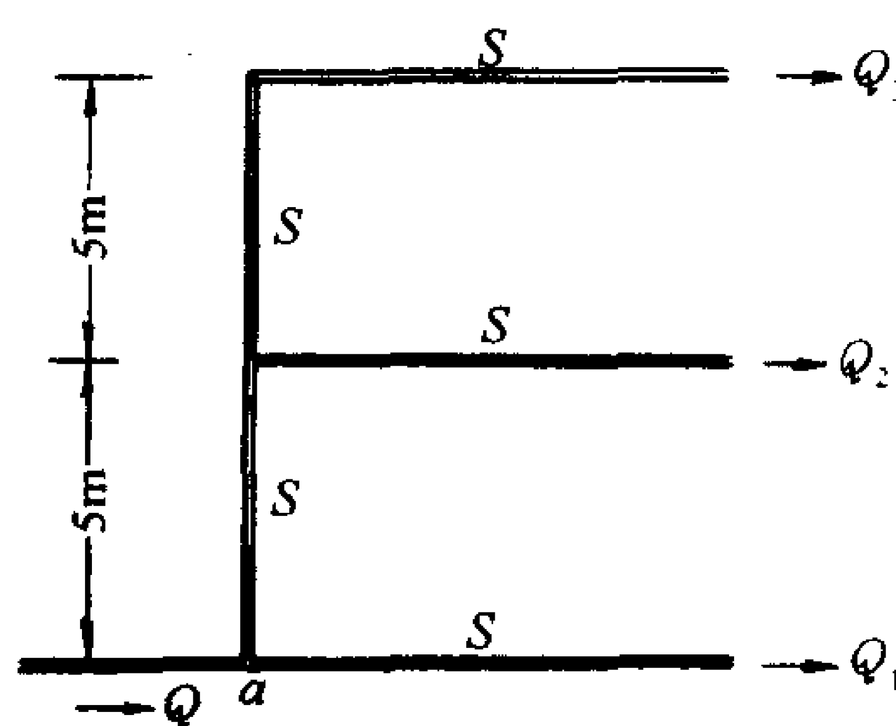


题 5-24　图

5-25　三层供水管路，各管段的 S 值皆为 $10^6\text{S}^2/\text{m}^5$，层高均为 5m。设 a 点的压力水头为 20m，求 Q_1、Q_2、Q_3，并比较三流量，得出结论来。(忽略 a 处流速水头)

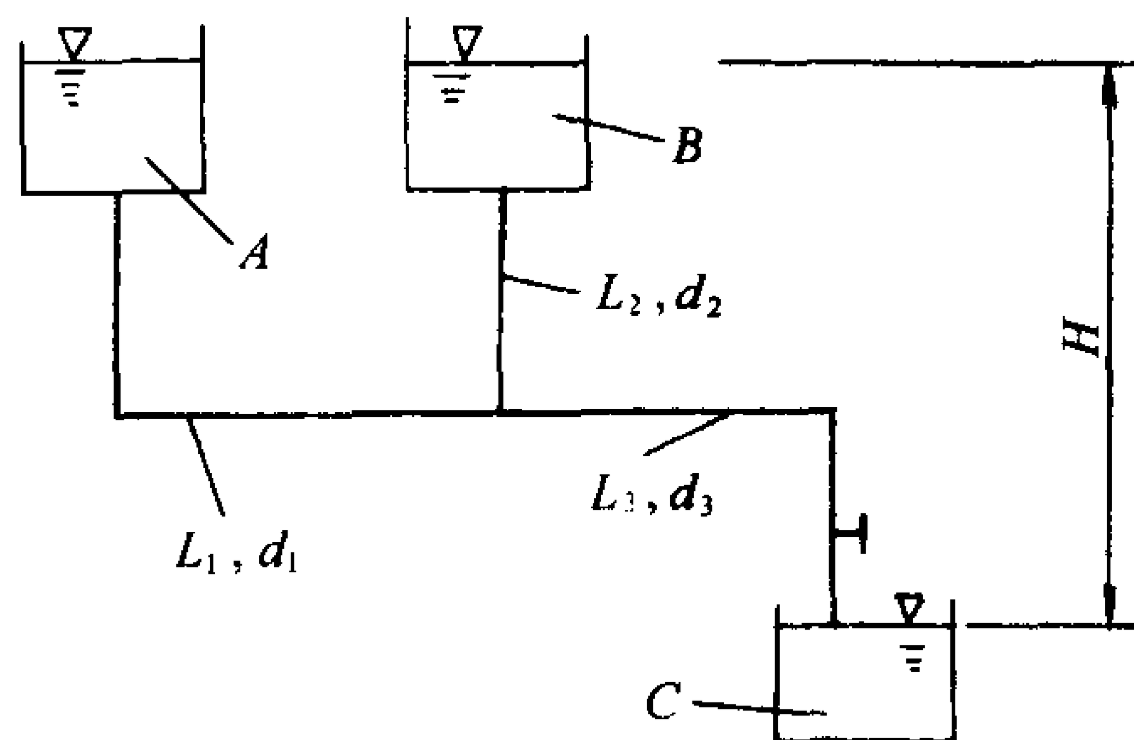
5-26　如上题，若想得到相同的流量，在 a 点压力水头仍为 20m 时，应如何改造管网？

5-27　水由水位相同的两贮水池 A、B 沿着 $L_1 = 200\text{m}$，$L_2 = 100\text{m}$，$d_1 = 200\text{mm}$，$d_2 = 100\text{mm}$ 的两根管子流入 $L_3 = 720\text{m}$，$d_3 = 200\text{mm}$ 的总管，并注入水池水中。求：1) 当 $H = 16\text{m}$，$\lambda_1 = \lambda_3 = 0.02$，$\lambda_2 = 0.025$ 时，排入 C 中的总流量(不计阀门损失)；2) 若要流量减少 1/2，阀门的阻力系数为多少？

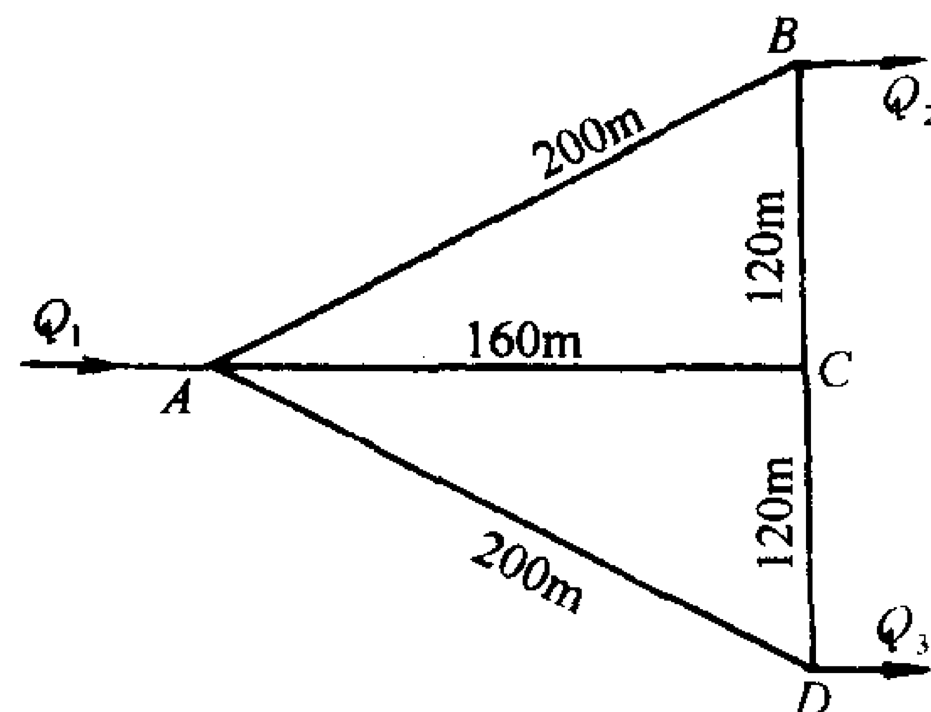


题 5-25　图

5-28　水平布置的管系，A 点的表压强 $p_A = 280\text{kN/m}^2$，水流从 B、D 直接排入大气，AD 管直径为 0.4m，其它各管直径为 0.3m，沿程阻力系数 $\lambda = 0.02$，忽略局部损失，确定 Q_1，Q_2，Q_3 和表压强 p_C。



题 5-27　图



题 5-28　图

5-29　将[例 5-8]环状管网流量计算，进行第二次校正计算。

第六章 气 体 射 流

气体自孔口、管嘴或条缝向外喷射所形成的流动,称为气体淹没射流。简称为气体射流。当出口速度较大,流动呈紊流状态时,叫做紊流射流。在采暖通风工程上所应用的射流,多为气体紊流射流。

射流与孔口管嘴出流的研究对象不同。前者讨论的是出流后的流速场、温度场和浓度场。后者仅讨论出口断面的流速和流量。

出流空间大小,对射流的流动有很大影响。出流到无限大空间中,流动不受固体边壁的限制,为无限空间射流,又称自由射流。反之,为有限空间射流,又称受限射流。本章主要论述无限空间射流。对有限空间射流仅做简单介绍。

第一节 无限空间淹没紊流射流的特征

现以无限空间中圆断面紊流射流为例,讨论射流运动。

气流自半径为 R 的圆断面喷嘴喷出。出口断面上的速度认为均匀分布,皆为 u_0 值,且流动为紊流。取射流轴线 Mx 为 x 轴。

经过许多学者的试验和观测,得出这种射流的流动特性及结构图形,如图 6-1。

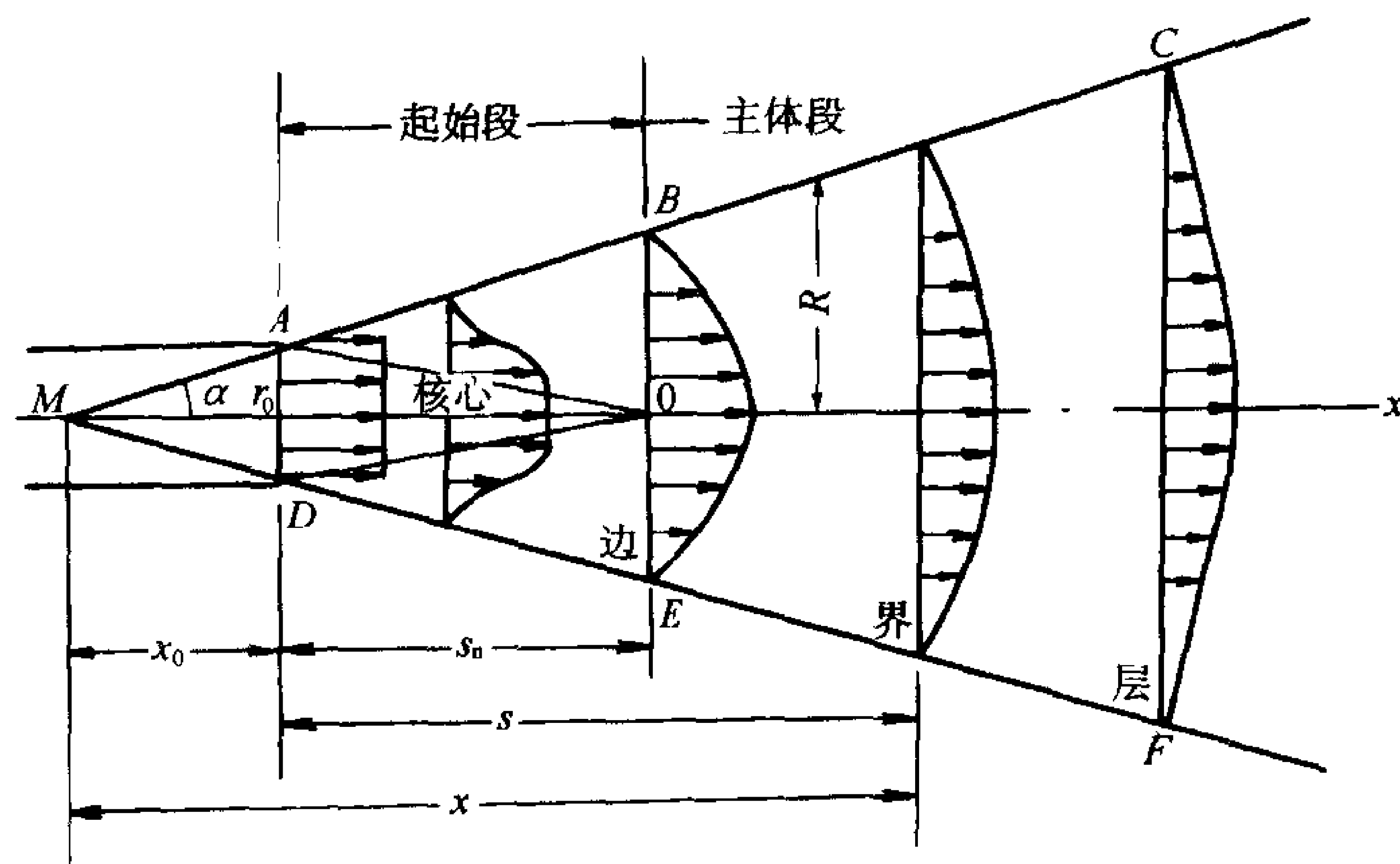


图 6-1 射流结构

由于射流为紊流型,紊流的横向脉动造成射流与周围介质之间不断发生质量、动量交换,带动周围介质流动,使射流的质量流量、射流的横断面积沿 x 方向不断增加,形成了向周围扩散的锥体状流动场,如图 6-1 所示的锥体 $CAMDF$。

下面说明紊流射流的结构及特性。

一、过渡断面(又称转折断面)起始段及主体段

刚喷出的射流速度仍然是均匀的。沿 x 方向流动,射流不断带入周围介质,不仅使边

界扩张，而且使射流主体的速度逐渐降低。速度为 u_0 的部分（如图 6-1$A0D$ 锥体）称为射流核心，其余部分速度小于 u_0。称为边界层。显然，射流边界层从出口开始沿射程不断地向外扩散，带动周围介质进入边界层，同时向射流中心扩展，至某一距离处，边界层扩展到射流轴心线，核心区域消失，只有轴心点上速度为 u_0。射流这一断面为图 6-1 上的 $B0E$，称为过渡断面或转折断面。以过渡断面分界，出口断面至过渡断面称为射流起始段。过渡断面以后称为射流主体段。起始段射流轴心上速度都为 u_0，而主体段轴心速度沿 x 方向不断下降，主体段中完全为射流边界层所占据。

二、紊流系数 a 及几何特征

实验结果及半经验理论都得出射流外边界是一条直线，如图 6-1 上的 AB 及 DE 线。AB、DE 延至喷嘴内交于 M 点，此点称为极点，$\angle AMD$ 的一半称为极角 α，又称扩散角 α。

$B0$ 为圆断面射流截面的半径 R（或平面射流边界层的半宽度 y_b）。它和从极点起算的距离成正比，即 $B0=Kx$。

$0M$ 是从极点起算的 x 距离。由图看出，$B0/0M=\text{tg}\alpha$，故

$$\text{tg}a=\frac{Kx}{x}=K=3.4a \tag{6-1-1}$$

式中 K——试验系数，对圆断面射流 $K=3.4a$；

a——紊流系数，由实验决定，是表示射流流动结构的特征系数。

紊流系数 a 与出口断面上紊流强度（即脉动速度的均方根值与平均速度值之比）有关，紊流强度越大，说明射流在喷嘴前已“紊乱化”，具有较大的与周围介质混合的能力，则 a 值也大，使射流扩散角 α 增大，被带动的周围介质增多，射流速度沿程下降加速。a 还与射流出口断面上速度分布的均匀性有关。如果速度分布均匀 $u_{最大}/u_{平均}=1$，则 $a=0.066$；如果不太均匀，例如 $u_{最大}/u_{平均}=1.25$，则 $a=0.076$；各种不同形状喷嘴的紊流系数和扩散角的实测值列于表 6-1。

紊流系数　　表 6-1

喷嘴种类	a	2α	喷嘴种类	a	2α
带有收缩口的喷嘴	0.066	25°20′	带金属网格的轴流风机	0.24	78°40′
	0.071	27°10′	收缩极好的平面喷口	0.108	29°30′
圆柱形管	0.076 0.08	29°00′	平面壁上锐缘狭缝	0.118	32°10′
带有导风板的轴流式通风机	0.12	44°30′	具有导叶且加工磨圆边口的风道上纵向缝	0.155	41°20′
带导流板的直角弯管	0.20	68°30′			

从表中数值亦可知，喷嘴上装置不同型式的风板栅栏，则出口截面上气流的扰动紊乱程度不同，因而紊流系数 a 也就不相同。扰动大的紊流系数 a 值增大，扩散角 α 也增大。

由(6-1-1)式可知，a 值确定，射流边界层的外边界线也就被确定，射流即按一定的扩散角 α 向前作扩散运动，这就是它的几何特征。应用这一特征，对圆断面射流可求出射流半径沿射程的变化规律，见图 6-1。可有

$$\frac{R}{r_0}=\frac{x_0+s}{x_0}=1+\frac{s}{r_0/\text{tg}\alpha}=1+3.4a\,\frac{s}{r_0}=3.4\left(\frac{as}{r_0}+0.294\right) \tag{6-1-2}$$

又
$$\frac{R}{r_0}=\frac{x_0/r_0+s/r_0}{x_0/r_0}=\frac{\overline{x_0}+\bar{s}}{1/\mathrm{tg}\alpha}=3.4a(\overline{x_0}+\bar{s})=3.4a\bar{x} \tag{6-1-2a}$$

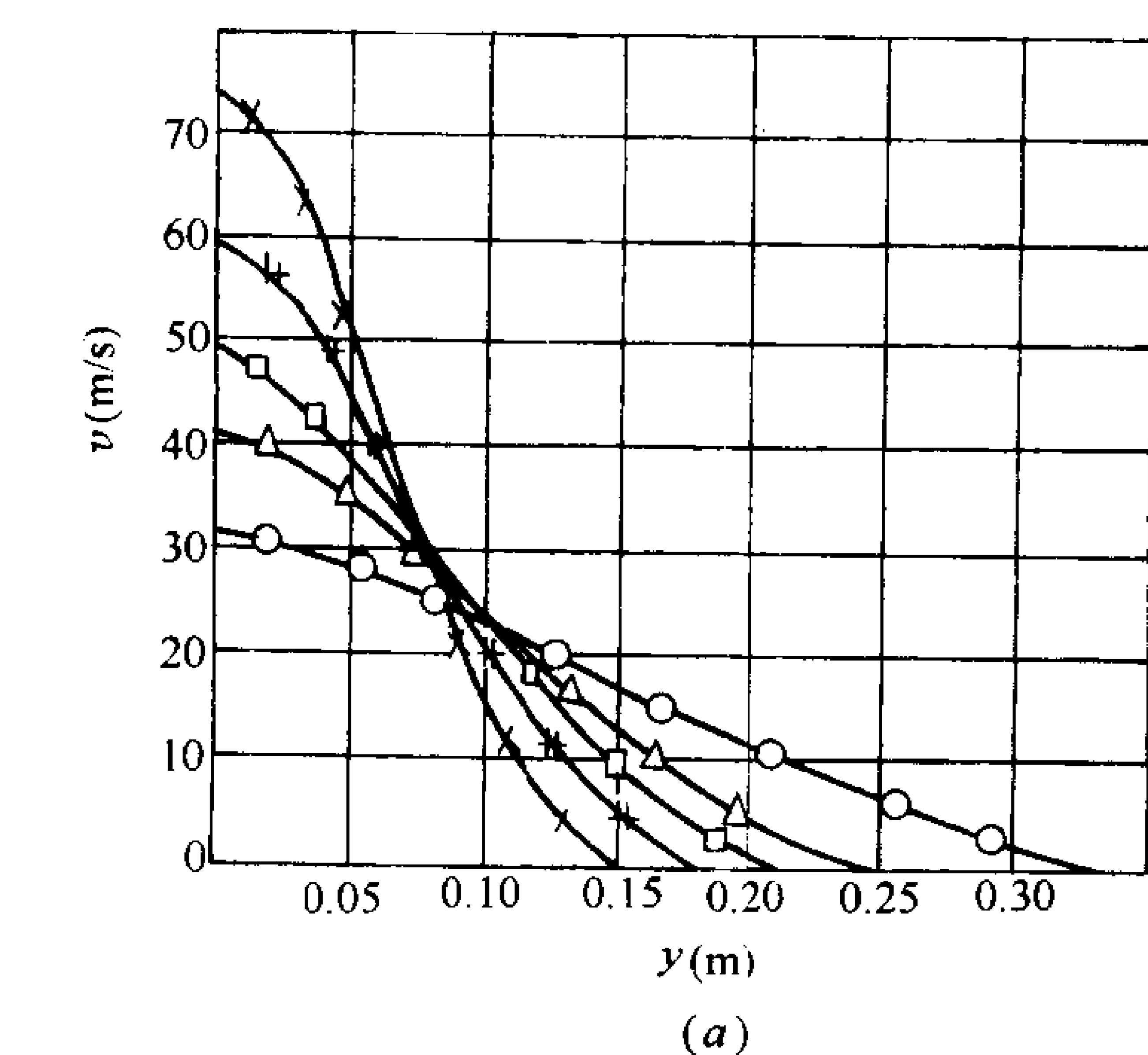
以直径表示

$$D/d_0=6.8\left(\frac{as}{d_0}+0.147\right) \tag{6-1-2b}$$

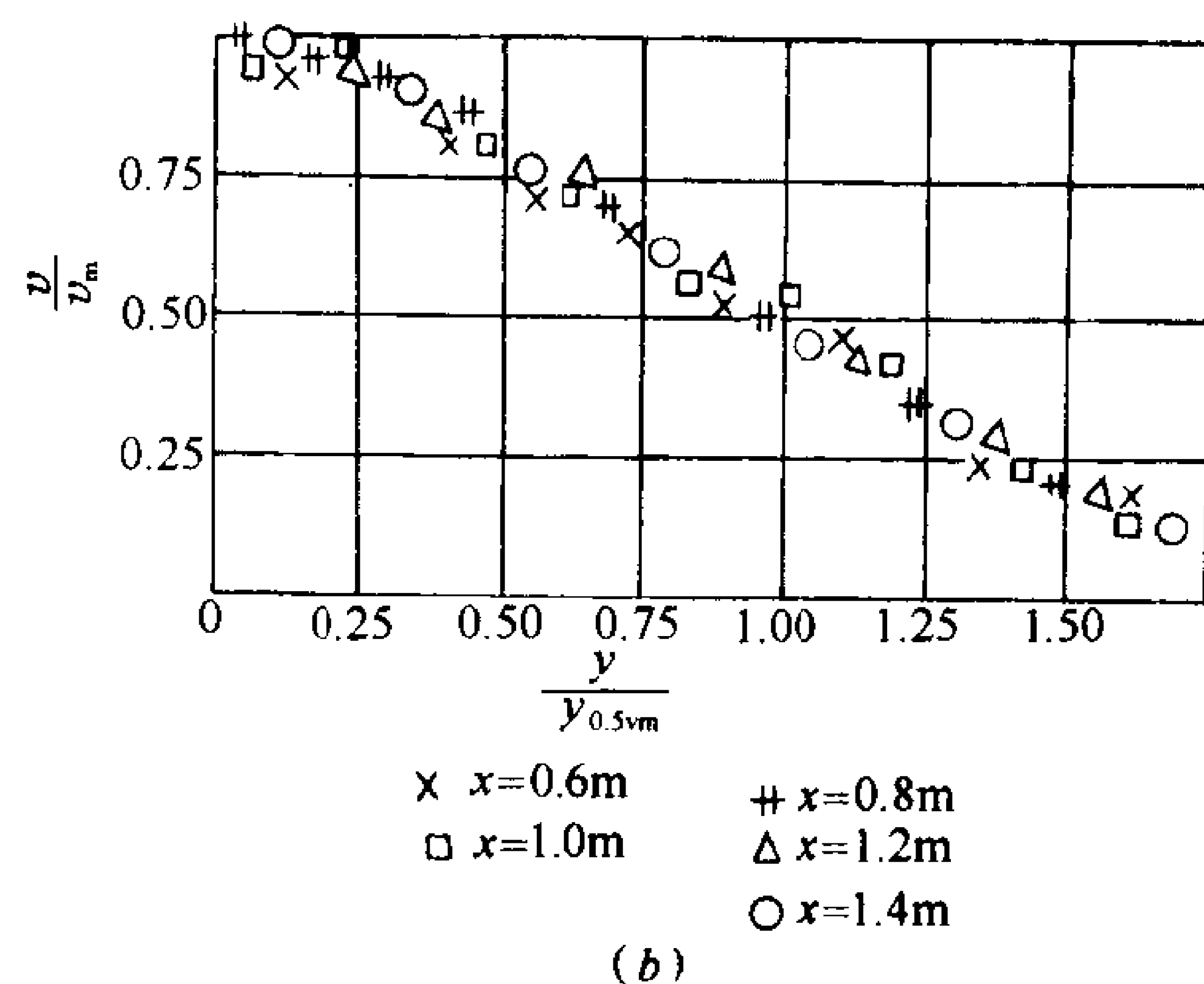
(6-1-2)式是以出口截面起算的无因次距离 $\bar{s}=\frac{s}{r_0}$ 表达的无因次半径 $\bar{R}=\frac{R}{r_0}$ 变化规律，而(6-1-2a)式则是以极点起算的无因次距离 $\bar{x}=\frac{x_0+s}{r_0}=\overline{x_0}+\bar{s}$ 的表达式。(6-1-2a)式说明了射流半径与射程的关系，即无因次半径正比于由极点算起的无因次距离。

三、运动特征

为了找出射流速度分布规律，许多学者做了大量实验，对不同横截面上的速度分布进行了测定。这里仅给出特留彼尔在轴对称射流主体段的实验结果，以及阿勃拉莫维奇在起始段内的测定结果，见图 6-2a 及图 6-3a。

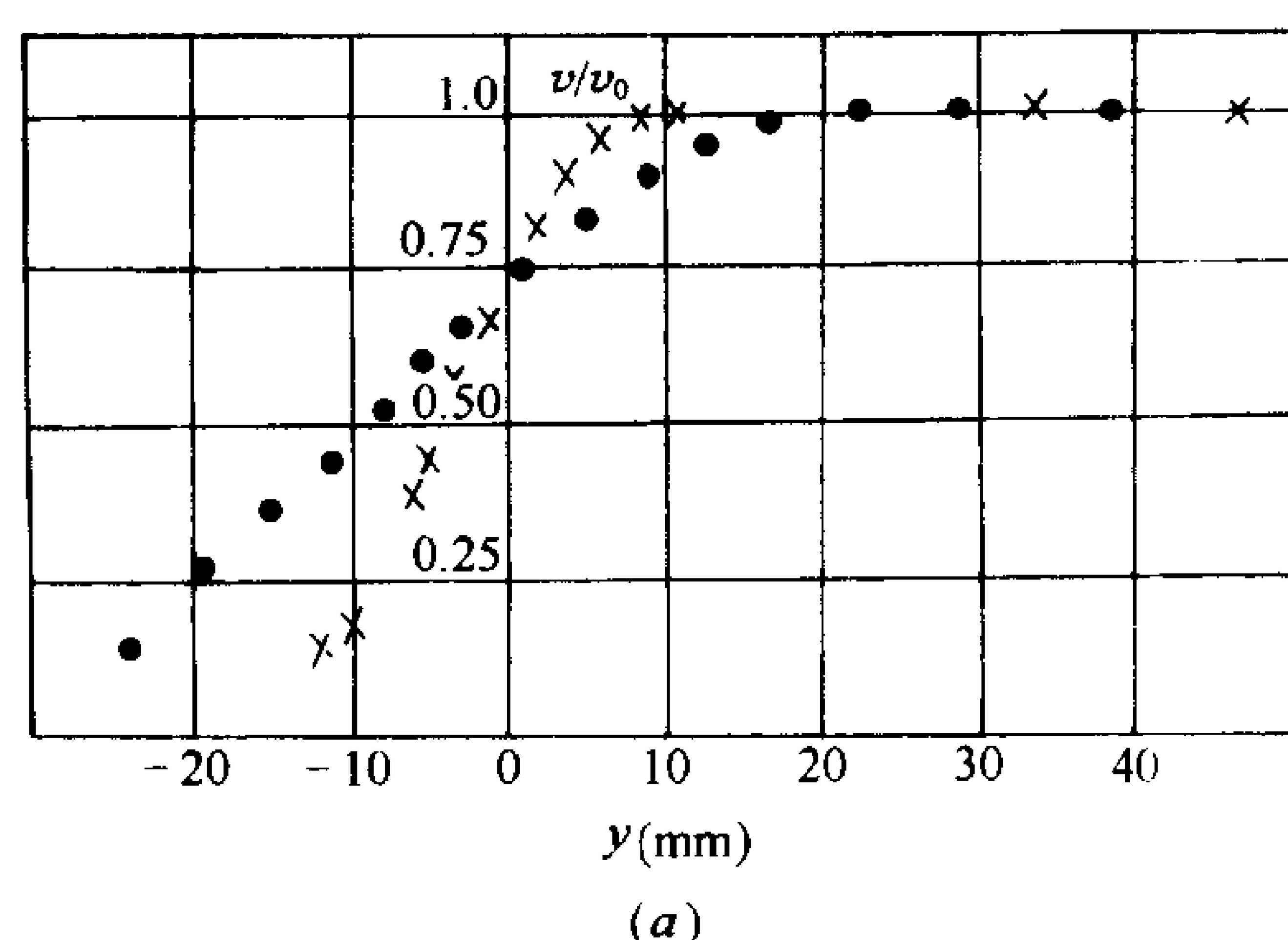


(a)

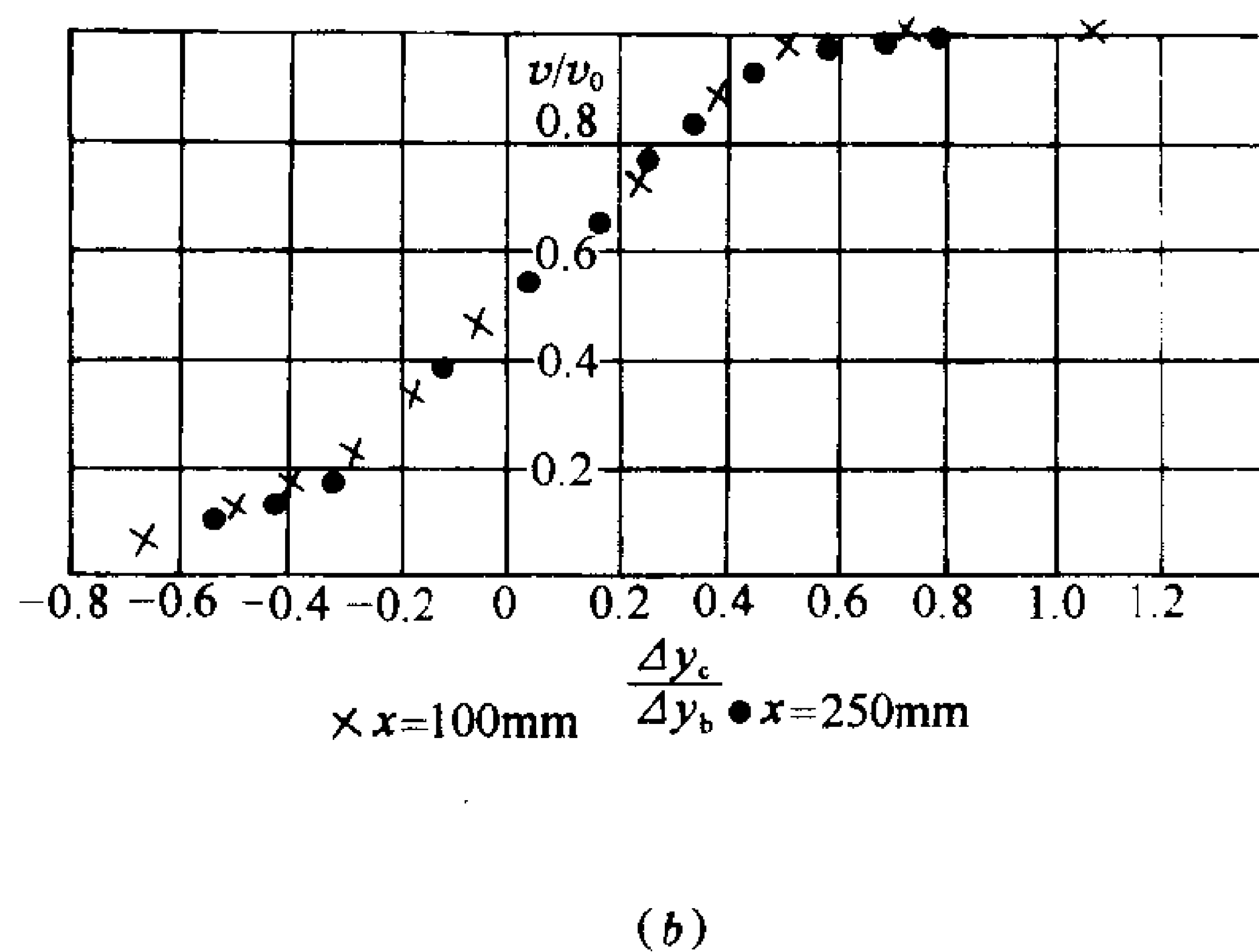


(b)

图 6-2　主体段流速分布



(a)



(b)

图 6-3　起始段流速分布

从两图中可见，无论主体段或起始段内，轴心速度最大，从轴心向边界层边缘，速度逐渐减小至零。同时可以看出，距喷嘴距离越远(即 x 值增大)，边界层厚度越大，而轴心速度则越小，也就是，随着 x 的增大，速度分布曲线不断地扁平化了。

如果纵坐标用相对速度，或无因次速度；横坐标用相对距离，或无因次距离以代替原图中的速度 v 和横向距离 y，就得图 6-2b、图 6-3b 的曲线。对照图 6-4b，主体段内无因次距离与无因次速度的取法规定：

$$\frac{y}{y_{0.5vm}}=\frac{\text{截面上任一点至轴心的距离}}{\text{同截面上 }0.5v_m\text{ 点至轴心的距离}}$$

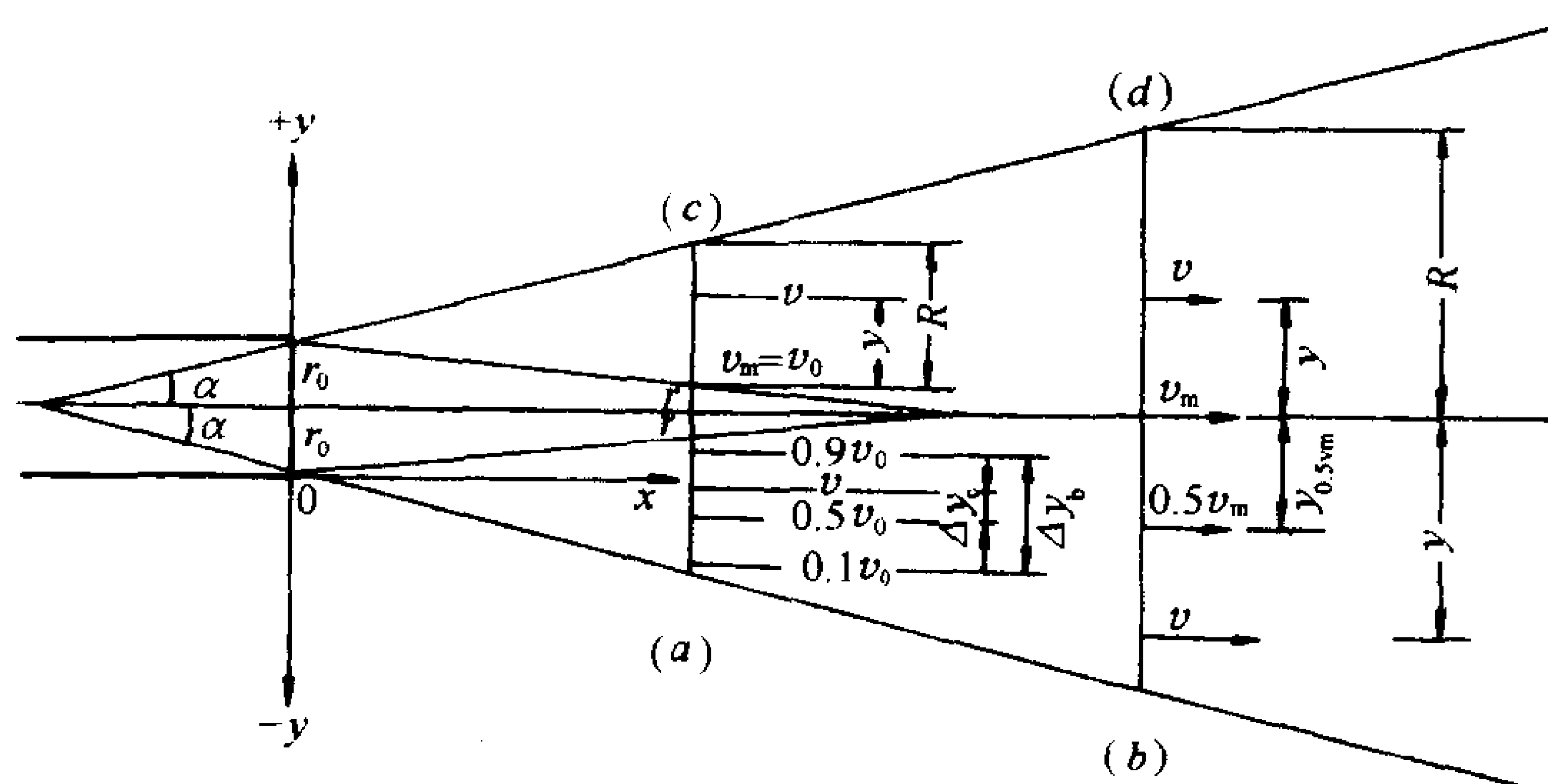


图 6-4　流速分布的距离规定

(a)起始段试验资料；(b)主体段试验资料；(c)起始段半经验式；(d)主体段半经验式

在上式中，$0.5v_m$ 点表示速度为轴心速度的一半之处的点。

$$\frac{v}{v_m}=\frac{\text{截面上 }y\text{ 点的速度}}{\text{同截面上轴心点的速度}}$$

阿勃拉莫维奇整理起始段时，所用无因次量为：

$$\frac{\Delta y_c}{\Delta y_b}=\frac{y-y_{0.5}v_0}{y_{0.9}v_0-y_{0.1}v_0}$$

$$\frac{v}{v_0}=\frac{y\text{ 点速度}}{\text{核心速度}}$$

式中(参看图 6-4a)

y——起始段任一点至 $0x$ 线的距离。$0x$ 线是以喷嘴边缘所引平行轴心线的横坐标轴；

$y_{0.5}v_0$——同一截面上 $0.5v_0$ 点至边缘轴线 $0x$ 的距离；

$y_{0.9}v_0$——同一截面上 $0.9v_0$ 点至边缘轴线 $0x$ 的距离；

$y_{0.1}v_0$——同一截面上 $0.1v_0$ 点至 $0x$ 线的距离。

经过这样整理便得出图 6-3b。可以看到原来各截面不同的速度分布曲线，经过这样变换均成为同一条无因次分布线。这种同一性说明，射流各截面上速度分布的相似性。这就是射流的运动特征。

用半经验公式表示射流各横截面上的无因次速度分布如下：

$$\frac{v}{v_m}=\left[1-\left(\frac{y}{R}\right)^{1.5}\right]^2 \qquad (6\text{-}1\text{-}3)$$

令

$$\frac{y}{R}=\eta$$

$$\frac{v}{v_m}=[1-\eta^{1.5}]^2 \quad (6\text{-}1\text{-}3a)$$

上式如用于主体段,参看图 6-4(d)。则式中

y——横截面上任意点至轴心距离;

R——该截面上射流半径(半宽度);

v——y 点上速度;

v_m——该截面轴心速度。

上式如用于起始段,仅考虑边界层中流速分布,参看图 6-4c。则式中

y——截面上任意点至核心边界的距离;

R——同截面上边界层厚度;

v——截面上边界层中 y 点的速度;

v_m——核心速度 v_0。

由此得出$\frac{y}{R}$从轴心或核心边界到射流外边界的变化范围为 0→1。$\frac{v}{v_m}$从轴心或核心边界到射流边界的变化范围为 1→0。

四、动力特征

实验证明,射流中任意点上的静压强均等于周围气体的压强。现取图 6-5 中 1-1、2-2 所截的一段射流脱离体,分析其上受力情况。因各面上所受静压强均相等,则 x 轴向外力之和为零。据动量方程可知,各横截面上动量相等——动量守恒,这就是射流的动力学特征。

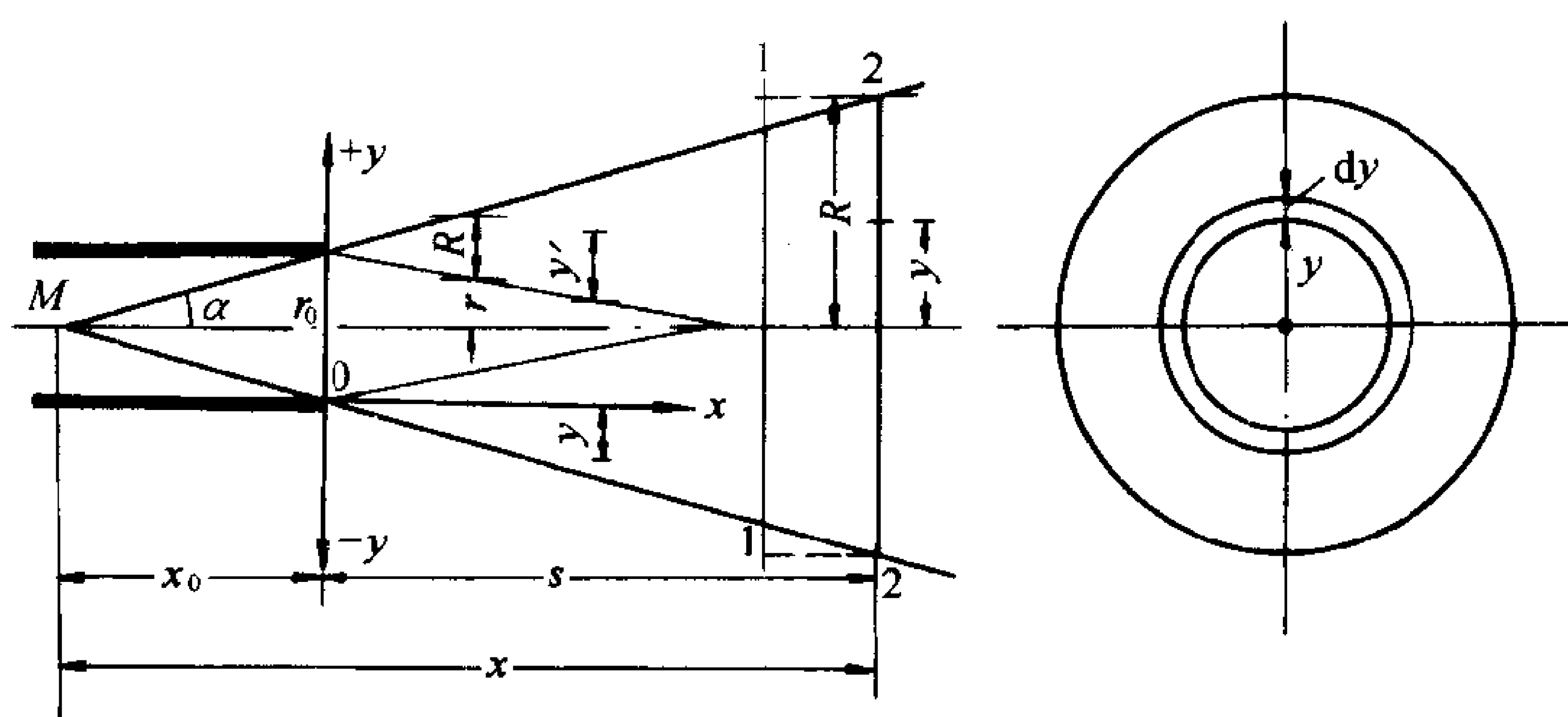


图 6-5 射流计算式的推证

以圆断面射流为例应用动量守恒原理

出口截面上动量流量为 $\rho Q_0 v_0=\rho\pi r_0^2 v_0^2$,任意横截面上的动量流量则需积分。

$$\int_0^R v\rho 2\pi y\mathrm{d}yv=\int_0^R 2\pi\rho v^2 y\mathrm{d}y$$

列动量守恒式:

$$\pi\rho r_0^2 v_0^2=\int_0^R 2\pi\rho v^2 y\mathrm{d}y \quad (6\text{-}1\text{-}4)$$

第二节 圆断面射流的运动分析

现在根据紊流射流特征来研究圆断面射流的速度 v、流量 Q 沿射程 s(或 x)的变化规律。

一、轴心速度 v_m

应用式(6-1-4)

$$\pi\rho r_0^2 v_0^2 = \int_0^R 2\pi\rho v^2 y \mathrm{d}y$$

以 $\pi\rho R^2 v_m^2$ 除两端,

$$\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\left(\frac{v_0}{v_m}\right)^2 = 2\int_0^1\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\frac{y}{R}\mathrm{d}\left(\frac{y}{R}\right)$$

应用式(6-1-3)$\frac{v}{v_m}=\left[1-\left(\frac{y}{R}\right)^{1.5}\right]^2$代入,则

$$\int_0^1[(1-\eta^{1.5})^2]^2\eta\mathrm{d}\eta = B_2$$

按前述$\frac{y}{R}$及$\frac{v}{v_m}$的变化范围,从无因次速度分布线上分段进行 B_2 的数值积分可得出具体数值,列于表 6-2。

B_n和 C_n 值 **表 6-2**

n	1	1.5	2	2.5	3
B_n	0.0985	0.064	0.0464	0.0359	0.0286
C_n	0.3845	0.3065	0.2585	0.2256	0.2015

$$B_n = \int_0^1\left(\frac{v}{v_m}\right)^n\eta\mathrm{d}\eta \qquad C_n = \int_0^1\left(\frac{v}{v_m}\right)^n\mathrm{d}\eta$$

于是$\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\left(\frac{v_0}{v_m}\right)^2=2B_2=2\times0.0464$

$$\frac{v_m}{v_0}=3.28\frac{r_0}{R}$$

再将射流半径 R 沿程变化规律(6-1-2),(6-1-2a)式代入,得

$$\frac{v_m}{v_0}=\frac{0.965}{\frac{as}{r_0}+0.294}=\frac{0.48}{\frac{as}{d_0}+0.147}=\frac{0.96}{a\bar{x}} \qquad (6\text{-}2\text{-}1)$$

说明了无因次轴心速度与无因次距离 $\bar{x}$ 成反比的规律。

二、断面流量 Q

取无因次流量,

$$\frac{Q}{Q_0}=\frac{2\pi\int_0^R vy\mathrm{d}y}{\pi r_0^2 v_0}=2\int_0^{\frac{R}{r_0}}\left(\frac{v}{v_0}\right)\left(\frac{y}{r_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{r_0}\right)$$

再用$\frac{v}{v_0}=\frac{v}{v_m}\cdot\frac{v_m}{v_0}$;$\frac{y}{r_0}=\frac{y}{R}\cdot\frac{R}{r_0}$代换

$$\frac{Q}{Q_0}=2\frac{v_m}{v_0}\cdot\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\int_0^1\left(\frac{v}{v_m}\right)\left(\frac{y}{R}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{R}\right)$$

查表 6-2,$B_1=0.0985$;再将(6-1-2),(6-2-1)式代入

$$\frac{Q}{Q_0}=2.2\left(\frac{as}{r_0}+0.294\right)=4.4\left(\frac{as}{d_0}+0.147\right)=2.2a\bar{x} \tag{6-2-2}$$

三、断面平均流速 v_1

从第三章知断面平均流速 $v_1=\frac{Q}{A}$;

$v_0=\frac{Q_0}{A_0}$。则无因次断面平均流速为:

$$\frac{v_1}{v_0}=\frac{QA_0}{Q_0A}=\frac{Q}{Q_0}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2$$

将(6-1-2),(6-2-2)式代入得

$$\frac{v_1}{v_0}=\frac{0.19}{\frac{as}{r_0}+0.294}=\frac{0.095}{\frac{as}{d_0}+0.147}=\frac{0.19}{a\cdot\bar{x}} \tag{6-2-3}$$

四、质量平均流速 v_2

断面平均流速 v_1 表示射流断面上的算术平均值。比较(6-2-1)、(6-2-3)两式,可得$v_1\approx 0.2v_m$。说明断面平均流速仅为轴心流速的 20%。通风、空调工程上通常使用的是轴心附近较高的速度区。因此 v_1 不能恰当的反映被使用区的速度。为此引入质量平均流速 v_2。质量平均流速定义为:用 v_2 乘以质量即得真实动量。列出口截面与任一横截面的动量守恒式:

$$\rho Q_0 v_0=\rho Q v_2$$

$$\frac{v_2}{v_0}=\frac{Q_0}{Q}=\frac{0.4545}{\frac{as}{r_0}+0.294}=\frac{0.23}{\frac{as}{d_0}+0.147}=\frac{0.4545}{a\bar{x}} \tag{6-2-4}$$

比较(6-2-1)与(6-2-4)式,$v_2=0.47v_m$。因此用 v_2 代表使用区的流速要比 v_1 更合适些。但必须注意,v_1、v_2 不仅在数值上不同,更重要的是在定义上根本不同,不可混淆。

以上分析出圆断面射流主体段内运动参数变化规律,这些规律亦适用于矩形喷嘴。但要将矩形换算成为流速当量直径代入进行计算。换算公式按第四章所述。

【例 6-1】 用轴流风机水平送风,风机直径 $d_0=600$mm。出口风速 10m/s,求距出口 10m 处的轴心速度和风量。

【解】 由表 6-1 查得 $a=0.12$。用(6-2-1)式,

$$\frac{v_m}{v_0}=\frac{0.48}{\frac{as}{d_0}+0.147}=\frac{0.48}{\frac{0.12\times10}{0.6}+0.147}=0.225$$

$$v_m=0.225v_0=0.225\times10=2.25\text{m/s}$$

$$\frac{Q}{Q_0}=4.4\left(\frac{as}{d_0}+0.147\right)=4.4\times2.147=9.45$$

$$Q=9.45Q_0=9.45\times\frac{\pi}{4}d_0^2v_0=9.45\times\frac{\pi}{4}\times(0.6)^2\times10=26.7\text{m}^3/\text{s}$$

五、起始段核心长度 s_n 及核心收缩角 θ

由图 6-1 可知，核心长度 s_n 为过渡断面至喷嘴的距离。可由式(6-2-1)求出，将 $v_m=v_0$，$s=s_n$，代入

$$\frac{v_0}{v_0}=1=\frac{0.965}{\frac{as_n}{r_0}+0.294}$$

$$s_n=0.671\frac{r_0}{a},\ \bar{s}_n=\frac{s_n}{r_0}=\frac{0.671}{a} \tag{6-2-5}$$

核心收缩角 θ

$$\text{tg}\theta=\frac{r_0}{s_n}=1.49a \tag{6-2-6}$$

六、起始段流量 Q

由于核心内保持着 v_0 出口速度，故无需求轴心速度变化规律，仅就流量 Q 加以讨论。图 6-4 中可得核心半径 r 的几何关系。

$$r=r_0-s\text{tg}\theta=r_0-1.49as \tag{6-2-7}$$

$$\frac{r}{r_0}=1-1.49\frac{as}{r_0} \tag{6-2-7a}$$

核心内无因次流量：

$$\frac{Q'}{Q_0}=\frac{\pi r^2v_0}{\pi r_0^2v_0}=\left(\frac{r}{r_0}\right)^2=\left(1-1.49\frac{as}{r_0}\right)^2$$

$$=1-2.98\frac{as}{r_0}+2.22\left(\frac{as}{r_0}\right)^2 \tag{6-2-8a}$$

边界层中无因次流量：

$$\frac{Q''}{Q_0}=\frac{\int_r^{R+r}v2\pi\tau d\tau}{\pi r_0^2v_0}$$

式中　r——核心半径，当所取截面确定后，则 r 对 τ 为一定值；

R——边界层厚度；

τ——所取横截面上任一点至轴心线的距离，$\tau=r+y$；

y——该截面上任一点至核心边界的距离。于是，

$$\frac{Q'}{Q_0}=2\int_{\frac{r}{r_0}}^{\frac{R+r}{r_0}}\frac{v}{v_0}\cdot\frac{\tau}{r_0}\mathrm{d}\left(\frac{\tau}{r_0}\right)$$

$$=2\int_{\frac{r}{r_0}}^{\frac{R+r}{r_0}}\frac{v}{v_0}\left(\frac{y+r}{r_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y+r}{r_0}\right)$$

$$=2\int_{\frac{r}{r_0}}^{\frac{R+r}{r_0}}\frac{v}{v_0}\frac{y}{r_0}\mathrm{d}\left(\frac{y}{r_0}\right)+2\int_{\frac{r}{r_0}}^{\frac{R+r}{r_0}}\frac{v}{v_0}\cdot\frac{r}{r_0}\mathrm{d}\left(\frac{y}{r_0}\right)$$

$$=2\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\int_0^1\frac{v}{v_0}\frac{y}{R}\mathrm{d}\left(\frac{y}{R}\right)+2\left(\frac{r}{r_0}\right)\left(\frac{R}{r_0}\right)\times\int_0^1\frac{v}{v_0}\mathrm{d}\left(\frac{y}{R}\right)$$

$$=2\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\cdot B_1+2\left(\frac{r}{r_0}\right)\left(\frac{R}{r_0}\right)\cdot C_1$$

又从图 6-5 中可得：

$$r+R=r_0+s\mathrm{tg}\alpha=r_0+3.4as$$

所以

$$R=r_0+3.4as-(r_0+1.49as)=4.89as$$

$$\frac{R}{r_0}=4.89\frac{as}{r_0}$$

再从表 6-2 中查出 B_1、C_1，并将(6-2-7a)式一并代入无因次边界流量式中得：

$$\frac{Q''}{Q_0}=3.74\frac{as}{r_0}-0.90\left(\frac{as}{r_0}\right)^2 \tag{6-2-8b}$$

整个截面上流量为，

$$\frac{Q'+Q''}{Q_0}=1+0.76\frac{as}{r_0}+1.32\left(\frac{as}{r_0}\right)^2 \tag{6-2-8}$$

七、起始段断面平均流速 v_1

$$\frac{v_1}{v_0}=\frac{(Q'+Q'')/F}{Q_0/F_0}=\frac{Q'+Q''}{Q_0}\cdot\left(\frac{r_0}{R+r}\right)^2$$

$$=\left[1+0.76\frac{as}{r_0}+1.32\left(\frac{as}{r_0}\right)^2\right]\left(\frac{1}{1+3.4\frac{as}{r_0}}\right)^2$$

$$=\frac{1+0.76\frac{as}{r_0}+1.32\left(\frac{as}{r_0}\right)^2}{1+6.8\frac{as}{r_0}+11.56\left(\frac{as}{r_0}\right)^2} \tag{6-2-9}$$

八、起始段质量平均流速 v_2

$$v_2=\frac{\rho v_0Q_0}{\rho(Q'+Q'')}=\frac{v_0Q_0}{Q'+Q''}$$

$$\frac{v_2}{v_0}=\frac{Q_0}{Q'+Q''}=\frac{1}{1+0.76\frac{as}{r_0}+1.32\left(\frac{as}{r_0}\right)^2} \tag{6-2-10}$$

【例 6-2】 已知空气淋浴地带要求射流半径为 1.2m,质量平均流速 $v_2=3\text{m/s}$。圆形喷嘴直径为 0.3m。求(1) 喷口至工作地带的距离 s;(2) 喷嘴流量。

【解】 (1) 由表 6-1 查得紊流系数 $a=0.08$。

(2) 求 s,由(6-1-2)式知,

$$\frac{R}{r_0}=3.4\left(\frac{as}{r_0}+0.294\right)$$

$$\frac{R}{r_0}=\frac{1.2}{0.15}=3.4\left(\frac{0.08}{0.15}s+0.294\right)$$

所以 $s=3.86\text{m}$

(3) 求核心长度 s_n

由式(6-2-5)知 $s_n=0.671\dfrac{r_0}{a}=0.671\times\dfrac{0.15}{0.08}=1.26$,故 $s>s_n$,所求横截面在主体段内。

(4) 求流量 Q_0

应用主体段质量平均流速公式(6-2-4)求得出口速度 v_0:

$$\frac{v_2}{v_0}=\frac{0.4545}{\dfrac{as}{r_0}+0.294}=\frac{0.4545}{\dfrac{0.08\times3.86}{0.15}+0.294}$$

$$\frac{v_2}{v_0}=0.193 \qquad v_0=\frac{v_2}{0.193}=\frac{3}{0.193}$$

$$v_0=15.5\text{m/s}$$

$$Q_0=\frac{\pi}{4}d_0^2v_0=0.785\times(0.3)^2\times15.5=1.095\text{m}^3/\text{s}$$

第三节 平 面 射 流

气体从狭长缝隙中外射运动时,射流只能在垂直条缝长度的平面上扩散运动。如果条缝相当长,这种流动可视为平面运动,故称为平面射流。

平面射流喷口高度以 $2b_0$(b_0 半高度)表示,a 值见表 6-1 后三项;φ 值为 2.44,于是 $\text{tg}\alpha=2.44a$。而几何、运动、动力特征则完全与圆断面射流相似,所以各运动参数规律的推导基本与圆断面类似,这里不再推导。列公式于表 6-3 中。

射流参数的计算 表 6-3

段名	参数名称	符号	圆断面射流	平面射流
主体段	扩散角	α	$\text{tg}\alpha=3.4a$	$\text{tg}\alpha=2.44a$
	射流直径或半高度	D b	$\dfrac{D}{d_0}=6.8\left(\dfrac{as}{d_0}+0.147\right)$	$\dfrac{b}{b_0}=2.44\left(\dfrac{as}{b_0}+0.41\right)$

续表

段名	参数名称	符号	圆断面射流	平面射流
主体段	轴心速度	v_m	$\frac{v_m}{v_0}=\frac{0.48}{\frac{as}{d_0}+0.147}$	$\frac{v_m}{v_0}=\frac{1.2}{\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}}$
	流　量	Q	$\frac{Q}{Q_0}=4.4\left(\frac{as}{d_0}+0.147\right)$	$\frac{Q}{Q_0}=1.2\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}$
	断面平均流速	v_1	$\frac{v_1}{v_0}=\frac{0.095}{\frac{as}{d_0}+0.147}$	$\frac{v_1}{v_0}=\frac{0.492}{\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}}$
	质量平均流速	v_2	$\frac{v_2}{v_0}=\frac{0.23}{\frac{as}{d_0}+0.147}$	$\frac{v_2}{v_0}=\frac{0.833}{\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}}$
起始段	流　量	Q	$\frac{Q}{Q_0}=1+0.76\frac{as}{r_0}+1.32\left(\frac{as}{r_0}\right)^2$	$\frac{Q}{Q_0}=1+0.43\frac{as}{b_0}$
	断面平均流速	v_1	$\frac{v_1}{v_0}=\frac{1+0.76\frac{as}{r_0}+1.32\left(\frac{as}{r_0}\right)^2}{1+6.8\frac{as}{r_0}+11.56\left(\frac{as}{r_0}\right)^2}$	$\frac{v_1}{v_0}=\frac{1+0.43\frac{as}{b_0}}{1+2.44\frac{as}{b_0}}$
	质量平均流速	v_2	$\frac{v_2}{v_0}=\frac{1}{1+0.76\frac{as}{r_0}+1.32\left(\frac{as}{r_0}\right)^2}$	$\frac{v_2}{v_0}=\frac{1}{1+0.43\frac{as}{b_0}}$
	核心长度	s_n	$s_n=0.672\frac{r_0}{a}$	$s_n=1.03\frac{b_0}{a}$
	喷嘴至极点距离	x_0	$x_0=0.294\frac{r_0}{a}$	$x_0=0.41\frac{b_0}{a}$
	收缩角	θ	$\mathrm{tg}\theta=1.49a$	$\mathrm{tg}\theta=0.97a$

从表6-3中可以看出，各无因次参数($\overline{v_m}$、$\overline{v_1}$、$\overline{v_2}$)对平面射流来说，都与$\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}$无因次距离有关。和圆断面射流相比，流量沿程的增加、流速沿程的衰减都要慢些。这是因为运动的扩散被限定在垂直于条缝长度的平面上的缘故。

第四节　温差或浓差射流

在采暖通风空调工程中，常采用冷风降温，热风采暖，这时就要用温差射流。将有害气体及灰尘浓度降低就要用浓差射流。所谓温差、浓差射流就是射流本身的温度或浓度与周围气体的温度、浓度有差异。

温差或浓差射流分析，主要是研究射流温差、浓差分布场的规律。同时讨论由温差、浓差引起射流弯曲的轴心轨迹。

如本章第一节中射流的形成所述，横向动量交换，旋涡的出现，使之质量交换，热量交换，浓度交换。而在这些交换中，由于热量扩散比动量扩散要快些，因此温度边界层比速度边界层发展要快些厚些，如图 6-6a 所示。实线为速度边界层，虚线为温度边界层的内外界线。

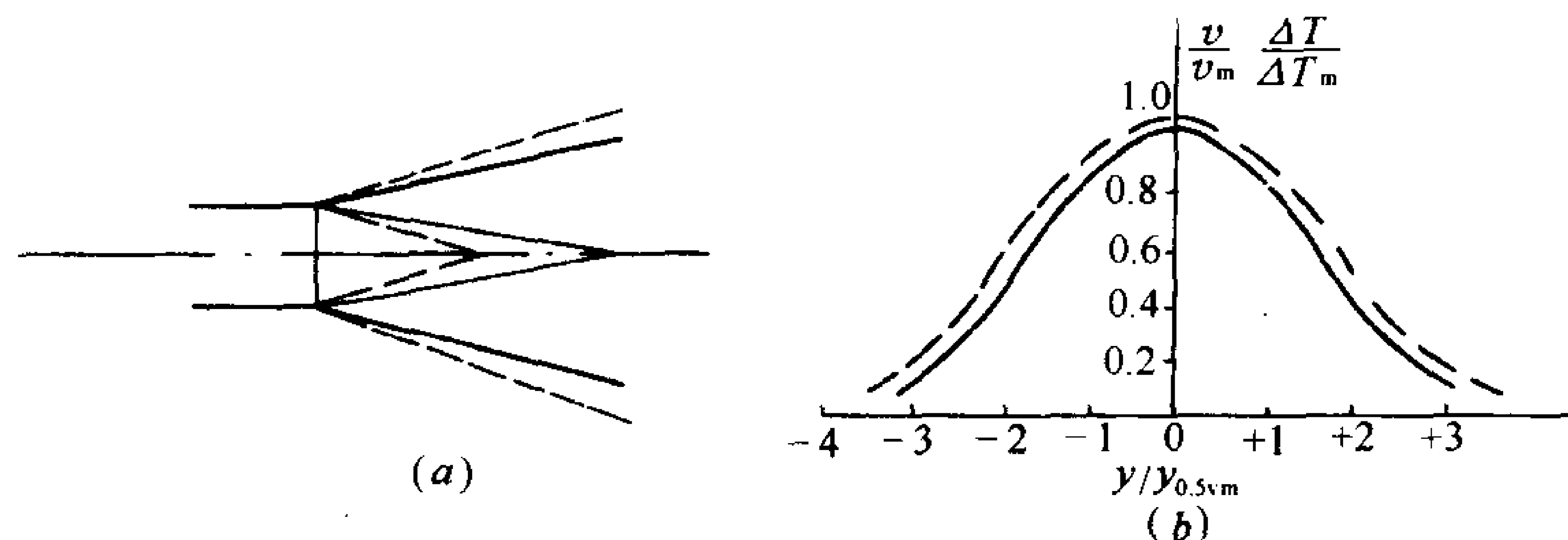


图 6-6　温度边界层与速度边界层的对比

浓度扩散与温度相似，然而在实际应用中，为了简化起见，可以认为，温度、浓度内外的边界与速度内外的边界相同。于是参数 R、Q、v_m、v_1、v_2 等可使用前两节所述公式，仅对轴心温差 ΔT_m，平均温差等沿射程的变化规律进行讨论。

设以足标 e 表示周围气体的符号。

对温差射流：

出口断面温差　$\Delta T_0 = T_0 - T_e$

轴心上温差　$\Delta T_m = T_m - T_e$

截面上任一点温差　$\Delta T = T - T_e$

对浓差射流：

出口断面浓差　$\Delta x_0 = \chi_0 - \chi_e$

轴心上浓差　$\Delta \chi_m = \chi_m - \chi_e$

截面上任意一点浓差　$\Delta \chi = \chi - \chi_e$

试验得出，截面上温差分布，浓差分布与速度分布关系如下：

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_m} = \frac{\Delta \chi}{\Delta \chi_m} = \sqrt{\frac{v}{v_m}} = 1 - \left(\frac{y}{R}\right)^{1.5} \tag{6-4-1}$$

将$\dfrac{\Delta T}{\Delta T_m}$与$\dfrac{v}{v_m}$同绘在一个无因次坐标上，见图 6-6$b$。无因次温差分布线，在无因次速度线的外部，证实了前面的分析。

与前述动力特征类似。据热力学可知，在等压的情况下，以周围气体的焓值作为起算点，射流各横截面上的相对焓值不变。这一特点称为热力特征。

设喷嘴断面上单位时间的相对焓值为 $\rho Q_0 c \Delta T_0$，则与射流任意横截面上单位时间通过的相对焓值 $\int_Q \rho c \Delta T dQ$ 相等。

下面进行圆断面温差射流运动的分析。

一、轴心温差 ΔT_m

根据相对焓值相等，

$$\rho Q_0 c \Delta T_0 = \int_0^R \rho c \Delta T 2\pi y \mathrm{d}y \cdot v$$

两端除以 $\rho \pi R^2 v_m c \Delta T_m$，并将(6-4-1)式代入，得出：

$$\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_0}{v_m}\right) \cdot \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_m}\right) = 2\int_0^1 \frac{v}{v_m} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \cdot \frac{y}{R} d\left(\frac{y}{R}\right)$$
$$= 2\int_0^1 \left(\frac{v}{v_m}\right)^{1.5} \frac{y}{R} d\left(\frac{y}{R}\right)$$

查表 6-2，$B_{1.5}=0.064$，且将主体段$\frac{R}{r_0}$，$\frac{v_m}{v_0}$式代入，于是得出主体段轴心温差变化规律：

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{0.706}{\frac{as}{r_0}+0.294} = \frac{0.35}{\frac{as}{d_0}+0.147} = \frac{0.706}{a\bar{\chi}} \tag{6-4-2}$$

二、质量平均温差 ΔT_2

所谓质量平均温差，就是以该温差乘上 ρQc，便得出相对焓值。以符号 ΔT_2 表示。

列出口断面与射流任一横截面相对焓值的相等式，于是得到：

$$\Delta T_2 = \frac{\rho c Q_0 \Delta T_0}{\rho Qc} = \frac{Q_0 \Delta T_0}{Q}$$

无因次质量温差与 Q_0/Q 相等，将(6-2-2)式代入，

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_0} = \frac{Q_0}{Q} = \frac{0.455}{\frac{as}{r_0}+0.294} = \frac{0.23}{\frac{as}{d_0}+0.147} = \frac{0.455}{a\bar{\chi}} \tag{6-4-3}$$

三、起始段质量平均温差 ΔT_2

起始段轴心温差 ΔT_m 是不变化的，与 ΔT_0 同，无需讨论。而质量平均温差只要把 Q_0/Q代为起始段无因次流量即得：

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_0} = \frac{1}{1+0.76\frac{as}{r_0}+1.32\left(\frac{as}{r_0}\right)^2} \tag{6-4-4}$$

对于浓差射流其规律与温差射流相同。所以温差射流公式完全适用于浓差射流。见表 6-4。

浓差温差的射流计算 表 6-4

段 名	参数名称	符 号	圆断面射流	平面射流
主体段	轴心温差	ΔT_m	$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}=\frac{0.35}{\frac{as}{d_0}+0.147}$	$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}=\frac{1.032}{\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}}$
	质量平均温差	ΔT_2	$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_0}=\frac{0.23}{\frac{as}{d_0}+0.147}$	$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_0}=\frac{0.833}{\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}}$
	轴心浓差	$\Delta\chi_m$	$\frac{\Delta x_m}{\Delta x_0}=\frac{0.35}{\frac{as}{d_0}+0.147}$	$\frac{\Delta\chi_m}{\Delta x_0}=\frac{1.032}{\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}}$
	质量平均浓差	$\Delta\chi_2$	$\frac{\Delta\chi_2}{\Delta\chi_0}=\frac{0.23}{\frac{as}{d_0}+0.147}$	$\frac{\Delta\chi_2}{\Delta\chi_0}=\frac{0.833}{\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}}$

续表

段名	参数名称	符号	圆断面射流	平面射流
起始段	质量平均温差	ΔT_2	$\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_0}=\dfrac{1}{1+0.76\dfrac{as}{r_0}+1.32\left(\dfrac{as}{r_0}\right)^2}$	$\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_0}=\dfrac{1}{1+0.43\dfrac{as}{b_0}}$
	质量平均浓差	$\Delta\chi_2$	$\dfrac{\Delta\chi_2}{\Delta\chi_0}=\dfrac{1}{1+0.76\dfrac{as}{r_0}+1.32\left(\dfrac{as}{r_0}\right)^2}$	$\dfrac{\Delta\chi_2}{\Delta\chi_0}=\dfrac{1}{1+0.43\dfrac{as}{b_0}}$
	轴线轨迹方程		$\dfrac{y}{d_0}=\dfrac{x}{d_0}\text{tg}\alpha+\text{Ar}\left(\dfrac{x}{d_0\cos\alpha}\right)^2\times\left(0.51\dfrac{ax}{d_0\cos\alpha}+0.35\right)$	$\dfrac{y}{2b_0}=\dfrac{0.226\text{Ar}\left(a\dfrac{x}{2b_0}+0.205\right)^{5/2}}{a^2\sqrt{T_1/T_0}}$ $\dfrac{y}{2b_0}\cdot\dfrac{\sqrt{T_1/T_0}}{\text{Ar}}=\dfrac{0.226}{a^2}\left(a\dfrac{x}{2b_0}+0.205\right)^{5/2}$

四、射流弯曲

温差射流或浓差射流由于密度与周围密度不同，所受的重力与浮力不相平衡，使整个射流将发生向下或向上弯曲。但整个射流仍可看作是对称于轴心线，因此了解轴心线的弯曲轨迹后，便可得出整个弯曲的射流。

我们采用近似的处理方法：取轴心线上的单位体积流体作为研究对象，只考虑受重力与浮力作用，应用牛顿定律导出公式。

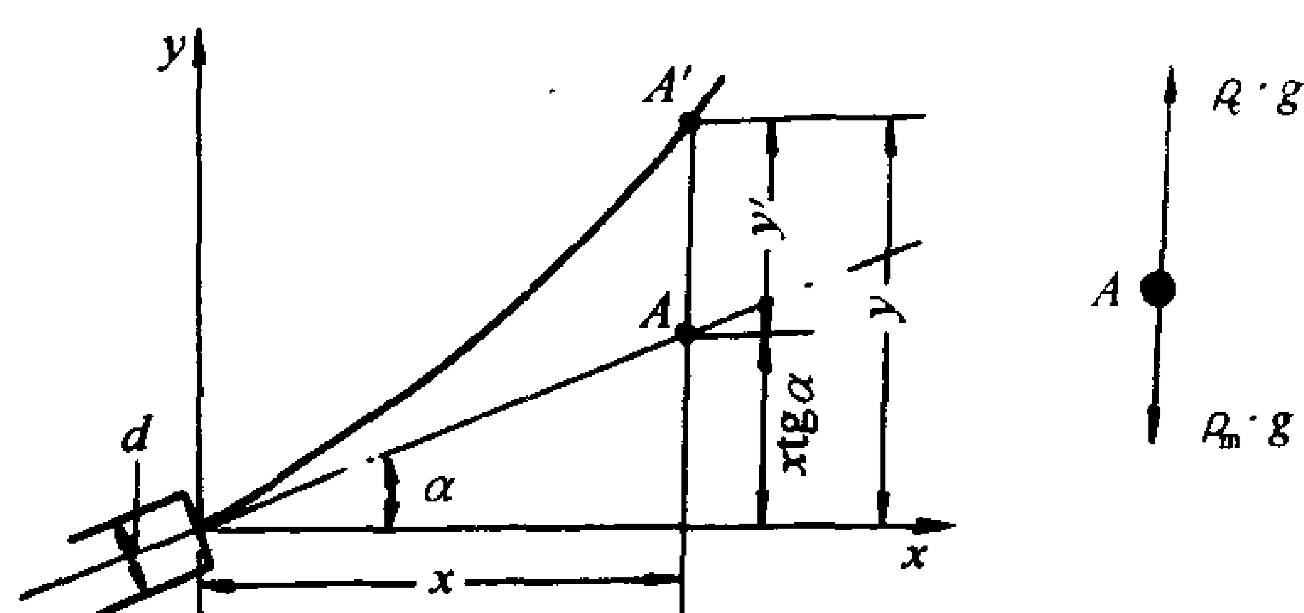


图 6-7　射流轴线的弯曲

有一热射流自直径为 d 的喷嘴中喷出，射流轴线与水平线成 α 角，现分析弯曲轨迹。图 6-7 所给 A 点即为轴心线上单位体积射流，其上所受重力为 $\rho_m g$；浮力为 $\rho_e\cdot g_0$ 则总的向上合力为 $(\rho_e-\rho_m)g$。根据牛顿定律，

$$F=\rho_m\cdot j\qquad(\rho_e-\rho_m)g=\rho_m j$$

$$j=\frac{\rho_e-\rho_m}{\rho_m}\cdot g$$

式中，j 为垂直向上的加速度。图 6-7 中可得射流轴心 A 点偏离的纵向距离为 y'，则 y' 和射流的垂直分速度 u_y、垂直加速度三者之间的关系为

$$j=\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\qquad \text{则}\ u_y=\int j\mathrm{d}t\ ,$$

$$y'=\int u_y\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t\int j\mathrm{d}t$$

将 j 式代入，

$$y'=\int\mathrm{d}t\int\left(\frac{\rho_e}{\rho_m}-1\right)g\cdot\mathrm{d}t$$

气体在等压过程时，状态方程式为 $\rho\cdot g\cdot T=$ 常数。可得

$$\frac{\rho_e \cdot g}{\rho_m \cdot g}=\frac{T_m}{T_e};\frac{\rho_e}{\rho_m}=\frac{T_m}{T_e}\text{代入下式}$$

$$\frac{\rho_e}{\rho_m}-1=\frac{T_m}{T_e}-1=\frac{T_m-T_e}{T_e}=\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}\cdot\frac{\Delta T_0}{T_e}$$

将轴心温差换为轴心速度关系，应用(6-2-1)和(6-4-2)两式，

$$\frac{\rho_e}{\rho_m}-1=0.73\left(\frac{v_m}{v_0}\right)\frac{\Delta T_0}{T_e}\text{这样，}$$

$$y'=\int dt\int 0.73\left(\frac{v_m}{v_0}\right)\left(\frac{\Delta T_0}{T_e}\right)g\,dt$$

$$=\frac{0.73g}{v_0}\cdot\frac{\Delta T_0}{T_e}\int dt\int v_m dt$$

因为 $v_m=\frac{ds}{dt}$

积分 $\int dt\int v_m dt=\int s\,dt\ \frac{1}{v_0}\int\frac{v_0}{v_m}\cdot v_m s\,dt=\frac{1}{v_0}\int\frac{v_0}{v_m}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot s\,dt$

$$=\frac{1}{v_0}\int\frac{v_0}{v_m}s\,ds$$

再用$\frac{v_m}{v_0}$倒数代入，且一并代入 y'式，

$$y'=\frac{0.73g}{v_0^2}\cdot\frac{\Delta T_0}{T_e}\int\frac{\frac{as}{r_0}+0.294}{0.965}s\,ds$$

$$=\frac{g\Delta T_0}{v_0^2 T_e}\left(0.51\frac{a}{2r_0}s^3+0.11s^2\right)$$

将 0.11 改为 0.35 以符合实验数据

$$y'=\frac{g\cdot\Delta T_0}{v_0^2 T_e}\left(0.51\frac{a}{2r_0}s^3+0.35s^2\right) \tag{6-4-5}$$

式(6-4-5)给出了射流轴心轨迹偏离值 y'随 s 变化的规律。如以图 6-7 中坐标表示，$s=\frac{x}{\cos\alpha}$，且以喷嘴直径 d_0 除之，便得出无因次轨迹方程为：

$$\frac{y}{d_0}=\frac{x}{d_0}\text{tg}\alpha+\left(\frac{gd_0\Delta T_0}{v_0^2 T_e}\right)\left(\frac{x}{d_0\cos\alpha}\right)^2\left(0.51\frac{ax}{d_0\cos\alpha}+0.35\right)$$

式中，$\frac{gd_0\Delta T_0}{v_0^2 T_e}=\text{Ar}$ 为阿基米德准数，于是上式变为：

$$\frac{y}{d_0}=\frac{x}{d_0}\text{tg}\alpha+\text{Ar}\left(\frac{x}{d_0\cos\alpha}\right)^2\left(0.51\frac{ax}{d_0\cos\alpha}+0.35\right) \tag{6-4-6}$$

对于平面射流

$$\frac{\bar{y}}{\mathrm{Ar}} \cdot \sqrt{\frac{T_e}{T_0}} = \frac{0.226}{a^2}(a\bar{x} + 0.205)^{5/2} \tag{6-4-6a}$$

式中，

$$\bar{y} = \frac{y}{2b_0}, \bar{x} = \frac{x}{2b_0}$$

【例 6-3】 工作地点质量平均风速要求 3m/s，工作面直径 $D = 2.5$m，送风温度为 15℃，车间空气温度 30℃，要求工作地点的质量平均温度降到 25℃，采用带导叶的通风机，其紊流系数 $a = 0.12$。求(1) 风口的直径及速度；(2) 风口到工作面的距离。

【解】 温差 $\Delta T_0 = 15 - 30 = -15$℃

$$\Delta T_2 = 25 - 30 = -5℃$$

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_0} = \frac{0.23}{\frac{as}{d_0} + 0.147} = \frac{-5}{-15}$$

求出 $\frac{as}{d_0} + 0.147 = 0.23 \times \frac{15}{5} = 0.69$，代入下式

$$\frac{D}{d_0} = 6.8\left(\frac{as}{d_0} + 0.147\right) = 6.8 \times 0.69$$

所以 $d_0 = \frac{D}{6.8 \times 0.69} = \frac{2.5}{6.8 \times 0.69} = 0.525$m

工作地点质量平均风速要求 3m/s

因为

$$\frac{v_2}{v_0} = \frac{0.23}{\frac{as}{d_0} + 0.147} = \frac{5}{15} = \frac{3}{v_0}$$

所以 $v_0 = 9$m/s

(2) 风口到工作面距离 s 可用下式求出

$$\frac{as}{d_0} + 0.147 = 0.69$$

$$\frac{0.12s}{0.525} = 0.543 \qquad s \approx 2.4\text{m}$$

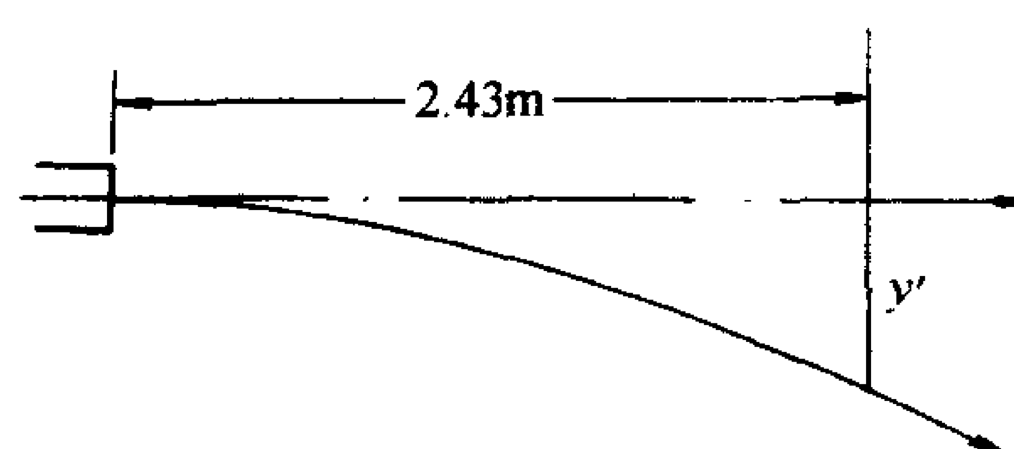


图 6-8 射流的下降

【例 6-4】 数据同上题，求射流在工作面的下降值 y'（图 6-8）。

【解】 周围气体温度 $T_e = 273 + 30 = 303$k

$\Delta T_0 = -15$k $v_0 = 9$m/s $a = 0.12$

$d_0 = 0.525$m $s = 2.43$m

$$y' = \frac{g\Delta T_0}{v_0^2 T_e}\left(0.51\frac{a}{d_0}s^3 + 0.35s^2\right) = \frac{9.8 \times (-15)}{9^2 \times 303}\left(0.51 \times \frac{0.12}{0.525} \times 2.43^3 + 0.35 \times 2.43^2\right) = -0.006 \times (1.64 + 2.07) = -0.0221\text{m}$$

【例 6-5】 室外空气以射流方式，由位于热车间外墙上离地板 7.0m 处的孔口送入。孔口的尺寸，高 0.35m，长 12m。室外空气的温度为 −10℃，室内空气温度为 20℃，射流初速度为 2m/s，求地板上的温度。

【解】 a 取为 0.12

计算

$$\bar{y}=\frac{y}{2b_0}=\frac{7.0}{0.35}=20$$

$$\mathrm{Ar}=\frac{g(2b_0)\Delta T_0}{v_0^2 T_e}=\frac{9.8\times0.35\times(-10-20)}{2^2\times(273+20)}=\frac{103}{1170}=0.088$$

$$\sqrt{\frac{T_e}{T_0}}=\frac{\sqrt{20+273}}{\sqrt{-10+273}}$$

$$\bar{y}/\mathrm{Ar}\cdot\sqrt{\frac{T_e}{T_0}}=\frac{20\sqrt{293/263}}{0.088}=220$$

计算求出 $\bar{x}=23$

$$\frac{x}{2b_0}=23 \qquad \frac{x}{b_0}=46$$

用轴心温差公式

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}=\frac{1.032}{\sqrt{0.12\times46+0.41}}=\frac{1.032}{\sqrt{5.93}}=0.425$$

$$\frac{T-T_e}{T_0-T_e}=\frac{t-20}{-10-20}=\frac{t-20}{-30}=0.425$$

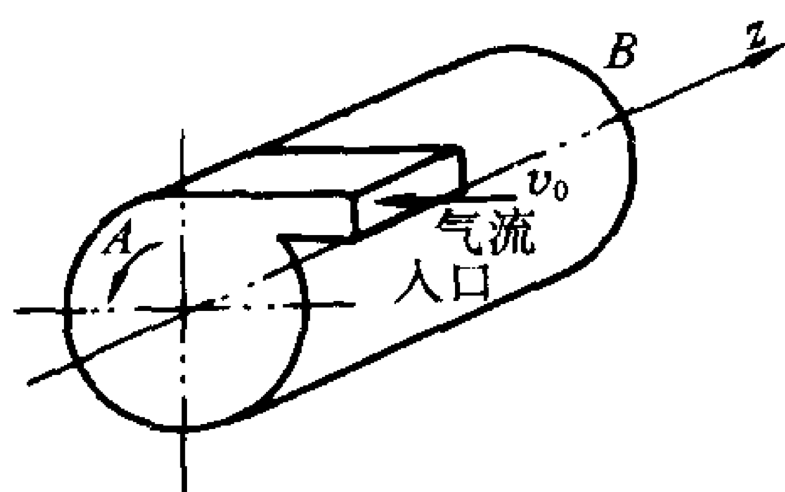
$$t=+7.3℃$$

*第五节 旋 转 射 流

一、旋转射流概述

气流通过具有旋流作用的喷嘴外射运动。气流本身一面旋转，一面向周围介质中扩散前进，这就形成了与前述一般射流不同的特殊射流，称为旋转射流。

喷嘴使气流具有旋转作用主要通过两种方式，一种是采用切向导入管(图 6-9)，气流在切向导入管口以初速 v_0 进入圆柱形设备，它对 z 轴存在着动量矩，从而促使气流在圆柱形设备中旋转，同时向 B 端出口推进。一种是在喷嘴内安装导向叶片，气流沿叶片流动被迫产生旋转。



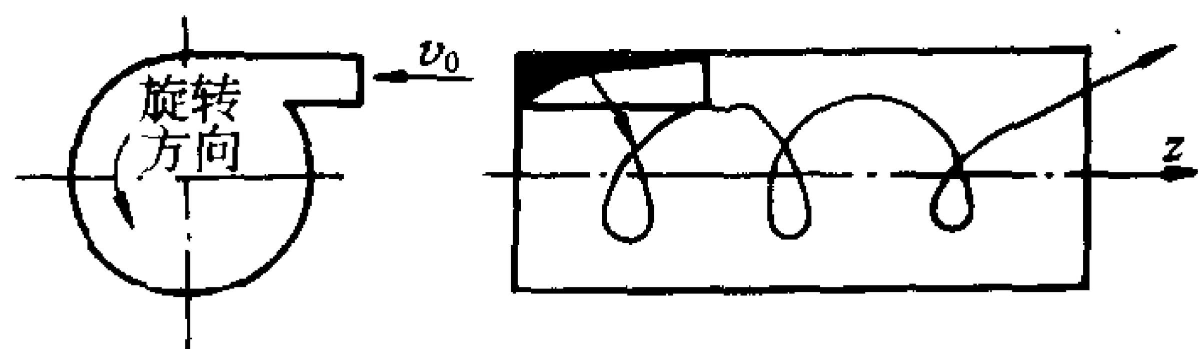


图 6-9 切向引入气流

旋流喷嘴的旋转作用来源于流入气流施加的动量矩，但动量矩在流出过程中受各种阻力作用而降低，为此，引入系数 ε 来反映，

$$\varepsilon=\frac{\text{旋流室内实际动量矩}}{\text{进口处计算动量矩}}$$

ε 称为速度保持系数，是旋流设备的特征值。不同旋流室其 ε 值亦不同，变化范围约为 0.25～0.95。

对于几何相似的旋流室，ε 应有相同的数值，它不随进风量的多少而变化，因此，ε 值是评价旋流室空气动力特性的重要指标。

旋转射流的基本特征在于旋转，旋转使射流获得向四周扩散的离心力。和一般射流相比较，扩散角大得多，射程短得多。射流的紊动性强得多，如果一般射流二倍扩散角是 28°，则旋转射流可达 90°以上。这样就极大地促进了射流与周围介质的动量交换，热量交换和浓度交换。正是这种特性，被广泛用于工程燃烧技术及旋流送风中。旋转作用所产生的离心力，改变了一般射流的压强分布，出现了从射流轴线沿径向至射流边界的压强降低，低压中心将吸入射流前方的介质使之回流，形成一个包含在射流内部的回流区。在燃烧过程中，这个回流区促使大量高温烟气回流到火矩根部，保证燃料顺利而稳定地着火。

旋转射流是一种轴对称射流，但比一般轴对称直射流复杂得多。理论分析还不能完善地求出速度场，仅根据一些典型试验简述它的运动特征和动力特征。

二、旋转射流的流速分布

将旋转射流的速度分解为三个分量：(1) 沿射流前进方向的轴向速度 v_x；(2) 在横截面上沿半径方向的径向速度 v_r；(3) 在横截面上做圆周运动的切向速度 v_θ。通过实验发现，由于切向速度、径向速度沿半径方向上分布不均匀，使得沿半径方向上静压强分布也不均匀，则对于周围介质的静压差也不相等。这与轴对称圆断面自由射流是不同的。

下面对照图 6-10、图 6-11 对三个分速度分别进行讨论：

（一）轴向速度 v_x

图 6-10 给出了由旋流设备射出的旋转射流，及 $\frac{x}{d}=0.2$、$\frac{x}{d}=1$ 两个横断面上的速度分布。x 表示射流轴线方向距离，d 与 R 为旋流器出口直径及半径，r 为射流径向尺寸。图中实线表示轴向速度 v_x 的分布。在旋转射流轴心处 $v_x<0$，存在一个回流区，该回流区一直发展到 $\frac{x}{d}=2.1$ 处才结束。在回流区边界与射流边界之间称为主流区，存在着轴向速度的最大值 v_{xmax}，随着旋转射流向前，v_{xmax} 逐渐下降，回流区变小直至消失，轴向速度分布越趋平坦均匀，而旋转射流的横截面则越大，这与一般射流的情况是相似的。

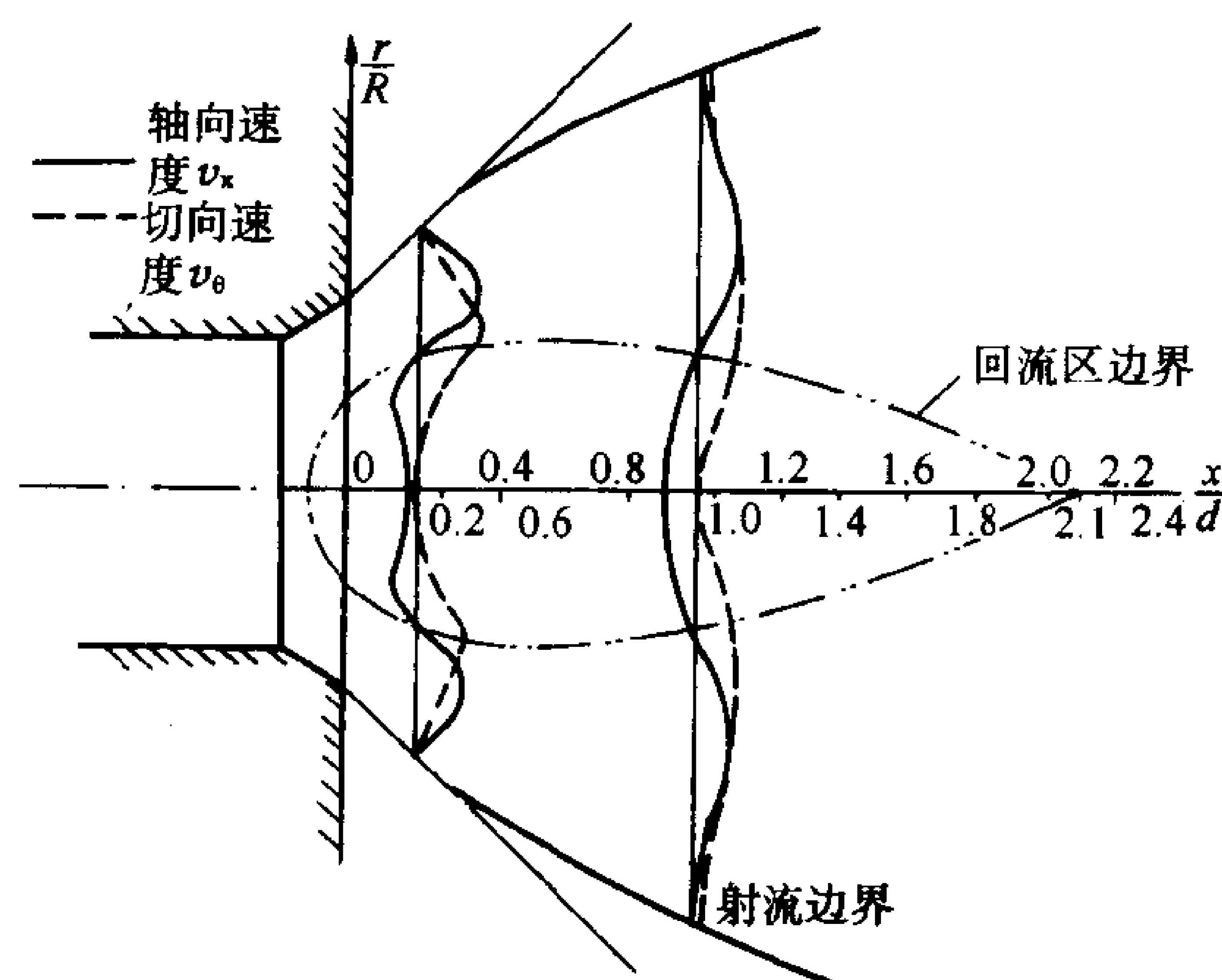


图 6-10 旋转射流速度图

（二）切向速度 v_θ

图中虚线表示切向速度分布，在旋转射流轴心处 $v_\theta=0$，当 r 越大，v_θ 亦越大，在某一 r 处 v_θ 达最大值 $v_{\theta max}$，尔后 r 再增大，v_θ 逐渐下降，直至旋转射流边界处 $v_\theta=0$。v_θ 的分布与旋涡运动的切向速度分布相似，随着旋转射流向前推进，$v_{\theta max}$ 下降，v_θ 的分布则越来越平坦。

（三）径向速度 v_r

图 6-11 给出径向速度$\frac{v_r}{v_0}$沿横截面上分布的示意图，可见 v_r 的分布是很复杂的，不仅数值大小有变化，而且方向也在改变。在旋转射流轴心上径向速度 $v_r=0$；在回流区 $a\sim b$ 中 $v_r>0$（取向外的 v_r 为正）；在回流区另外一半 $b\sim c$ 中 $v_r<0$（即向内流动），这是因为回流区内保持质量平衡必须有流体补充所导致的向中心的径向流动。在 $c\sim d$ 主流区中，径向速度又变为正值，且达到最大值，这与旋转射流向四周扩散有关。在接近射流边界 d 处，由于周围介质被射流带入，v_r 又出现负值。在一般情况下，旋转射流的径向速度较切向速度及轴向速度的数值小得多。

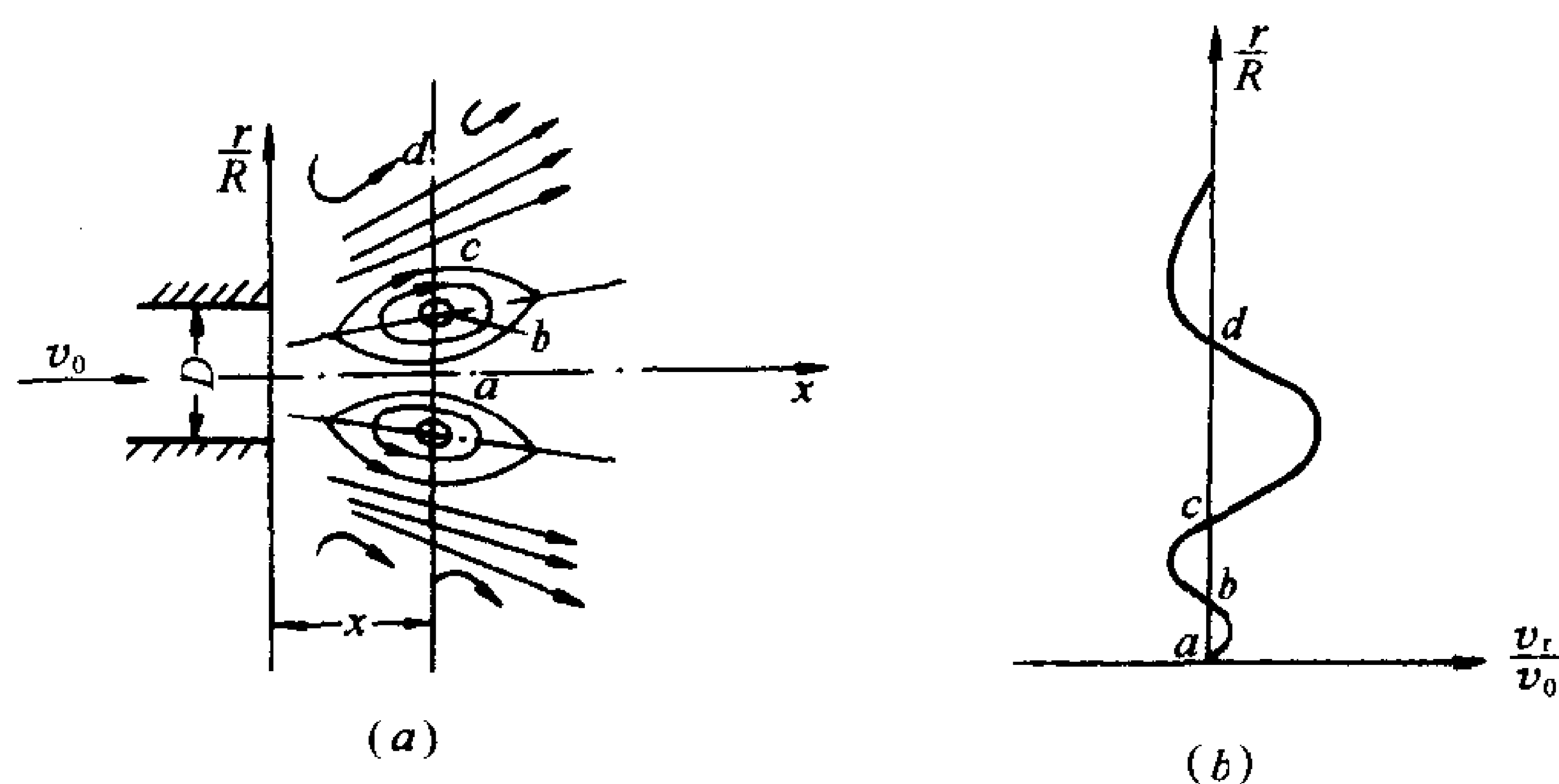


图 6-11

（a）流动示意图；（b）径向速度分布示意图

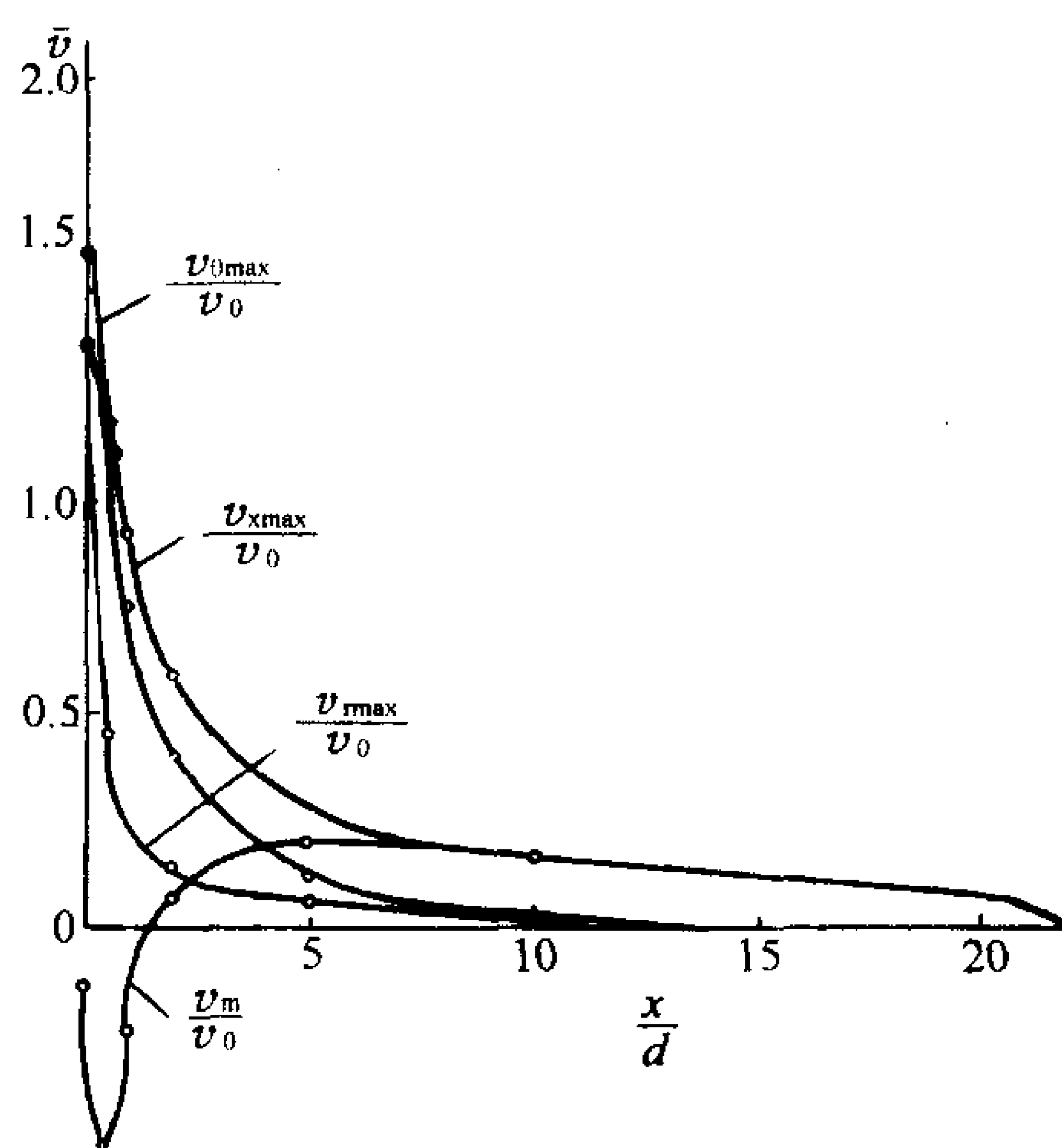


图 6-12　无因次分速度图

图 6-12 上给出了无因次速度$\frac{v_{\theta max}}{v_0}$、$\frac{v_{xmax}}{v_0}$、$\frac{v_{rmax}}{v_0}$、$\frac{v_m}{v_0}$随无因次距离$\frac{x}{d}$的变化规律。

从图可看出各无因次速度沿$\frac{x}{d}$衰减很快，特别是$\frac{v_{rmax}}{v_0}$下降最快。当$\frac{x}{d}>5$ 以后$\frac{v_{\theta max}}{v_0}$、$\frac{v_{rmax}}{v_0}$基本消失，只存在着$\frac{v_{xmax}}{v_0}$，这就相当于不旋转的轴对称的圆断面自由射流。至于轴心速度 v_m 的变化规律由图可见当$\frac{x}{d}\leqslant 2$ 处，轴心速度$\frac{v_m}{v_0}<0$，$v_m<0$ 是回流区（向喷口方向流动）。当$\frac{x}{d}\geqslant 2$ 以后回流区消失，当$\frac{x}{d}>5$ 以后$\frac{v_m}{v_0}$曲线与$\frac{v_{xmax}}{v_0}$两曲线逐渐接近并重合，回流区消失。此时情况很像圆断面自由射流。

三、旋转射流的压强分布

图 6-13 给出沿$\frac{x}{d}$的无因次静压强$\bar{p}$的变化曲线。

$$\bar{p}=\frac{p_a-p}{\frac{\rho}{2}v_0^2}$$

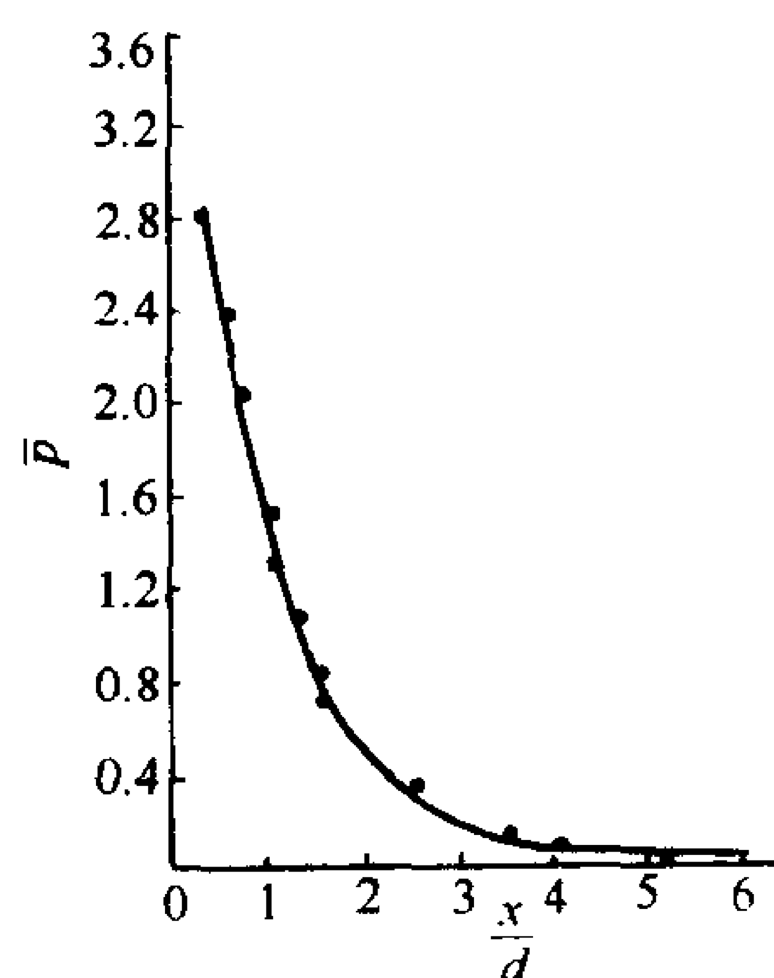


图 6-13　静压图

式中　p_a——大气压强；

p——旋转射流轴线上的静压强；

$\frac{\rho}{2}v_0^2$——出口断面上的动压强。

由图可见，旋流器出口的旋转射流中心压力是低于大气压强的，随着旋转射流沿轴向前流进，静压强 p 越来越接近 p_a，这表明旋转射流中心有很强烈的卷吸能力。

四、旋转强度

旋转射流是由于旋流喷嘴的外射流动形成的，因此旋流喷嘴本身的旋转强度 Ω 可用来表征旋转射流的特性。

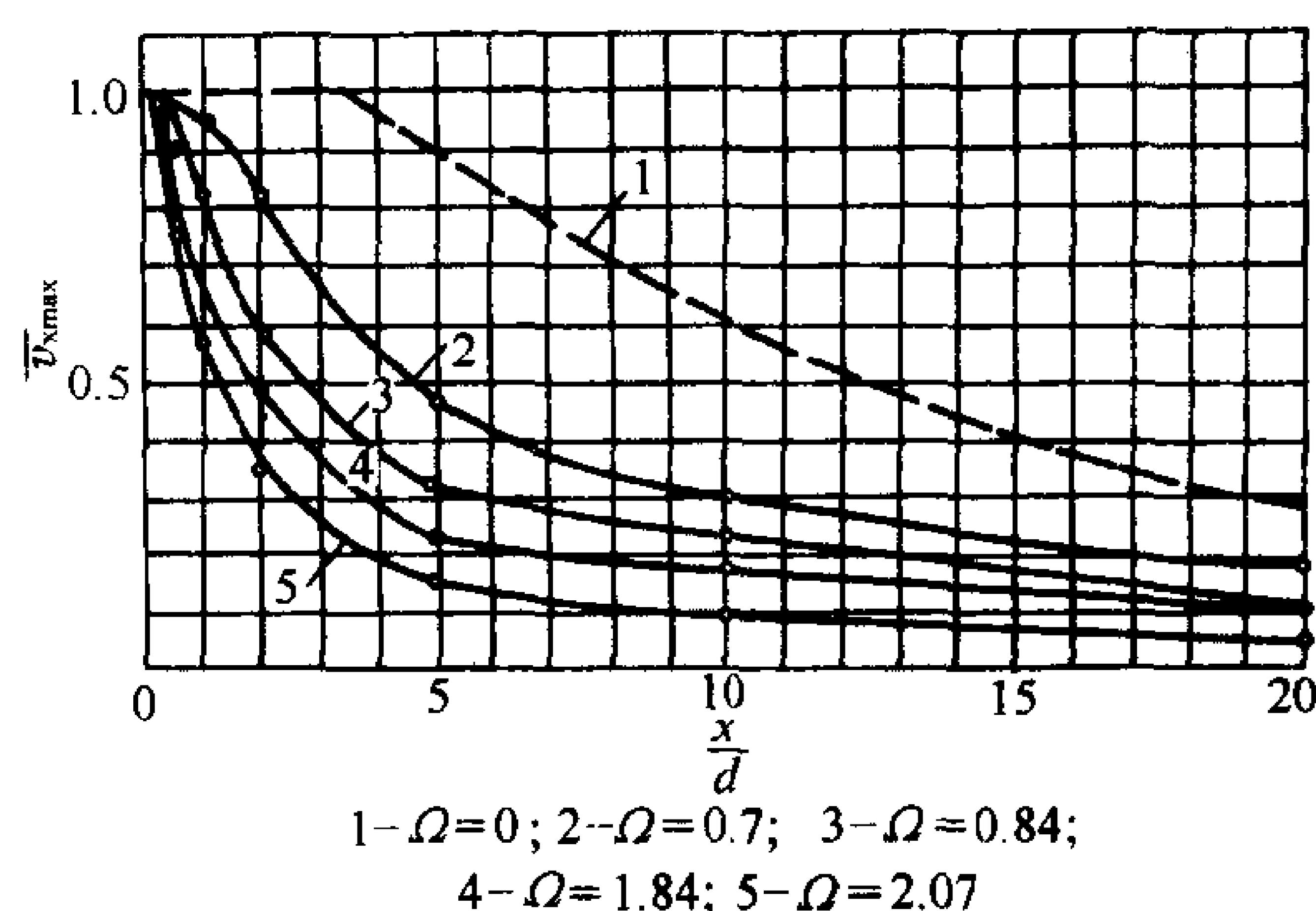
Ω 定义为：

$$\Omega=\frac{L_0}{K_0\frac{d}{4}}$$

式中　L_0——流体进入旋流器时，相对于旋转轴的动量矩；

K_0——旋流器出口断面上的平均动量；

d——旋流器出口断面直径。



1-Ω=0；2-Ω=0.7；3-Ω=0.84；4-Ω=1.84；5-Ω=2.07

图 6-14　不同 Ω 的射流无因次速度沿射流纵轴的变化

Ω 是一个无因次数，可反映产生旋转射流的旋转强弱程度。Ω 值越大，旋转射流的旋转越厉害。即 v_θ 越大，回流区就越大，射流扩散角也越大，射程就越短。图 6-14 中比较了不同 Ω 的射流的无因次速度 $\bar{v}_{xmax}=\frac{v_{xmax}}{v_0}$ 沿射流轴向的变化情况。曲线 1 为 $\Omega=0$ 的自由射流，曲线 2（$\Omega=0.7$）至曲线 5（$\Omega=2.07$）说明随 Ω 值增大，射流速度衰减越快，射程越短。Ω 值越大，表明旋转射流与周围介质进行混掺的能力越强，这正是旋转射流的特点之一。

图 6-15 是在不同的 Ω 值下，无因次流量$\frac{Q}{Q_0}$变化曲线。其中 Q_0 为喷口出口断面上流量，Q 为沿射流纵轴 x 所在截面流量。

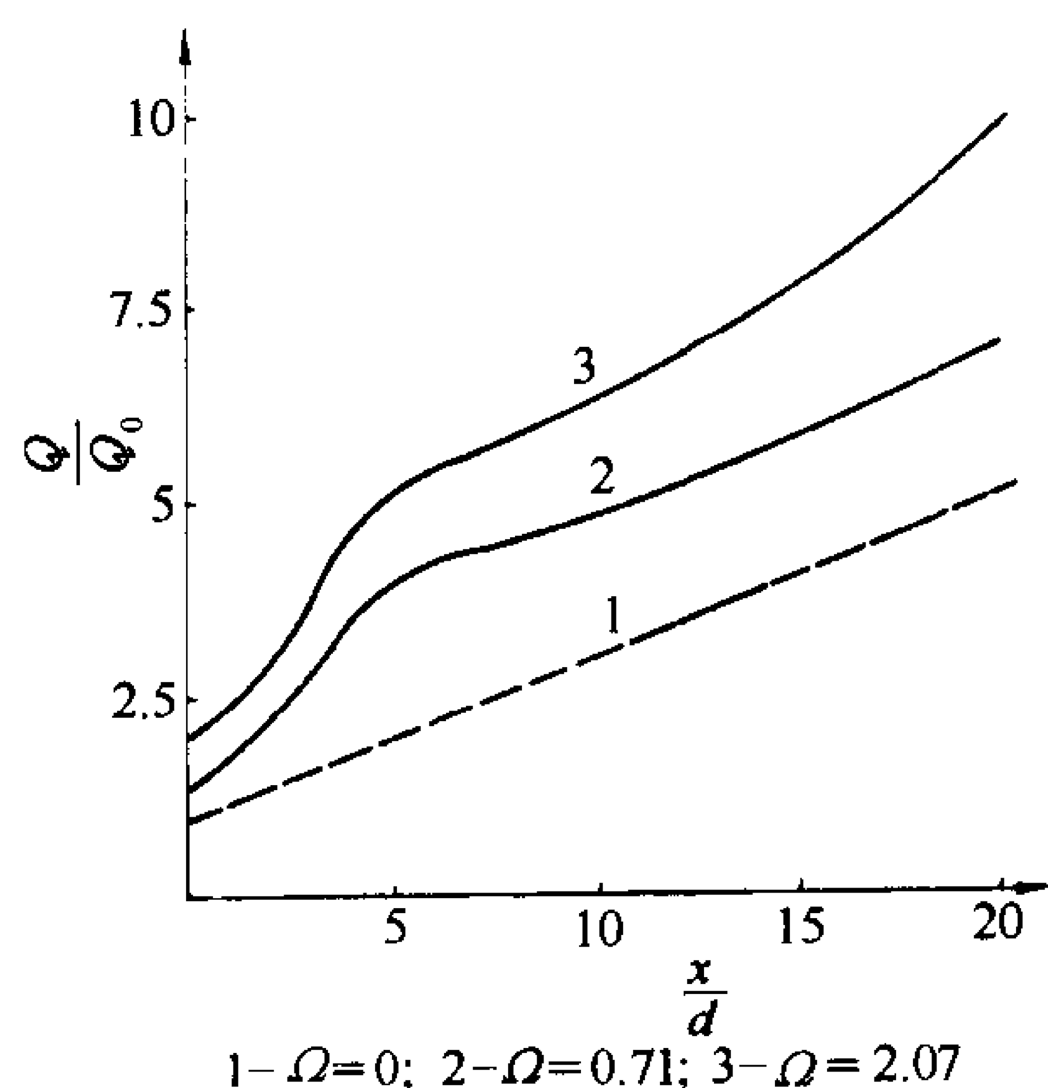


图 6-15 不同 Ω 的射流无因次流量沿射流纵轴的变化

从图中可见，Ω 值越大，旋转射流卷吸周围介质的能力越强烈，特别在 $\frac{x}{d}\leqslant 5$ 范围内，$\frac{Q}{Q_0}$ 增长速度特快。因为在这个区段中，v_θ、v_r 较大，使得旋转射流扩散卷吸，进行动量交换的能力加强，从而使 $\frac{Q}{Q_0}$ 增长迅速。又可根据 Ω 值的大小，将旋转射流划分为强旋流及弱旋流两种。强旋流有较长的回流区及较大回流速度。弱旋流不出现回流区，轴向速度都为正，只是存在一段低速区。

五、无因次流量 Q/Q_0 及 Q_h/Q_0

计算旋转射流沿轴无因次流量 Q/Q_0 的经验公式为

$$Q/Q_0 = 1 + 0.5\Omega + 0.207(1+\Omega)\frac{x}{d} \quad (6\text{-}5\text{-}1)$$

Q_h 为回流流量，定义为：

$$Q_h = 2\pi\int_0^{r_h} r v_x \mathrm{d}r \quad (6\text{-}5\text{-}2)$$

图 6-16 给出了无因次回流流量 $\frac{Q_h}{Q_0}$ 沿 $\frac{x}{d}$ 的变化情况，并对比了不同 Ω 值的回流情况。从图看出：(1) Ω 值大，回流流量显著增加，回流区长度也增长；(2) 无论 Ω 值多大，最大无因次回流流量都出现在 $\frac{x}{d}=0.5$ 处，也就是出现在旋转射流的起始段。

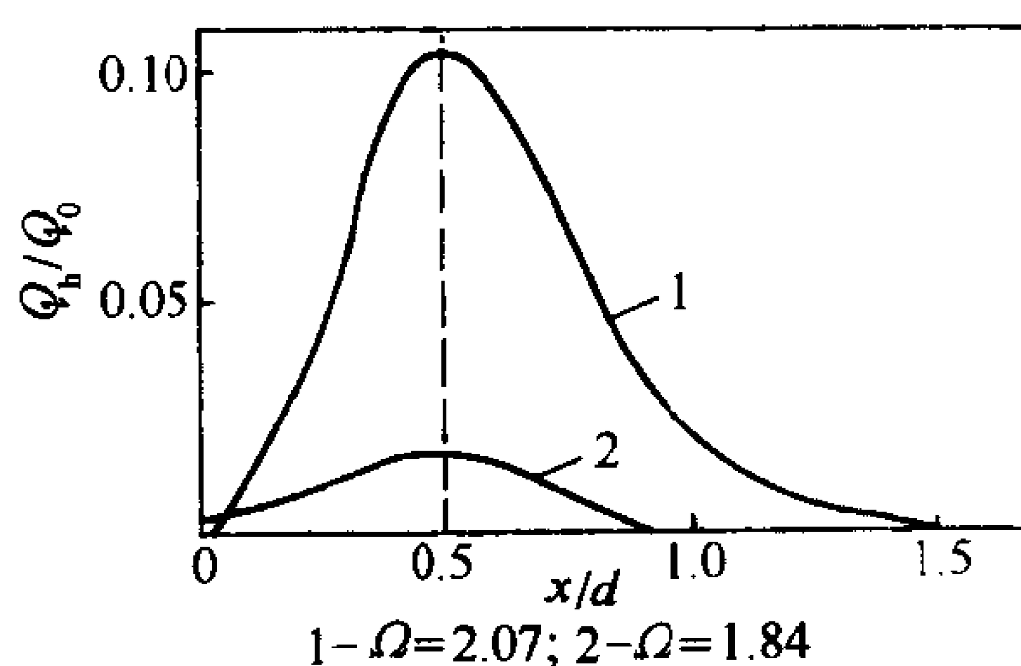


图 6-16 无因次回流流量沿纵轴的变化

由于以上给出的试验曲线及结果是在特定结构旋流喷嘴上所测得的性能情况，对不同结构的旋流喷嘴，只能定性地作为参考，具体数值仍需用试验手段进行研究。

第六节 有限空间射流

实际工程上通风射流是向房间送风，当房间限制了射流的扩散运动，自由射流规律不再适用，因此必须研究受限后的射流即有限空间射流运动规律。目前有限空间射流理论尚不完全成熟，多是根据实验结果整理成近似公式或无因次曲线，供设计使用。

下面仅就末端封闭的有限射流进行介绍。

一、射流结构

由于房间边壁限制了射流边界层的发展扩散，射流半径及流量不是一直增加，增大到一定程度后反而逐渐减小，使其边界线呈橄榄形，如图 6-17 所示。重要的特征是橄榄形的边界外部与固体边壁间形成与射流方向相反的回流区，于是流线呈闭合状。这些闭合流线环绕的中心，就是射流与回流共同形成的旋涡中心 c。

射流出口至断面Ⅰ-Ⅰ,因为固体边壁尚未妨碍射流边界层的扩展,各运动参数所遵循的规律与自由射流一样,计算亦可用自由射流公式。称Ⅰ-Ⅰ断面为第一临界断面,从喷口至Ⅰ-Ⅰ为自由扩张段。

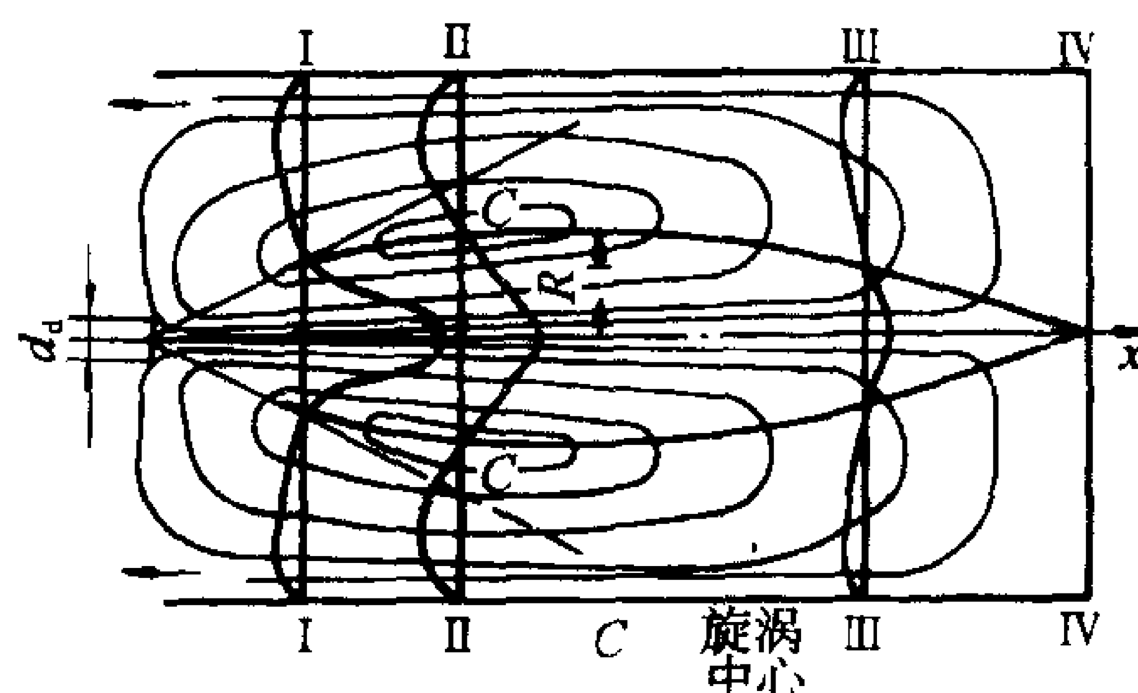


图 6-17 有限空间射流流场

从Ⅰ-Ⅰ断面开始,射流边界层扩展受到影响,卷吸周围气体的作用减弱,因而射流半径和流量的增加速率逐渐减慢,与此同时射流中心速度减小的速率也变慢些。但总的趋势还是半径逐增,流量逐增。达到Ⅱ-Ⅱ断面,即包含旋涡中心的断面,射流各运动参数发生了根本转折,射流流线开始越出边界层产生回流。射流主体流量开始沿程减少。仅在Ⅱ-Ⅱ断面上主体流量为最大值,称Ⅱ-Ⅱ为第二临界断面,从Ⅰ-Ⅰ至Ⅱ-Ⅱ为有限扩张段。

在Ⅱ-Ⅱ断面处实验得知:回流的平均流速、回流流量亦为最大,而射流半径则在Ⅱ-Ⅱ稍后一点达最大值。

从Ⅱ-Ⅱ断面以后,射流主体流量、回流流量、回流平均流速都逐渐减小,直到射流主体流量减至为零Ⅳ-Ⅳ。从Ⅱ-Ⅱ至Ⅳ-Ⅳ为收缩段。

各横截面上速度分布情况,见图 6-17Ⅰ-Ⅰ、Ⅱ-Ⅱ、Ⅲ-Ⅲ上速度曲线图。橄榄形边界内部为射流主体的速度分布线,外部是回流的速度分布线。

射流结构与喷嘴安装的位置有关。如喷嘴安置在房间高度、宽度的中央处,射流结构上下对称,左右对称。射流主体呈橄榄状,四周为回流区。但实际送风时多将喷嘴靠近顶棚安置,如安置高度 h 与房高 H 为 $h \geqslant 0.7H$ 时,射流出现贴附现象,整个贴附于顶棚上,而回流区全部集中射流主体下部与地面间。称这种射流为贴附射流。贴附现象的产生是由于靠近顶棚流速增大静压减小,而射流下部静压大,上下压差致使射流不得脱离顶棚。

贴附射流可以看成完整射流的一半,规律相同。

二、动力特征

由实验知道,射流内部的压强是变化的,随射程的增大,压强增大,直至端头压强最大。达稳定后数值比周围大气压强要高些。这样射流中各横截面上动量是不相等的,沿程减少。在第二临界断面后,动量很快减少以致消失。正是由于动量不守恒,研究起来较自由射流困难多了。

三、半经验公式

有限空间射流主要用在空气调节房间送风上,这时常常要求工作操作区处在射流的回流区中,并限定具体风速值。所以仅介绍回流平均速度 v 的半经验公式:

$$\frac{v}{v_0} \cdot \frac{\sqrt{F}}{d_0} = 0.177(10\bar{x})e^{10.7\bar{x} - 37\bar{x}^2} = f(\bar{x}) \tag{6-6-1}$$

式中 v_0、d_0——喷嘴出口速度、直径;

F——垂直于射流的房间横截面积;

$\bar{x} = \dfrac{ax}{\sqrt{F}}$——射流截面至极点的无因次距离;

a——紊流系数。

在Ⅱ-Ⅱ断面上，回流流速为最大，以 v_1 表示。Ⅱ-Ⅱ断面距喷嘴出口的无因次距离通过实验已得出为 $\bar{x}=0.2$，代入上式得到最大回流速度为：

$$\frac{v_1}{v_0}\cdot\frac{\sqrt{F}}{d_0}=0.69 \tag{6-6-1a}$$

若设计计算中所需射流作用长度（即距离）为 L，则所相应的无因次距离为：

$$\bar{L}=\frac{aL}{\sqrt{F}} \tag{6-6-1b}$$

在设计要求的 L 处，射流回流平均流速为 v_2 是设计所限定的值。将 $\bar{x}=\bar{L}$ 及 v_2 代入式(6-6-1)中得：

$$\frac{v_2}{v_0}\cdot\frac{\sqrt{F}}{d_0}=f(\bar{L}) \tag{6-6-1c}$$

联立(6-6-1a)与(6-6-1c)可得：

$$f(\bar{L})=0.69\frac{v_2}{v_1} \tag{6-6-2}$$

由于 v_1, v_2 是由设计限定，所以 $f(\bar{L})$ 也是可知，故可用(6-6-1)式求出 $\bar{x}=\bar{L}$。为简化计算给出表 6-5。

无因次距离 $\bar{L}$ **表 6-5**

v_1(m/s)	v_2(m/s)					
	0.07	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40
0.50	0.42	0.40	0.37	0.35	0.31	0.28
0.60	0.43	0.41	0.38	0.37	0.33	0.30
0.75	0.44	0.42	0.40	0.38	0.35	0.33
1.00	0.46	0.44	0.42	0.40	0.37	0.35
1.25	0.47	0.46	0.43	0.41	0.39	0.37
1.50	0.48	0.47	0.44	0.43	0.40	0.38

在求出 $\bar{L}$ 后，可用(6-6-1b)式求出 $L=\frac{\bar{L}\sqrt{F}}{a}$。

以上所给公式适用喷嘴高度 $h\geqslant0.7H$ 的贴附射流。当 $h=0.5H$ 时，射流上下对称，向两个方向同时扩散，因此射程较贴附为短，仅是贴附射流的 70%。将上式中 $\sqrt{F}$ 以 $\sqrt{0.5F}$ 代替进行计算，即可得到 $h=0.5H$ 时的射程 L。

【例 6-6】 车间长 70m，高 11.5m，宽 30m。在一端布置送风口及回风口，送风口高为 6m，流量为 10m^3/s。试设计送风口尺寸。

【解】 与射流垂直的房间横截面积 $F=30\times11.5=345\text{m}^2$，限定工作区内空气流速 $v_1=0.5\text{m/s}$；接近末端的射流回流平均速度 $v_2=0.15\text{m/s}$。通过表 6-5 可查出 $\bar{L}=0.37$。

选用带有收缩口的圆喷嘴，查表 6-1 $a=0.07$。

已知送风口高 $h=6\text{m}$，约为 $0.5H$。射程为

$$L=\frac{\bar{L}}{a}\cdot\sqrt{0.5F}=\frac{0.37}{0.07}\sqrt{0.5\times345}=69.4\text{m}$$

也可从 $h=0.5H$ 时，射程仅为贴附射流的 70%计算 L。

$$L=0.7\frac{\bar{L}}{a}\sqrt{F}=0.7\frac{0.37}{0.07}\sqrt{345}=68.73\text{m}$$

说明二者所得结果基本相符。

送风口直径 d_0 可从

$$\begin{cases}\dfrac{v_1}{v_0}\cdot\dfrac{\sqrt{F}}{d_0}=0.69\\[2ex] Q_0=\dfrac{\pi}{4}d_0^2\cdot v_0\end{cases}$$

两式联立求出

$$d_0=\frac{0.69Q_0}{\dfrac{\pi}{4}v_1\sqrt{F}}=\frac{0.69\times10}{0.785\times0.5\times\sqrt{345}}=\frac{6.9}{7.3}=0.945\text{m}$$

四、末端涡流区

从喷嘴出口截面至收缩段终了Ⅳ-Ⅳ截面的射程长度 L_4，可用下列半经验公式计算。

$$\frac{L_4}{d_0}=3.58\frac{\sqrt{F}}{d_0}+\frac{1}{a}\left(0.147\frac{\sqrt{F}}{d_0}-0.133\right)\tag{6-6-3}$$

在房间长度 l 大于 L_4 情况下，实验证明在封闭末端产生涡流区，如图 6-18 所示。涡流区的出现是通风空调工程所不希望的，应当清除。

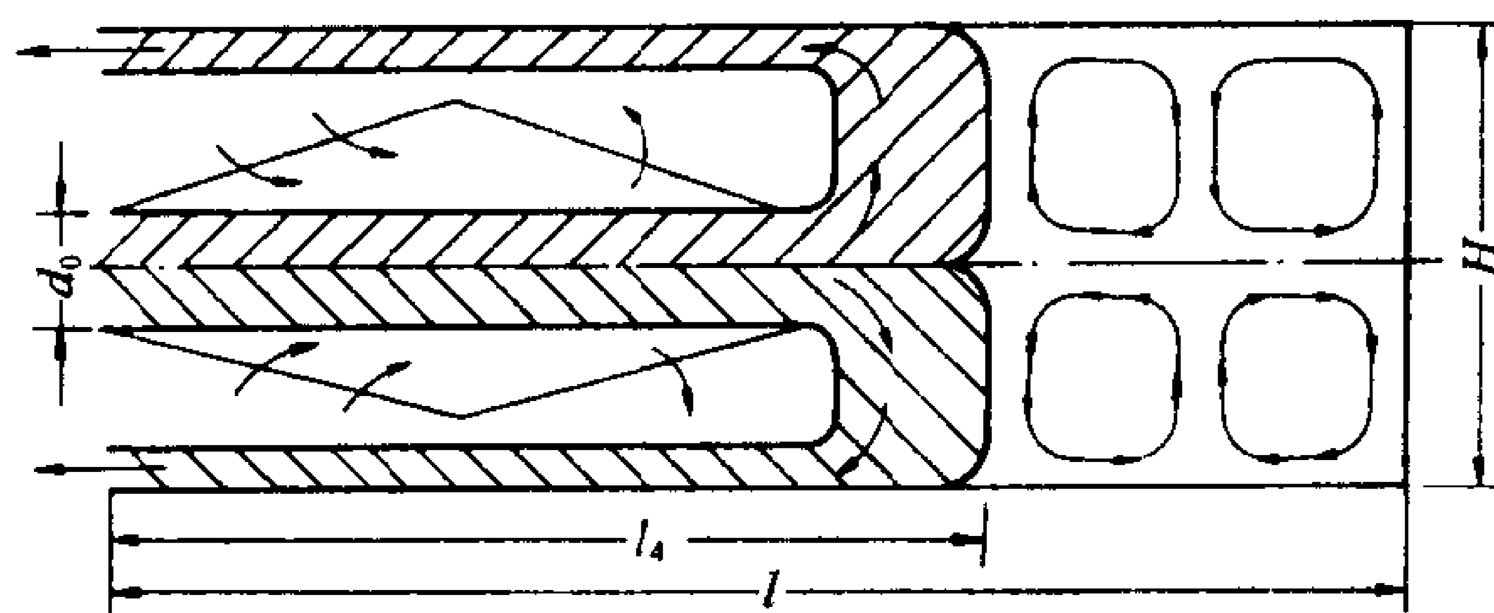


图 6-18 末端产生涡流区

【例 6-7】 条件如例 6-6，试判断有无涡流区出现。

【解】 用(6-6-3)式求 L_4

$$L_4=0.95\left[3.58\frac{\sqrt{345}}{0.95}+\frac{1}{0.07}\left(0.147\frac{\sqrt{345}}{0.95}-0.133\right)\right]=103.7(\text{m})$$

房间长度为 70m 小于 L_4，故不出现涡流区，若房间长度超过 103.7m，仍用带收缩的圆喷嘴，直径为 0.95m，将出现涡流区，此时可采用双侧射流送风等措施，消除涡流区。

习 题

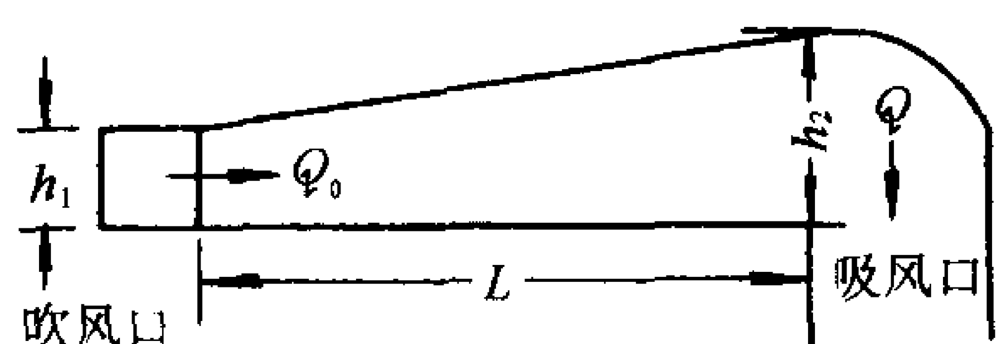
6-1 圆射流以 $Q_0=0.55\text{m}^3/\text{s}$，从 $d_0=0.3\text{m}$ 管嘴流出。试求 2.1m 处射流半宽度 R、轴心速度 v_m、断面平均流速 v_1，质量平均 v_2，并进行比较。

6-2 某体育馆的圆柱形送风口，$d_0=0.6\text{m}$，风口至比赛区为 60m。要求比赛区风速(质量平均风速)不得超过 0.3m/s。求送风口的送风量应不超过多少 m^3/s？

6-3 岗位送风所设风口向下，距地面4m。要求在工作区（距地1.5m高范围）造成直径为1.5m射流截面，限定轴心速度为2m/s，求喷嘴直径及出口流量。

6-4 有一两面收缩均匀的矩形孔口，截面为$0.05\times 2m^2$，出口速度v_0为10m/s。求距孔口2.0m处，射流轴心速度v_m、质量平均速度v_2及流量Q。

6-5 空气以8m/s的速度从圆管喷出，d_0为0.2m，求距出口1.5m处的v_m、v_2及D。



题6-6 图

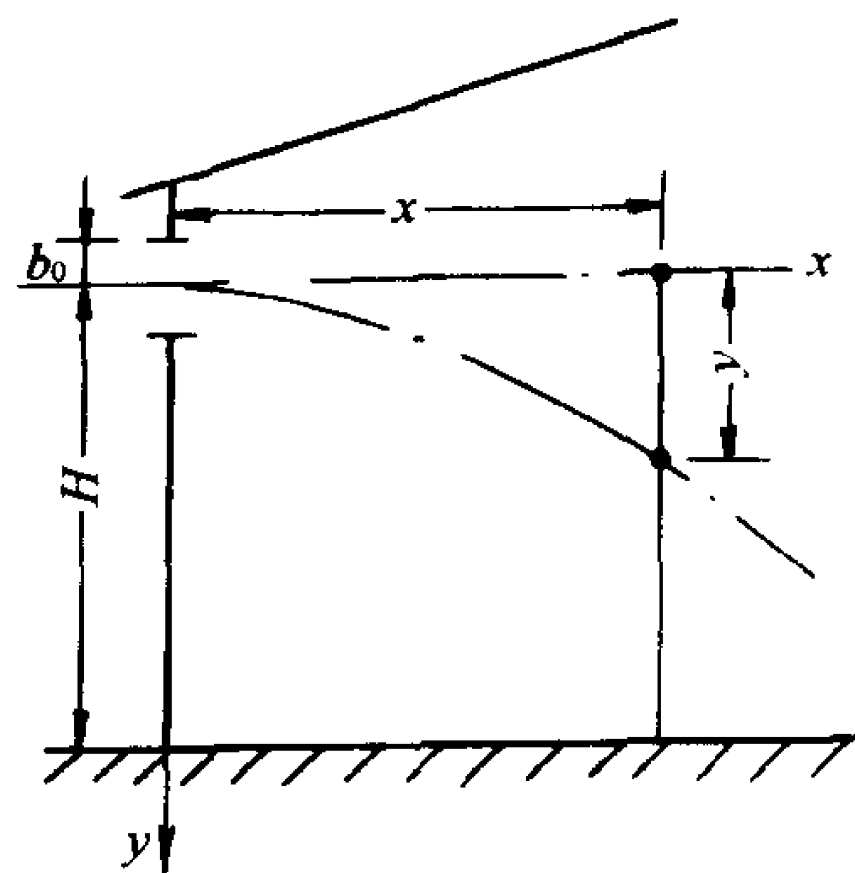
6-6 清扫沉降室中灰尘的吹吸系统如题附图。室长$L=6m$，吹风口高$h_1=15cm$，宽为5m，由于贴附底板，射流相当于半个平面射流。底板即为轴心线。问(1)吸风口高度h_2为多少？(2)若吸风口处速度为4m/s，Q_0应多少？(3)吸风口处的风量应为多少？

6-7 要求空气淋浴地带的宽度$b=1m$。周围空气中有害气体的浓度$H_H=0.06mg/L$。室外空气中浓度$H_0=0$。工作地带允许的浓度为$H_m=0.02mg/L$。今用一平面喷嘴$a=0.2$，试求喷嘴b_0及工作地带距喷嘴的距离s。

6-8 温度为40℃的空气，以$v_0=3m/s$，从$d_0=100mm$水平圆柱形喷嘴射入$t_0=18℃$的空气中。求射流轨迹方程。

6-9 高出地面5m处设一孔口d_0为0.1m，以2m/s速度向房间水平送风。送风温度$t_0=-10℃$，室内温度$t_0=27℃$。试求距出口3m处的v_2、t_2及弯曲轴心坐标。

6-10 室外空气经过墙壁上$H=6m$处的扁平窗口（$b_0=0.3m$）射入室内，室外温度$t_0=0℃$，室内温度$t_0=25℃$。窗口处出口速度为2m/s，问距壁面$s=6m$处，v_2、t_2及冷射流轴心坐标。



题6-10 图

6-11 喷出清洁空气的平面射流，射入含尘浓度为$0.12mg/L$的静止空气中。要求距喷口2m处造成宽度为$2b=1.2m$的射流区。求设计喷口尺寸b_0，并求工作区轴心处灰尘浓度。

6-12 试验测得轴对称射流的$v_0=50m/s$，某断面处$v_m=5m/s$，试求在该断面上气体流量是初始流量的多少倍？

6-13 有一圆形射流，在距出口处10m的地方测得v_m为v_0的50%，试求其圆形喷嘴半径。

6-14 试求距$R_0=0.5m$的圆断面射流出口断面为20m，距轴心距离$y=1m$处的射流速度与出口速度之比值。

6-15 为保证距喷口中心$x=20m$，$y=2m$处的流速$v=5m/s$及初始段长度$S_n=1m$，当$a=0.07$时，试求喷口出口处的初始风量（m^3/h）。

6-16 由$R_0=75mm$的喷口中射出温度为$T_0=300K$的气体射流，周围介质温度为$T_1=290K$，试求距喷口中心$x=5m$，$y=1m$处的气体温度（$a=0.075$）。

6-17 绘制由$R_0=75mm$，$a=0.08$的自由淹没紊流射流结构的几何图。

6-18 为什么用无因次量研究射流运动？

6-19 什么是质量平均流速v_2？为什么要引入这一流速？

6-20 温差射流中，无因次温度分布线为什么在无因次速度线的外边（参看图6-6b）？

6-21 温差射流轨迹为什么弯曲？是怎样寻求轨迹方程的？

6-22 旋转射流与自由淹没射流有哪些不同点？试对比说明。

6-23 旋转强度说明什么物理意义？

6-24 何谓受限射流？受限射流结构图形如何？与自由射流对比有何异同？

第七章　不可压缩流体动力学基础

在前面的章节中，我们主要讨论了理想流体和粘性流体的一元流动，为解决工程实际中大量存在的一元流动问题奠定了理论基础。但是，许多实际流体的流动差不多都是空间的流动，即流场中流体的速度和压力等流动参数在二个或三个坐标轴方向都发生变化。本章论述流体的三元流动，主要内容是有关流体运动的基本概念和基本原理，以及描述不可压缩流体流动的基本方程和定解条件。

前述流体静力学和一元流动的基本方程，即是本章三元流动的基本方程在一元流动特殊条件下的简化结果。因此，学习时，可将本章与第二、三章相联系，次序上也可前后调整。

第一节　流体微团运动的分析

从理论力学知道，刚体的运动可以分解为平移和旋转两种基本运动。流体运动要比刚体运动复杂得多，流体微团基本运动形式有平移运动，旋转运动和变形运动等，而变形运动又包括线变形和角变形两种。

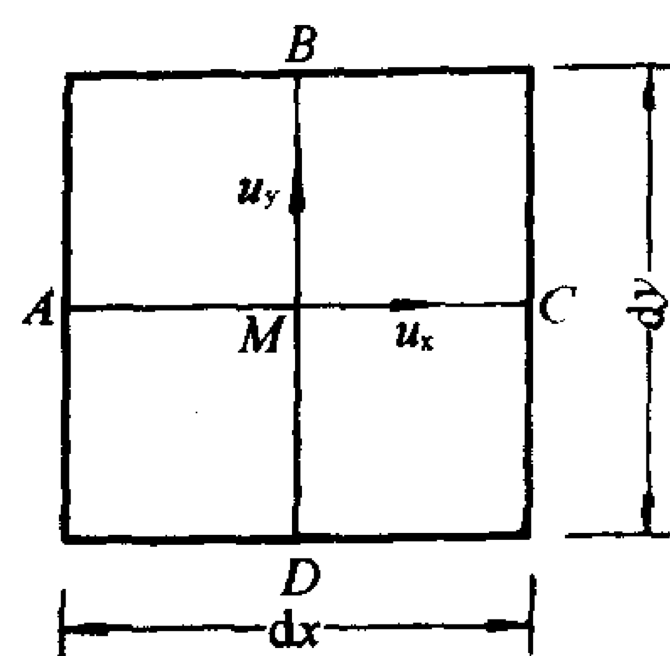


图 7-1　方形流体微团

流体微团的运动形式与微团内各点速度的变化有关。为了便于讨论，先研究二元流动的情况。设方形流体微团中心点 M 的流速分量为 u_x 和 u_y（图 7-1），则微团各侧边的中点 A、B、C、D 的流速分量分别为：

M	A	B	C	D
u_x	$u_x-\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$	$u_x+\frac{\partial u_x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}$	$u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$	$u_x-\frac{\partial u_x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}$
u_y	$u_y-\frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$	$u_y+\frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}$	$u_y+\frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$	$u_y-\frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}$

可见，微团上每一点的速度都包含中心点的速度以及由于坐标位置不同所引起的速度增量两个组成部分。

微团上各点公有的分速度 u_x 和 u_y 使它们在 dt 时间内均沿 x 方向移动一距离 $u_x dt$，沿 y 方向移动一距离 $u_y\cdot dt$。因而，我们把中心点 M 的速度 u_x 和 u_y 定义为流体微团的平移运动速度。

微团左、右两侧的 A 点和 C 点沿 x 方向的速度差为 $\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot dx$，当这速度差值为正时，微团沿 x 方向发生伸长变形；当它为负时，微团沿 x 方向发生缩短变形。单位时间，单位长度的线变形称为线变形速度。以 θ_x 表示流体微团沿 x 方向的线变形速度，则：

$$\theta_x=\frac{\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot dx\cdot dt}{dx\cdot dt}=\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

同理可得沿 y 方向的线变形速度 θ_y：

$$\theta_y=\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

推广到三元流动的普遍情况，则流体微团的线变形速度为：

$$\left.\begin{aligned}\theta_x&=\frac{\partial u_x}{\partial x}\\ \theta_y&=\frac{\partial u_y}{\partial y}\\ \theta_z&=\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{7-1-1}$$

现在研究微团的旋转和角变形。

AMC 线上各点的 y 方向速度分量不相等，C 点相对于 A 点有一 y 方向速度分量的增量 $\frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot dx$。同样，$BMD$ 线上各点的 x 方向速度分量也不相等，B 点相对于 D 点有一 x 方向速度分量的增量 $\frac{\partial u_x}{\partial y}\cdot dy$。因而这两条直线绕中心点 M 发生旋转。同理，通过 M 点的各直线均绕 M 点发生旋转，但各直线的旋转角速度是不相等的。

设流体微团从初始位置 $ABCD$(图 7-2)，经 dt 时间后，由于上述原因运动到 $A''B''C''D''$ 的位置处。这个运动过程可以视为是下述两种基本运动形式的组合过程：先是流体微团绕 M 点作无角变形的旋转运动，微团由 $ABCD$ 位置旋转到 $A'B'C'D'$ 处(图 7-2b)，然后，由于过 M 点各直线的旋转角速度不相等而产生角变形运动，使方形微团变为菱形，最后到达 $A''B''C''D''$ 的位置(图 7-2c)。

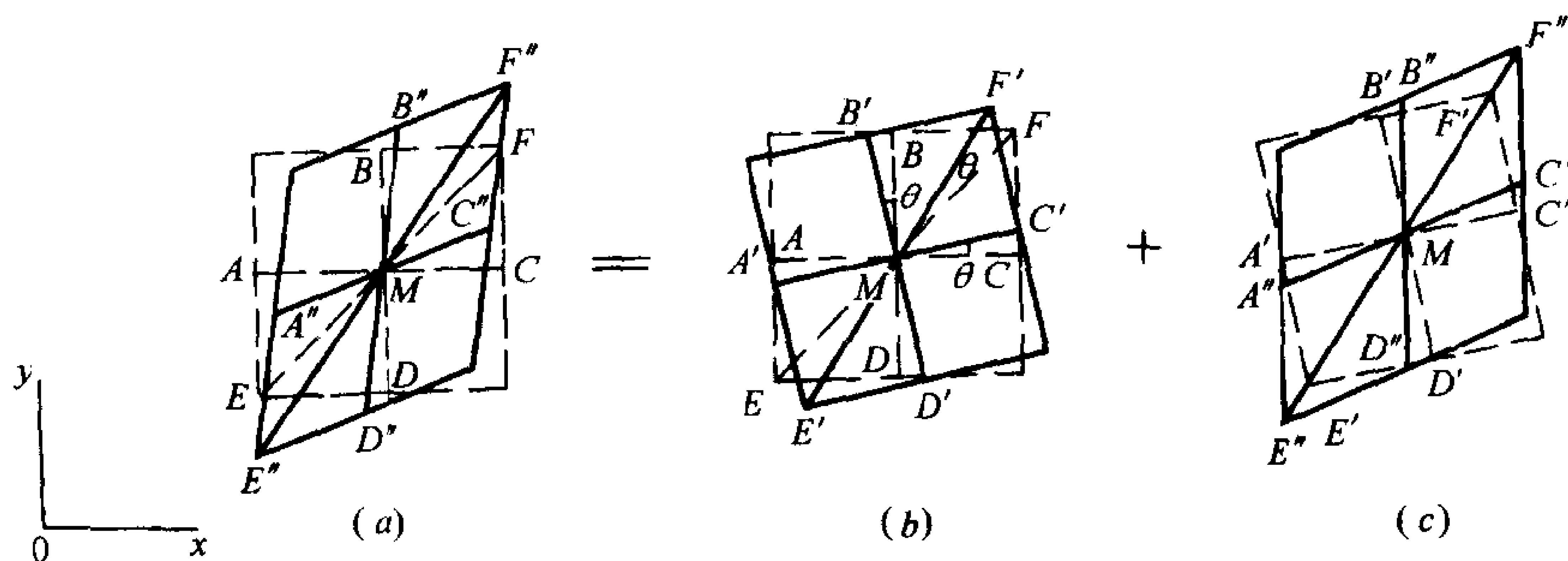


图 7-2 流体微团的旋转运动和角变形运动

设沿逆时针方向旋转为正，则 AMC 线的旋转角速度为

$$\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}}=\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

BMD 线的旋转角速度为 $-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}$。对角线 EMF 的旋转角速度是这两条直角边的旋转角速度的平均，记为 ω_z。

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

我们把对角线 EMF 的旋转角速度定义为整个流体微团在 oxy 平面上的旋转角速度。推广到三元流动的情况，可得流体微团的旋转角速度分量为：

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \omega_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\\ \omega_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7-1-2}$$

因而角速度矢量为：

$$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$$

角速度的大小为：

$$\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}$$

角速度矢量的方向规定为沿微团的旋转方向按右手定则确定。

我们把直角边 AMC（或 BMD 边）与对角线 EMF 的夹角的变形速度定义为流体微团的角变形速度，并记为 ε_z，因而

$$\begin{aligned}\varepsilon_z&=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\omega_z=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

对于三元流动，流体微团的角变形速度为：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\\ \varepsilon_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7-1-3}$$

ε 的下标表示发生角变形的所在平面的法线方向。

在一般情况下，流体微团的运动是由上述四种基本运动形式复合而成的。设流体微团内某点 $M_0(x,y,z)$ 的流速分量为 u_{x0}、u_{y0}、u_{z0}（图 7-3），邻近于 M_0 点的另一点 $M(x+dx、y+dy、z+dz)$ 的流速分量为

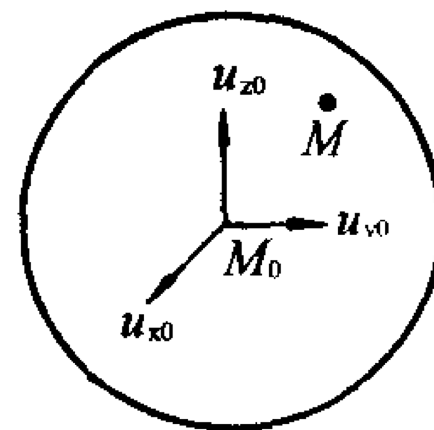


图 7-3　质点流速的分解

$$u_x=u_{x0}+du_x$$

$$u_y=u_{y0}+du_y$$

$$u_z = u_{z0} + du_z$$

将速度增量 du_x 按泰勒级数展开：

$$du_x = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{M0} dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{M0} dy + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)_{M0} dz$$

于是，M 点的流速分量 u_x 又可写为：

$$u_x = u_{x0} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{M0} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{M0} dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{M0} dy$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_{M0} dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_{M0} dz$$

将(7-1-1)式，(7-1-2)式和(7-1-3)式代入上式中得：

$$u_x = u_{x0} + \theta_x dx - \omega_z dy + \varepsilon_z dy + \omega_y dz + \varepsilon_y dz$$

同理可写出其余两个速度分量的表达式。因此，M 点的速度可以表达为：

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_{x0} - \omega_z dy + \omega_y dz + \theta_x dx + \varepsilon_z dy + \varepsilon_y dz \\ u_y &= u_{y0} - \omega_x dz + \omega_z dx + \theta_y dy + \varepsilon_x dz + \varepsilon_z dx \\ u_z &= u_{z0} - \omega_y dx + \omega_x dy + \theta_z dz + \varepsilon_y dx + \varepsilon_x dy \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}1\text{-}4)$$

上列三式中，右边第一项为平移速度，第二、三项是微团的旋转运动所产生的速度增量，第四项和第五、六项分别为线变形运动和角变形运动所引起的速度增量。可见，流体微团的运动可以分解为平移运动，旋转运动，线变形运动和角变形运动之和。这就是亥姆霍兹速度分解定理。

【例 7-1】 已知流速分布(1) $u_x = -ky, u_y = +kx, u_z = 0$，(2) $u_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, u_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}, u_z = 0$ 求旋转角速度、线变形速度和角变形速度。

【解】 (1) 当 $u_x = -ky, u_y = kx$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -k \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = k$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}(k+k) = k \quad \omega_y = \omega_x = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}(k-k) = 0 \quad \varepsilon_y = \varepsilon_x = 0$$

$$\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$$

表示这种流动是以角速度 k 旋转的运动。由于不存在变形速度，流体像固体那样旋转。第三章中讲述的流线方程

$$-\frac{dx}{ky} = \frac{dy}{kx}, \qquad k(xdx + ydy) = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

为圆周簇。

(2) 当 $u_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \quad u_y = \dfrac{x}{x^2+y^2} \quad u_z = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\omega_z=0 \quad \omega_y=\omega_x=0$$

$$\varepsilon_z=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \varepsilon_x=\varepsilon_y=0$$

$$\theta_x=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \theta_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \theta_z=0$$

第二节 有 旋 流 动

流体微团的旋转角速度在流场内不完全为零的流动称为有旋流动。自然界和工程中出现的流动大多数是有旋流动,例如大气中的龙卷风,管道中的流体运动,绕流物体表面的边界层及其尾部后面的流动都是有旋流动。

设流体微团的旋转角速度为 $\vec{\omega}(x,y,z,t)$,则

$$\vec{\Omega}=2\vec{\omega}=\Omega_x\vec{i}+\Omega_y\vec{j}+\Omega_z\vec{k} \tag{7-2-1}$$

称为涡量,其中 Ω_x、Ω_y 和 Ω_z 是涡量 $\vec{\Omega}$在 x、y、z 坐标上的投影。由定义可知:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_x&=\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\\ \Omega_y&=\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\\ \Omega_z&=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{7-2-2}$$

显然,涡量是空间坐标和时间的矢性函数:$\vec{\Omega}=\vec{\Omega}(x,y,z,t)$。所以,它也构成一个向量场,称为涡量场。

由于哈米尔顿算子∇是一矢性微分算子。

$$\nabla\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

所以

$$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{u} \tag{7-2-3}$$

从而

$$\nabla\cdot\vec{\Omega}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})=0 \tag{7-2-4}$$

或

$$\frac{\partial\Omega_x}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_y}{\partial y}+\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}=0 \tag{7-2-5}$$

上式称为涡量连续性微分方程。

在涡量场中可以画出表征某一瞬时流体质点的旋转角速度向量方向的曲线，称为涡线。在给定的瞬时，涡线上各点的角速度向量在该点处与涡线相切。沿涡线取一微小线段 ds，由于涡线与角速度向量的方向一致，所以，ds 沿三个坐标轴方向的分量 dx、dy、dz 必然和角速度向量的三个分量 ω_x、ω_y、ω_z 成正比，即：

$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z} \tag{7-2-6}$$

这就是涡线的微分方程。

【例 7-2】 当 x 坐标选在管轴时，管中层流运动的流速函数证明为

$$u_y=u_z=0 \qquad u_x=\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2-r^2)$$
$$=\frac{\gamma J}{4\mu}[r_0^2-(y^2+z^2)]$$

求涡线微分方程。

【解】 角速度分量

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$$
$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=-\frac{\gamma J}{4\mu}z$$
$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{\gamma J}{4\mu}y$$

涡线微分方程

$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}$$

代入角速度分量

$$\frac{dy}{-\frac{\gamma J}{4\mu}z}=\frac{dz}{\frac{\gamma J}{4\mu}y}$$
$$ydy+zdz=0$$
$$z^2+y^2=C$$

涡线是和管轴同轴的同心圆。

在涡量场中任意画一封闭曲线，通过这条曲线上的每一点所作出的涡线构成一管状的曲面，称为涡管。若曲线无限小，则称为微元涡管。

设 A 为涡量场中一开口曲面，微元面 dA 的外法线单位向量为 $\vec{n}$，涡量在 $\vec{n}$ 方向上的投影为 Ω_n，则面积分

$$J=\int_A\vec{\Omega}\cdot d\vec{A}=\int_A\Omega_n dA$$
$$=\int_A\Omega_x dydz+\Omega_y dzdx+\Omega_z dxdy \tag{7-2-7}$$

称为涡通量。

有旋流动的一个重要的运动学性质是：在同一瞬间，通过同一涡管的各截面的涡通量相

等。这一性质可用下式表示：

$$\int_{A_1}\Omega_n dA = \int_{A_2}\Omega_n dA \tag{7-2-8}$$

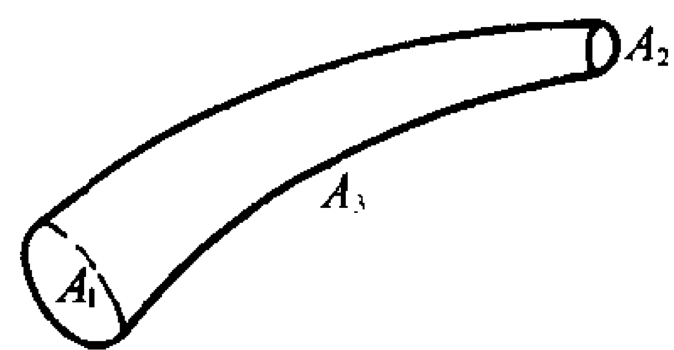


图 7-4 涡管段

证明如下：

在某一瞬时取一涡管段如图 7-4 所示。这段涡管的表面面积 A 包括截面 A_1, A_2 和侧面 A_3 三部分。因而，通过这一封闭曲面的涡通量为

$$J = \int_A \vec{\Omega}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1}\vec{\Omega}\cdot d\vec{A} + \int_{A_2}\vec{\Omega}\cdot d\vec{A} + \int_{A_3}\vec{\Omega}\cdot d\vec{A}$$

根据涡管的定义，涡线总是垂直于涡管的法线，因此上式右边第三项为零；在截面 A_1 上涡量向量与截面的外法线方向相反。因此，上式可整理为：

$$J = -\int_{A_1}\Omega_n dA + \int_{A_2}\Omega_n dA$$

运用高斯公式和(7-2-4)式得

$$\int_A \vec{\Omega}\cdot d\vec{A} = \int_V \nabla\cdot\vec{\Omega}dV = 0$$

式中，V 是封闭曲面 A 所包围的体积。因此得

$$-\int_{A_1}\Omega_n dA + \int_{A_2}\Omega_n dA = 0$$

此式即(7-2-8)式，证毕。

对于微元涡管，可以近似地认为截面上各点的涡量为常数，因而由(7-2-8)式得：

$$\Omega_1 A_1 = \Omega_2 A_2$$

或

$$\omega_1 A_1 = \omega_2 A_2 \tag{7-2-9}$$

由上式可见，微元涡管截面愈小的地方，流体的旋转角速度愈大。由于流体的旋转角速度不可能为无穷大，所以涡管截面不可能收缩为零。也就是说，涡管不可能在流体内部开始或终止，而只能在流体中自行封闭成涡环，或者终止于和开始于边界面，例如自然界中的龙卷风开始于地面，终止于云层。

由上文可见，对于有旋流动，其流动空间既是速度场，又是涡量场。涡量场中的涡线，涡管，涡通量等概念分别与流速场中的流线，流管，流量等概念相对应，而涡线方程和涡管的涡通量方程则分别与流线方程和元流连续性方程相对应。

通常，涡通量是利用速度环量这个概念来计算的。在流场中任取一封闭曲线 s，则流速沿曲线 s 的积分

$$\Gamma = \oint_s \vec{u}\cdot\vec{d}s = \oint_s u_x dx + u_y dy + u_z dz \tag{7-2-10}$$

称为曲线 s 上的速度环量。并规定积分沿 s 逆时针方向绕行为 $\vec{s}$ 的正方向。

(一) 斯托克斯定理

根据斯托克斯公式：

$$\oint_s u_x dx + u_y dy + u_z dz = \int_A \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)dydz\right.$$

$$+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]$$

或写为：

$$\oint_s \vec{u}\cdot\vec{d}s=\int_A \Omega_x\mathrm{d}A_x+\Omega_y\mathrm{d}A_y+\Omega_z\mathrm{d}A_z$$

$$=\int_A \Omega_n\mathrm{d}A \tag{7-2-11}$$

式中，s 为流场中任意封闭曲线；A 是曲线 s 所围成的曲面；$\vec{n}$ 是曲面 A 的外法线单位向量。

公式(7-2-11)称为斯托克斯定理，定理给出了速度环量和涡通量之间的关系，即：沿任意封闭曲线 s 的速度环量等于通过以该曲线为边界的曲面 A 的涡通量：

$$\Gamma_s=J_A \tag{7-2-11a}$$

【例 7-3】 已知不可压缩流体流场中的速度分布为：$u_x=a\sqrt{z^2+y^2}$，$u_y=u_z=0$。求沿封闭曲线 $x^2+y^2=b^2$，$z=0$ 的速度环量。其中 a、b 是常数。

【解】 由所给定的封闭曲线方程可知该曲线是在 $z=0$ 的平面上的圆周线。在 $z=0$ 的平面上速度分布为：

$$u_x=ay$$

$$u_y=u_z=0$$

涡量分布为

$$\Omega_x=\Omega_y=0$$

$$\Omega_z=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=-a$$

根据斯托克斯定理得：

$$\Gamma_s=\int_A \Omega_z\mathrm{d}A_z=-\pi ab^2$$

（二）汤姆逊定理

汤姆逊定理指出：在理想流体的涡量场中，如果质量力具有单值的势函数，那么，沿由流体质点所组成的封闭曲线的速度环量不随时间而变，即

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=0 \tag{7-2-12}$$

推论：根据斯托克斯定理，沿曲线 s 的速度环量等于通过以 s 为边界的曲面的涡通量。因此，速度环量不随时间变化亦意味着涡通量不随时间而变。所以，质量力具有单值势函数的理想流体的流动，如果在某一时刻是有旋流动，那么，在以前和以后也是有旋流动；如果在某一时刻是无旋流动，那么，在以前和以后也是无旋流动。也就是说，这种流体的涡旋具有不生、不灭的性质。

第三节　不可压缩流体连续性微分方程

和一元流连续性方程相似，三元流连续性微分方程的推导，是在流场中选取边长为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 的矩形微元控制体，写出流出和流入该空间的质量流量平衡条件。由于流体不可压

缩，质量流量平衡条件可用体积流量平衡条件来代替，即在 dt 时间内流出和流入微元控制体的净流体体积为零。

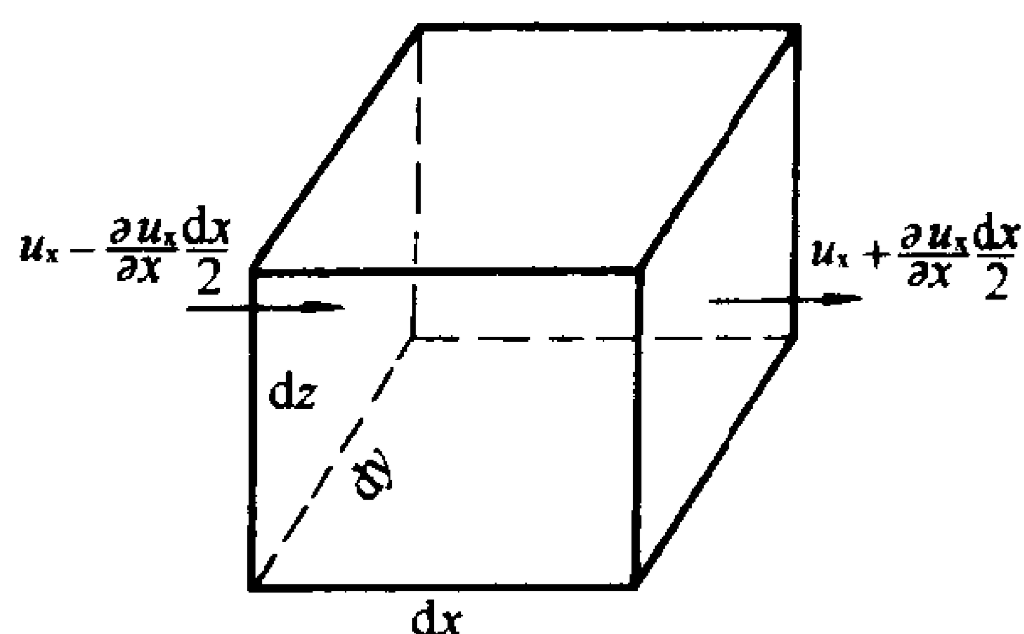


图 7-5　微元控制体的流量平衡

设控制体中心点的坐标为$(x、y、z)$，中心点的速度为 $u_x、u_y、u_z$。则控制体左侧面中心点沿 x 方向的流速为$u_x-\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$，右侧面中心点沿 x 方向的流速为 $u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$。因而，在 dt 时间内，沿 x 方向流出和流入微元控制体的净流体体积为：

$$\left(u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dy\cdot dz\cdot dt-\left(u_x-\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dy\cdot dz\cdot dt$$

$$=\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot dt$$

同理，在 dt 时间内沿 $y、z$ 方向流出和流入微元控制体的净流体体积分别为：

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot dt$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z}dx\cdot dy\cdot dz\cdot dt$$

根据不可压缩流体连续性条件，dt 时间内沿 $x、y、z$ 方向流出和流入微元控制体的净流体体积之和应为零，即：

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot dt=0$$

因而

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{7-3-1}$$

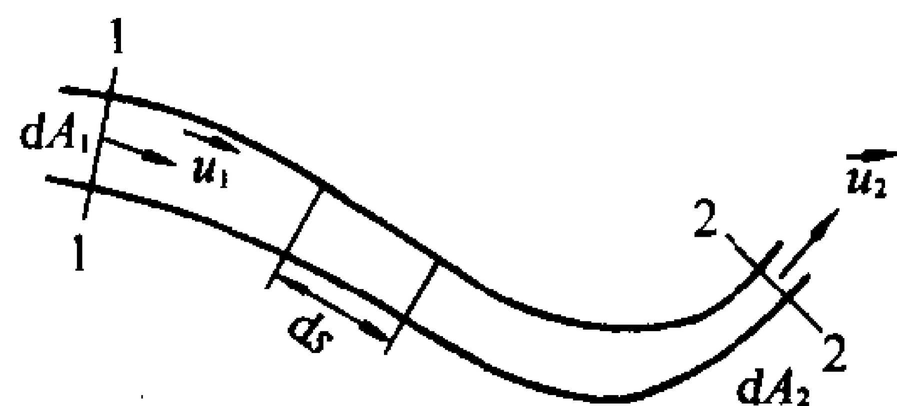


图 7-6　微小流束的流量平衡

这就是不可压缩流体的连续性微分方程。这个方程对恒定流和非恒定流都适用。

对于如图 7-6 所示的一元流动，单位时间内流进和流出微小段 ds 内的流体体积之和为：

$$u\cdot dA-\left(u+\frac{\partial u}{\partial s}\cdot ds\right)\cdot\left(dA+\frac{\partial(dA)}{\partial s}\cdot ds\right)=0$$

略去高阶微项后，上式简化为：

$$\frac{\partial(u\cdot dA)}{\partial s}=0$$

因此得：

$$u\cdot dA=\text{常量} \tag{7-3-2}$$

或写为：

$$u_1\cdot dA_1=u_2\cdot dA_2$$

上式即为一元流动的连续性方程(3-5-7)式。

【例 7-4】 管中流体作均匀流动,是否满足连续性方程。

【解】 管中流体作均匀流动,$u_y=u_z=0$,沿 x 方向流速不变,说明 u_x 与 x 无关,它只能是 y、z 的函数,$u_x=f(y,z)$,则

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{\partial f(y,z)}{\partial x}+0+0=0$$

因此满足连续性方程。即是,在均匀流条件下,不管断面流速如何分布,均满足连续性条件。

【例 7-5】 试证流速为(1) $u_x=-ky,u_y=kx,u_z=0$;(2) $u_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2},u_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $u_z=0$ 的流动满足连续性条件。

【解】

(1) $u_x=-ky \quad u_y=kx \quad u_z=0$

$$\therefore \quad \frac{\partial u_x}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

$$则 \quad \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

(2) $u_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2},u_y=\dfrac{x}{x^2+y^2},u_z=0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$则 \quad \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

两种流动均满足连续性条件。

在专业流体力学问题中,主要是旋转运动的分析中,采用柱面坐标的形式更为方便。用相似于直角坐标系下的推导方法,可得不可压缩流体柱面坐标形式的连续性方程如下:

$$\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{7-3-3}$$

【例 7-6】 将例 7-5 中的流速函数(1) $u_x=-ky,u_y=kx,u_z=0$;(2) $u_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2},u_y=\dfrac{x}{x^2+y^2},u_z=0$ 写为柱面坐标的形式,并检查是否满足连续性条件。

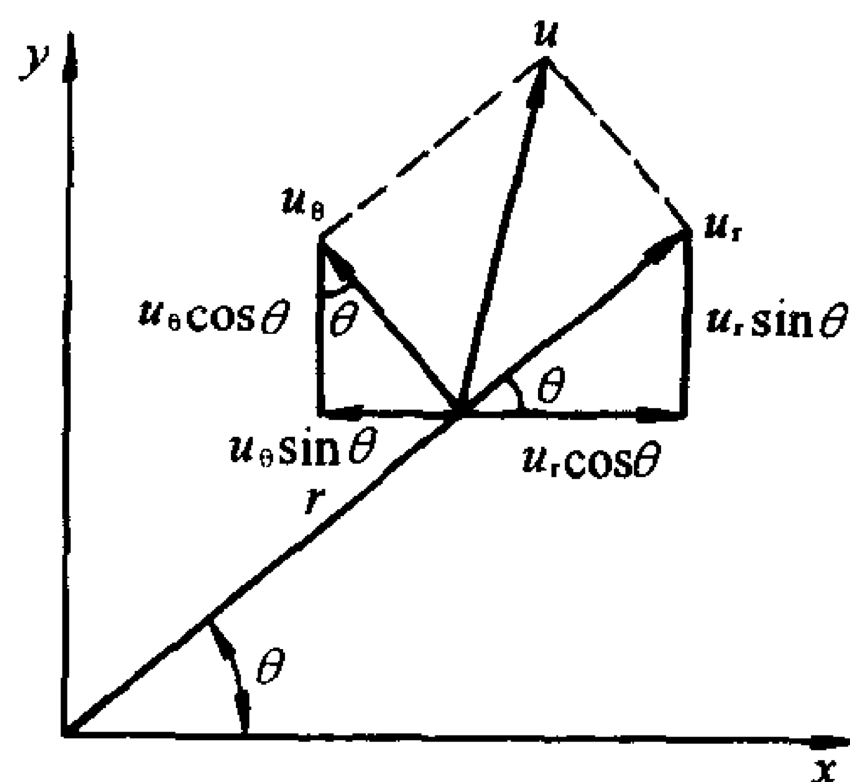


图 7-7 直角坐标和柱面坐标关系式

【解】 直角坐标和柱面坐发标的相互换算关系,参见图 7-7,以下列诸式表之

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$$

$$u_x=u_r\cos\theta-u_\theta\sin\theta$$

$$u_y=u_r\sin\theta+u_\theta\cos\theta$$

(1) 代入 $u_x=-ky,u_y=+kx \quad u_z=0$

$$u_r\cos\theta-u_\theta\sin\theta=-kr\sin\theta$$

$$u_r\sin\theta+u_\theta\cos\theta=kr\cos\theta$$

简化得出

$$u_{\theta}=kr \quad u_{r}=0$$

代入连续性方程(7-3-3)

$$\frac{\partial u_{\theta}}{r\partial\theta}=\frac{\partial}{r\partial\theta}(kr)=0$$

满足连续性方程

(2) 代入 $u_{x}=-\frac{y}{x^{2}+y^{2}}, u_{y}=\frac{x}{x^{2}+y^{2}}, u_{z}=0$

$$u_{r}\cos\theta-u_{\theta}\sin\theta=-\frac{\sin\theta}{r}$$

$$u_{r}\sin\theta+u_{\theta}\cos\theta=\frac{\cos\theta}{r}$$

简化得出

$$u_{\theta}=\frac{1}{r} \quad u_{r}=0 \quad u_{z}=0$$

代入连续性方程(7-3-3)

$$\frac{\partial u_{\theta}}{r\partial\theta}=\frac{\partial}{r\partial\theta}\cdot\frac{1}{r}=0$$

同样满足连续性方程。

第四节　以应力表示的粘性流体运动微分方程式

一、粘性流体的内应力

粘性流体在运动时,表面力不仅有法向应力,还有切向应力。因此粘性流体的表面力不垂直于作用面。如在任一点取一微小正六面体,如图 7-8,作用在平面 ABCD 的应力有法向应力 p_{xx} 与切向应力 τ_{xy} 和 τ_{xz}。应力符号的第一个脚标表示作用面的外法线方向,第二个脚标表示应力方向。可以证明,流场内任一点的应力状况,即该点流体微团在任一方向的作用面上的应力,都可用通过该点的三个相互垂直的作用面上的九个应力分量

$$\begin{matrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz} \end{matrix}$$

来表示。

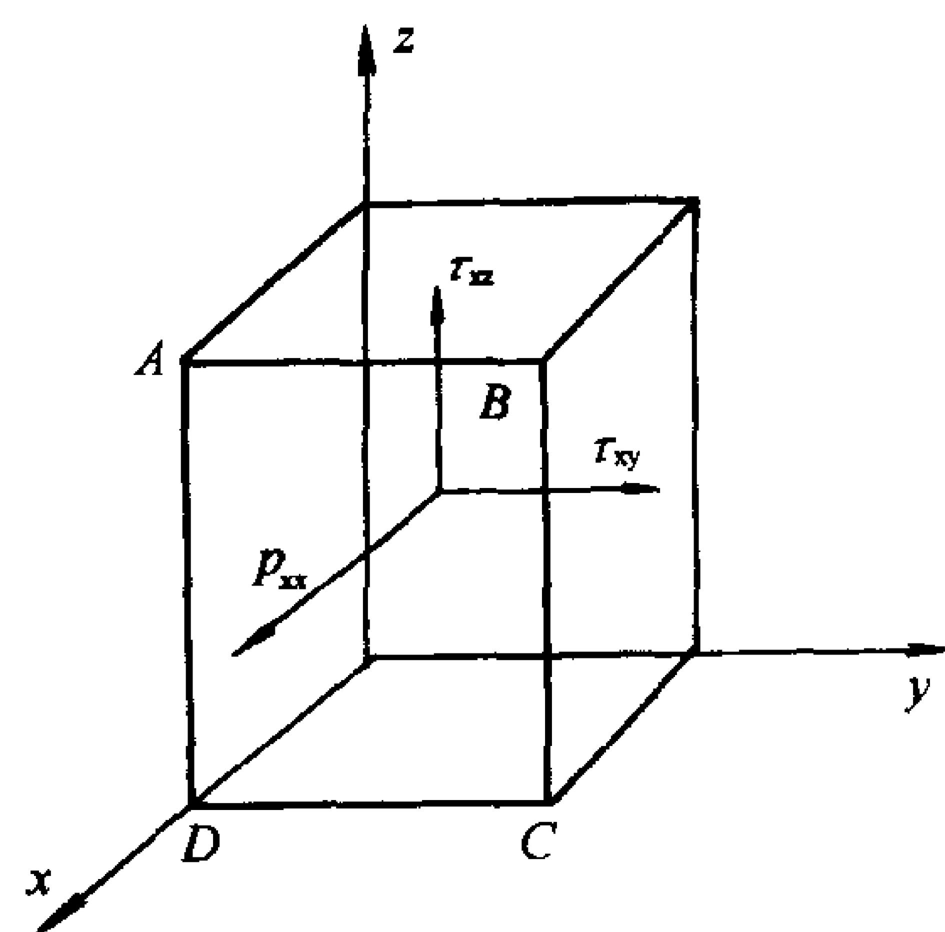


图 7-8　应力的符号

二、以应力表示的运动微分方程

在粘性流体中取一边长为 dx, dy, dz 的长方体,见图 7-9。各表面应力的方向如图所示。为清晰起见,其中两个面上的应力符号未标,读者可自行写出。注意的是各应力的值均为代数值,正值表示应力沿相应坐标轴的正向,反之亦然。由于流体不能承受拉力,因此 p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 必为负值。由牛顿第二定律,x 方向的运动微分方程如下:

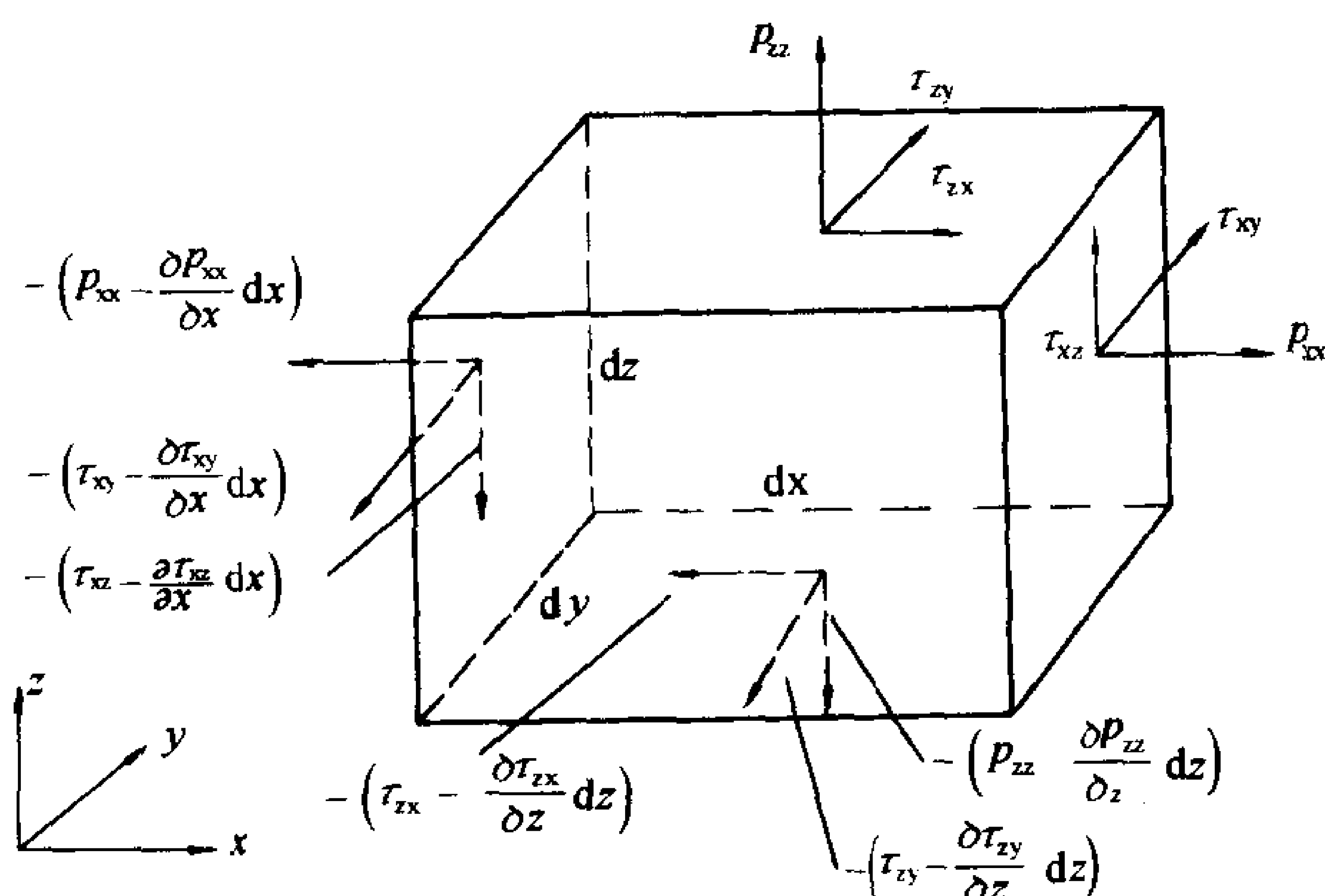


图 7-9　表面应力示意图

$$\rho X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+p_{xx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[-\left(p_{xx}-\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]+\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left[-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right.$$

$$\left.\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right]+\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left[-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}$$

化简后，得

$$X+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}$$

同理可得

$$\left.\begin{aligned}Y+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)=\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\\Z+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)=\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}4\text{-}1)$$

这就是以应力表示的粘性流体运动微分方程式。式中密度 ρ 对于不可压缩流体是已知常量，通常单位质量力 X、Y、Z 也是已知量。九个应力和三个速度分量是未知量。式(7-4-1)中的三个方程加上连续性方程共四个方程，不足以解这十二个未知量，需要补充关系式，使方程组封闭，这些封闭条件就是连续介质力学中所谓的本构方程，即下一节所述的应力和变形速度的关系式。在实用上，测量流动流体承受的应力是困难的，因此希望将未知量中的应力用较易测量的速度分量替代。

第五节　应力和变形速度的关系

一、切应力和角应变速度的关系

一元流动的牛顿内摩擦定律为：

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

式中，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$为流速梯度，第一章中已讨论，流速梯度就是直角变形速度，即

$$\frac{du}{dy}=\frac{d\theta}{dt}$$

所以牛顿内摩擦定律也可写为

$$\tau=\mu\frac{d\theta}{dt}$$

这一结论也可推广到三元流动。在讨论流体微团运动时,已经给出了角变形速度的表达式,$\frac{d\theta}{dt}$是直角变形速度,它是角变形速度的2倍,在 xoy 平面上:

$$\frac{d\theta}{dt}=2\epsilon_z=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

因此对于三元流动的牛顿内摩擦定律,可以写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\\ \tau_{zy}=\tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7-5-1}$$

这里两个相互垂直面上的切应力互等是很自然的。因为他们的角变形速度相同。

式(7-5-1)中六个切应力均可用粘性系数和直角变形速度的乘积来表示,这样,就使(7-4-1)式中的十二个未知数消去了六个。

二、法向应力和线变形速度的关系

在理想流体中,同一点各方向的法向应力相等,即 $p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p,p\geqslant0$。在粘性流体中,粘性不仅产生与切应力有关的角变形速度,而且使线变形速度$\frac{\partial u_x}{\partial x}$、$\frac{\partial u_y}{\partial y}$、$\frac{\partial u_z}{\partial z}$也产生附加的法向应力。使一点的法向应力与作用面方位有关。

为什么线变形速度能产生附加的法向应力呢?我们取边长 $dx=dy$ 的方块流体微团来加以论证。为了简化论证步骤,我们对每一个线变形速度单独考虑,然后叠加。设微团只有沿 x、y 方向的线变形,因而在 AB 和 AD 面上只有法向应力作用。现在先考虑方块微团只有 x 方向的伸长变形。

微团在 x 方向作伸长变形时,BC 伸长为 BC',而对角线 AC 旋转至 AC',使 $\theta(=45°)$ 产生角变形 $d\theta$,粘性流体角变形与切应力相联系,因而必然在 AC 面上产生切应力 τ_n,如图7-10所示。这样线变形速度$\frac{\partial u_x}{\partial x}$产生的 τ_n 必然由其它附加力加以平衡(图中的 τ_{xx} 和 p_n。在 AB 面上不会有附加切应力,不然 AB 就要旋转了),这就是 AB 面上产生附加法向应力 τ_{xx} 的由来。

列 τ_n 方向力的平衡方程:

$$\tau_{xx}\cdot dx\cos45°=\tau_n\sqrt{2}dx$$

因此

$$\tau_{xx}=2\tau_n\tag{7-5-2}$$

现在分析 τ_n 的大小。作 CE 垂直于 AC',因为 $d\theta$ 很小,可认为$\angle AC'B\approx45°$,则

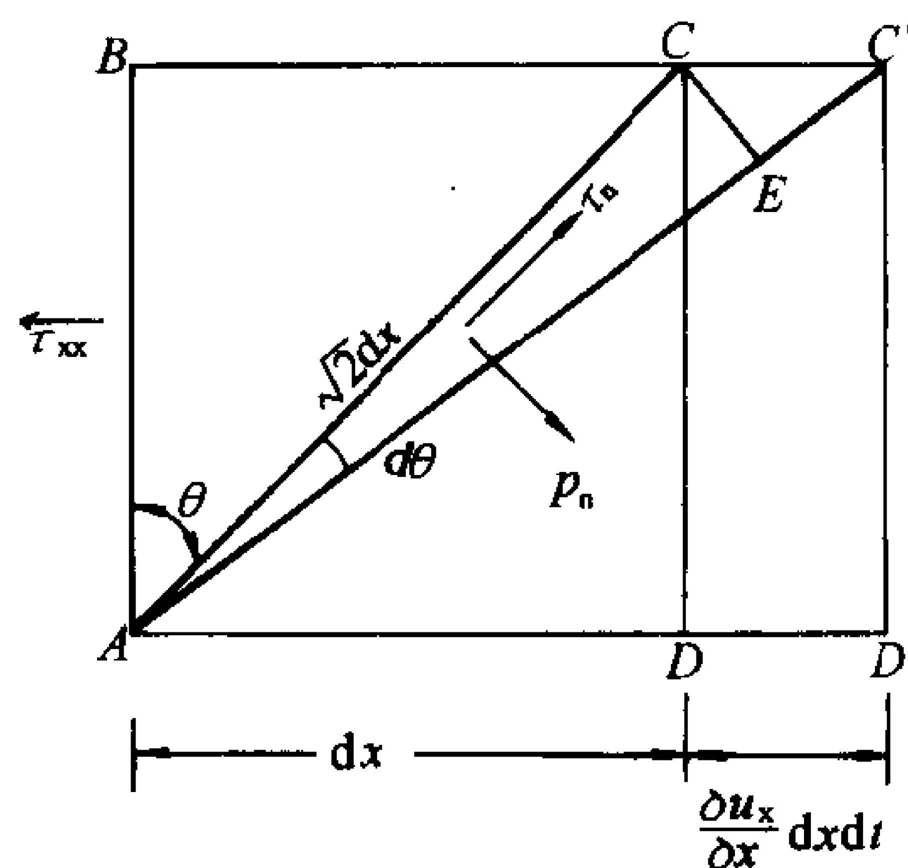


图 7-10　线变形速度产生附加法向应力

$$d\theta = \sin d\theta = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CC'}\sin 45^\circ}{\sqrt{2}\quad dx}$$

式中$\overline{CC'} = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx dt$

代入并化简后可得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

由于 $d\theta$ 是 45°角的角变形速度，直角变形速度应是它的两倍，因此：

$$\tau_n = 2\mu\frac{d\theta}{dt} = \mu\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

代入(7-5-2)式，则可得附加法向应力和线变形速度的关系：

同理

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\\ \tau_{yy} &= 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\\ \tau_{zz} &= 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{7-5-3}$$

线变形运动使法向应力随伸长变形而减小。于是

$$\left.\begin{aligned}p_{xx} &= -p_t + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\\ p_{yy} &= -p_t + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\\ p_{zz} &= -p_t + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{7-5-4}$$

这就是粘性流体法向应力和线变形速度的关系。式中 p_t 为理想流体的压强，$p_t \geqslant 0$，它的大小与作用面方位无关。在粘性流体中，任意一点三个相互垂直方向的法向应力一般是不等的，我们定义过任意一点三个互相垂直平面上的法向应力的平均值的负值为粘性流体在该点的压强。

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = p_t - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \tag{7-5-5}$$

对于不可压缩流体，有

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

因此 $p=p_t$

对于可压缩流体来说，$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$是表征质点的体积膨胀率，显然，它与坐标选择无关，因而压强 p 是空间坐标的函数，与方向无关。

将(7-5-5)式代入(7-5-4)式，消去 p_t 即可得

$$\left.\begin{aligned}p_{xx}&=-p+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\p_{yy}&=-p+2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\p_{zz}&=-p+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7-5-6}$$

有了(7-5-6)式，三个法向应力变换为一个压强函数 p。进一步减少了两个变量，这样方程(7-4-1)的未知数减为四个，与方程的个数相等，所以原则上讲已可求解了。

(7-5-1)式和(7-5-6)式统称为广义牛顿公式

对于均匀流，设 $u_x=u(y、z)$，$u_y=u_z=0$，流速沿流线是常数，故

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

则由式(7-5-4)可得

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p_t$$

这说明粘性流体均匀流动时，任意一点平行于水流方向的法向应力 p_{xx}与垂直于水流方向的法向应力 p_{yy}和 p_{zz}相等。但这里 x、y、z 方向不是任取的，所以不能说压强与作用面的方向无关。

了解以上这些结论，对于压强的量测和流体力学问题的分析是有益的。

第六节　纳维——斯托克斯方程

将(7-5-1)式和(7-5-6)式代入(7-4-1)式，就可将(7-4-1)式中的应力消去。以其第一式为例得

$$X+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[-p+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}$$

整理得

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}$$

对于不可压缩流体$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$，代入得

$$
\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)=\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)=\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}6\text{-}1)
$$

同理可得

这就是不可压缩粘性流体的运动微分方程，一般通称为纳维——斯托克斯方程。是不可压缩流体最普遍的运动微分方程。

以上三式加上不可压缩流体的连续性方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

共四个方程，原则上可以求解方程组中的四个未知量：流速分量 u_x,u_y,u_z 和压强 p。求解速度分量和压强只需从连续性方程和运动方程出发，而不必与能量方程联立，这是不可压缩流体流动求解的一大特点。

由于速度是空间坐标 x,y,z 和时间 t 的函数，(7-6-1)式中的加速度项可以展开为四项，例如

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\qquad(7\text{-}6\text{-}2)$$

要注意的是在流速分量 u_x 对时间 t 求全微分时，指的是某一任取的流体质点的速度对时间的微分，因此就是加速度，此时 $u_x=u_x(x,y,z,t)=u_x[x(t),y(t),z(t),t]$。这种描述方法是拉格朗日法，故函数中的变量 x,y 和 z 指的是该质点在运动过程中的位置坐标，因此是时间 t 的函数，并非独立变量。而(7-6-2)式右端的四项中的各量又是独立变量 x,y,z 和 t 的函数，是欧拉描述方法了。这样，(7-6-2)式就完成了对加速度分量 $\mathrm{d}u_x/\mathrm{d}t$ 的描述由拉格朗日法到欧拉法的转换。

式中右边第一项表示空间固定点的流速随时间的变化（对时间的偏导数），称为时变加速度或当地加速度，后三项表示固定质点的流速由于位置的变化而引起的速度变化，称为位变加速度。例如第二项 $u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}$：$\frac{\partial u_x}{\partial x}$表示在同一时刻由于在 x 方向上位置不同引起的单位长度上速度的变化，u_x 是流体质点在单位时间内在 x 方向上位置变化，因此两者乘积 $u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}$表示流体质点的流速分量 u_x 在单位时间内单纯由于在 x 方向上的位移所产生的速度变化。

时变加速度和位变加速度之和又称为流速的随体导数。这种将随体导数（物理量对时间的全微商）分解成时变导数和位变导数的方法对流体质点所具有的物理量（矢量或标量）均适用。

这样，纳维——斯托克斯方程又可写成

$$\left.\begin{aligned}
&X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\
&Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\
&Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{7-6-3}$$

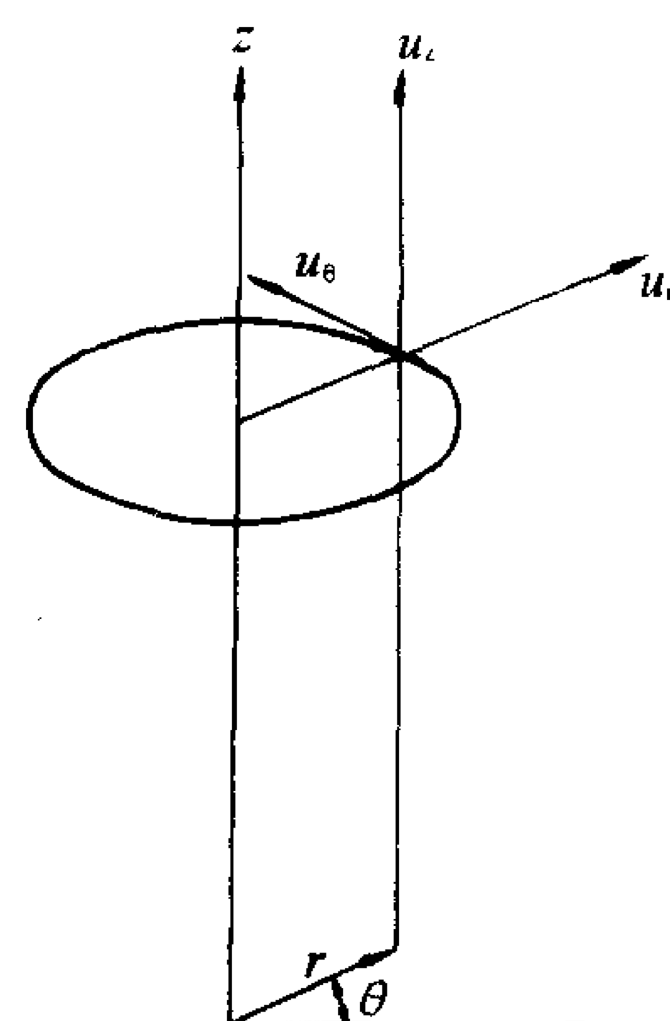


图 7-11　圆柱坐标系

在求解许多实际问题时，用圆柱坐标系(r,θ,z)更为方便，现将圆柱坐标系(图 7-11)的纳维——斯托克斯方程列出如下，以便于应用。

$$\left.\begin{aligned}
&F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta\partial u_r}{r\,\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\\
&F_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\cdot\partial \theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta\partial u_\theta}{r\,\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\\
&F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta\partial u_z}{r\,\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{7-6-4}$$

式中 F_r、F_θ、F_z 为单位质量力在三个坐标轴(r、θ、z)的分量。不可压缩流体的连续性方程(7-3-3)式是

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial_z}=0$$

法向应力和切向应力分别为

$$\left.\begin{aligned}
p_{rr} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\\
p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right)\\
p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\\
\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\\
\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} &= \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)\\
\tau_{zr} = \tau_{rz} &= \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7-6-5}$$

从数学上看，纳维——斯托克斯方程是二阶非线性非齐次的偏微分方程组，对于大多数较复杂的不可压缩粘性流体的流动问题，难以用该方程求出精确解。目前只能对一些简单的流动问题，例如圆管中的层流，平行平面间的层流以及同心圆环间的层流等，才能求得精确解。近代计算技术的迅速发展，电子计算机的广泛应用，已能够用纳维——斯托克斯方程求解出许多复杂流动问题的近似解。

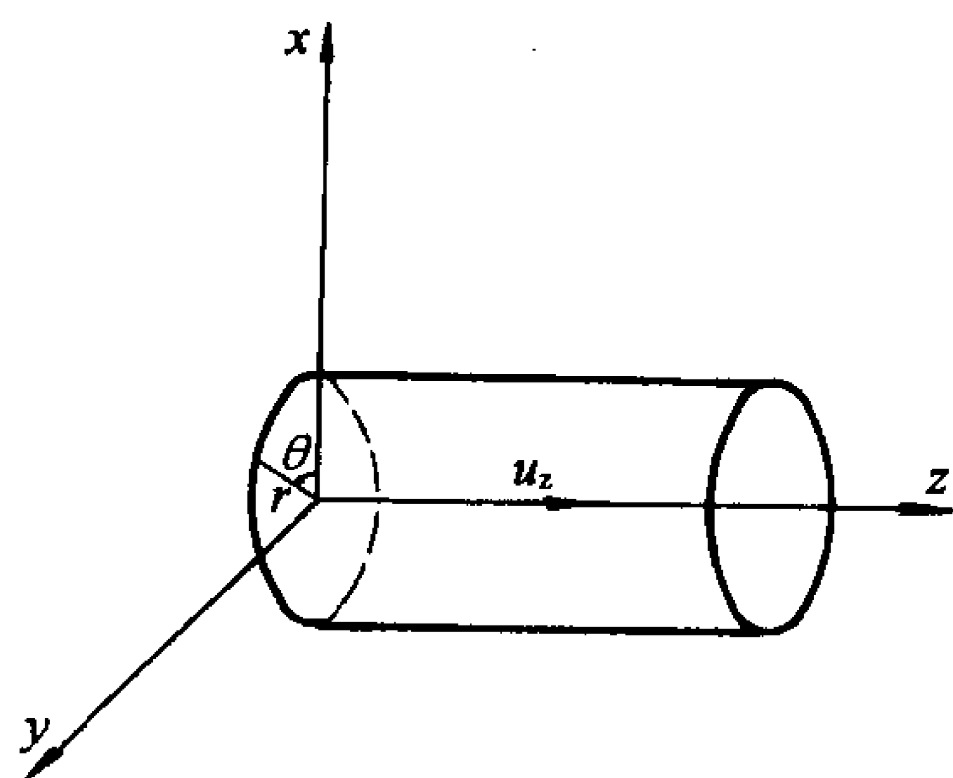


图 7-12 圆管层流

【例 7-7】 试用纳维——斯托克斯方程求圆管层流运动的流速分布。

由于流动轴对称，采用柱坐标系，如图 7-12 所示。已知 $u_z=u(r,\theta,z)$，$u_\theta=u_r=0$。

取(7-6-4)式中第三式

$$F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)$$
$$=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta \partial u_z}{r\,\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

由于是均匀流动，u_z 与坐标 z 无关，流动对称，故 u_z 不随 θ 而变，于是 $u_z=u(r、\theta、z)=u(r)$。质量力 $F_z=0$，流动恒定，$\partial u_z/\partial t=0$，综上条件，此式可简化为

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\mu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)$$

由于 u 与 z 无关，因此上式左端也将与 z 无关，即$\frac{\partial p}{\partial z}$沿 z 方向是常数，设

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{p_1-p_2}{L}=-\frac{\Delta p}{L}=-\gamma J$$

式中 J——水力坡度；

γ——容重。

等式右端加负号是由于压强沿流动方向是下降的。这样

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{\gamma J}{\mu}$$

对上式积分一次得

$$r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=-\frac{\gamma J}{\mu}\frac{r^2}{2}+c$$

再积分一次得

$$u=-\frac{\gamma J}{4\mu}r^2+c_1L_nr+c_2$$

当 $r=0$ 时,$L_nr\rightarrow\infty$,而 u 为有限值,则 $c_1=0$,又由边界条件:$r=r_0,u=0$,可得

$$c_2=\frac{\gamma J}{4\mu}r_0^{\,2}$$

于是有圆管中层流流动的速度分布

$$u=\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^{\,2}-r^2)$$

第七节　理想流体运动微分方程及其积分

当流体为理想流体时,运动粘性系数 $\nu=0$,纳维——斯托克斯方程(7-6-3)式简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{7-7-1}$$

这就是理想不可压缩流体的运动微分方程。第三章中的元流能量方程等均可由此式积分导得。

如果流体处于静止状态,$u_x=u_y=u_z=0$,则(7-7-1)式简化为

$$\begin{cases}X-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\ Y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\ Z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0\end{cases}$$

此即欧拉平衡方程—流体平衡微分方程(2-7-1a)式。

现在我们把理想流体运动微分方程(7-7-1)进行变换,成为包含旋转角速度项的形式。为此,在方程中第一式的加速度项加 $\pm u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial x}$,$\pm u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial x}$之后,整理为

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)+u_y\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)+u_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

可以看出,第一括号可以转变为

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

而第二、三两个括号为

$$u_y\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)+u_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=2(\omega_y u_z-\omega_z u_y)$$

这样,全方程可写为

$$\left.\begin{aligned}X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=2(\omega_y u_z-\omega_z u_y)\\ Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)=2(\omega_z u_x-\omega_x u_z)\\ Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)=2(\omega_x u_y-\omega_y u_x)\end{aligned}\right\}\tag{7-7-2}$$

现在,考虑上式在恒定流条件下的能量积分。此时,$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_z}{\partial t}=0$,并设质量力有势函数 W,方程式转化为:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=2\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=2\begin{vmatrix}u_z & u_x\\ \omega_z & \omega_x\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=2\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ \omega_x & \omega_y\end{vmatrix}$$

为了对这个方程进行能量积分,将三式分别乘以 dx、dy、dz,表示力作的功。并相加,使右项成为全微分:

$$d\left(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=2\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}dx+2\begin{vmatrix}u_z & u_x\\ \omega_z & \omega_x\end{vmatrix}dy+2\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ \omega_x & \omega_y\end{vmatrix}dz$$

即

$$d\left(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=2\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ u_x & u_y & u_z\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}\tag{7-7-3}$$

我们先研究方程左项中

$$-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}$$

质量力仅为重力 $W=-gz$ 的条件下

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}$$

或

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}$$

这就是我们熟知的断面单位总能量。当

$$d\left(gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=0 \tag{1}$$

则积分得

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{const}$$

或

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=\text{const}$$

就得出理想流体恒定流能量方程式。

从(7-7-3)式看出，满足下列条件：

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}=0$$

才能得到理想流体恒定流能量方程式。根据行列式性质，只有任一行全等于零，或任两行成比例，行列式的值才等于零。

现在讨论这样的条件：

(1) $u_x=0, u_y=0, u_z=0$。流体静止

在整个静止流体空间，$z+\frac{p}{\gamma}=\text{const}$。此式即为静压强分布公式(2-2-4)式。

(2) $\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}$

这是流线方程式。适合这个条件的各点在同一流线上，在同一流线上各流体质点的总水头值相等，不同流线有不同的总水头值。例如圆筒内盛水，使圆筒绕筒轴旋转。筒内水流的流线形成封闭的圆周。每一流线满足理想流体能量方程，但不同流线总能量不相同。

第三章中所述的元流断面无限小，元流的极限即是流线，因此流线上成立的能量方程即是理想不可压缩流体恒定流的元流能量方程(3-6-3)式。考虑粘性的影响，以及对流动损失和动能作平均化处理后，得到总流能量方程(3-8-3)式。

其它条件还有

(3) $\omega_x=0,\ \omega_y=0,\ \omega_z=0$

这是无旋条件，在无旋流的空间各点，处处满足能量方程，也即流场内各点的总能量相同。

(4) $\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}$

这是涡线方程式。所谓涡线，如本章第二节所述，是有旋流中一系列线，在线上的一切流体质点，均以此线为轴而旋转。上述水在绕轴旋转的圆筒中，每一铅直线都是涡线。在每一涡线上满足理想流体能量方程。

(5) $\frac{\omega_x}{u_x}=\frac{\omega_y}{u_y}=\frac{\omega_z}{u_z}=k$

则 $\omega_x=ku_x, \omega_y=ku_y, \omega_z=ku_z$，而涡线方程为

$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}$$

代入得

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x}=\frac{\mathrm{d}y}{u_y}=\frac{\mathrm{d}z}{u_z}$$

即流线方程。说明螺旋流动是涡线和流线相重合的流动，即流动中各质点沿某方向流动，同时以此方向线为轴而旋转。在螺旋流动中，全部流动均满足理想流体能量方程。

第八节　流体流动的初始条件和边界条件

粘性流体的基本方程是二阶偏微分方程，联系高等数学中的微分方程知识，对于某一特定流动，在建立求解的数学模型时，除了根据流动的特点对一般性的基本方程进行简化外，必须同时确定方程的定解条件，也就是流动的初始条件和边界条件。目前，计算流体力学已广泛地应用于解决工程中的流动问题，如何正确合理地给出初始条件和边界条件对于解的正确性和唯一性等尤为重要。但是初始条件和边界条件是有赖于具体的流动的，因此，我们仅介绍一般情况下，涉及较多的初边值条件。我们以粘性不可压缩流体流动为例。

初始条件：方程组的解在初始时刻应满足的条件。在初始时刻 $t=t_0$，给出

$$\left.\begin{aligned}u_x(x、y、z;t_0)=u_{x0}(x、y、z)\\u_y(x、y、z;t_0)=u_{y0}(x、y、z)\\u_z(x、y、z;t_0)=u_{z0}(x、y、z)\\p(x、y、z;t_0)=p_0(x、y、z)\end{aligned}\right\}\tag{7-8-1}$$

式中，u_{x0},u_{y0},u_{z0},p_0 均为已知函数。也就是给出初始时刻各物理量在流场内的分布。如果是恒定流动，就不必给出初始条件。

所谓边界条件是指在流场的边界上，方程组的解应满足的条件。边界大致包括固体壁面，两种流体介质（流动介质和周围介质）的分界面（气—气，气—液，液—液）和管道的出入口等。

在流动介质与固体接触面上，由于粘性，流体粘附在固壁上，因此，在固壁上流体的速度 $(u_x,u_y,u_z)_f$ 与固壁的运动速度 $(u_x,u_y,u_z)_w$ 应相等，即

$$(u_x,u_y,u_z)_f=(u_x,u_y,u_z)_w\tag{7-8-2}$$

若固壁静止，则

$$(u_x,u_y,u_z)_f=0$$

式(7-8-2)就是所谓的粘性流体的固壁无滑移条件，或称粘附条件。

实际的流体都具有粘性，但在研究某些流动时，可忽略粘性，将流体看成为无粘性的理想流体，此时固壁的边界条件则是

$$(u_x,u_y,u_z)_{fn}=(u_x,u_y,u_z)_{wn}\tag{7-8-3}$$

下标 n 表示在固壁法向 n 上的分量。在固壁上，速度的切向分量不再相等，即允许流体与固壁间有相对滑移，无滑移条件不再满足。

如果在固壁上，流体有渗透作用，自然(7-8-2)式或(7-8-3)式均不成立，固壁处边界条件需重新改写。

不同液体的分界面，在一般情况下，分界面两侧液体的速度、压强保持连续

$$v_{f1}=v_{f2}, p_{f1}=p_{f2}$$

下标 1,2 分别表示工作流体和周围流体。

液体和蒸汽的界面,在不考虑液面上饱和蒸汽中的动量,热量和质量交换时,界面上的边界条件可写成

$$v_{n1}=-\frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{7-8-4}$$

v_{n1}是液体在平均液面垂直方向上的速度,η 是液面在垂直于平均液面方向上的高度。见图 7-13。等式表示液体在平均液面垂直方向上的速度等于液面的垂直波动速度。

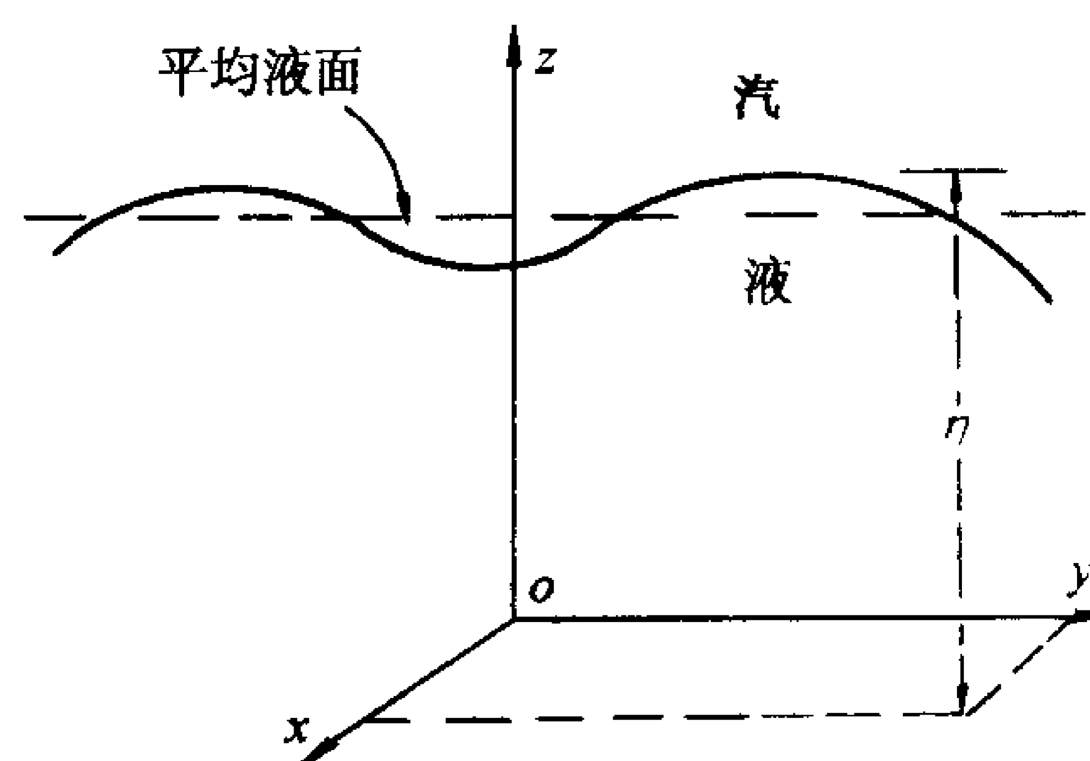


图 7-13 汽液界面

自由液面,即液体与大气的分界面。如可忽略表面张力的影响,则液体在界面上的压强应与气体压强 p_0 相等,而切应力为零

$$p=p_0, \tau=0 \tag{7-8-5}$$

这与理想流体的流动情况相仿。这是因为气体的密度和粘性大大地小于液体的相应值,因此由于惯性力和粘性力引起的应力变化和液体相比可忽略不计。

流道的入口和出口的边界条件指的是入口和出口断面上的流速和压强的分布。例如管流和明渠流等。

以上仅介绍了一般情况下,粘性不可压缩流体的部分常见的运动学和动力学边界条件,对于某些流动,尚需考虑自由面上表面张力的作用等,涉及到温度场变化的,还需考虑温度的边界条件和初始条件。

合理地给出流动问题的初始条件和边界条件,对于确定简捷的计算方法和获得准确的解是至关重要的,应引起足够的重视。

第九节 不可压缩粘性流体紊流运动的基本方程及封闭条件

不可压缩粘性流体运动的基本方程(7-3-1)式和(7-6-3)式既适用于层流也适用于紊流,对于紊流,方程中的各量应为瞬时值,用随机的瞬时值表示的基本方程来研究紊流运动很困难,只有对基本方程取概率平均后得到主要用平均值表示的基本方程,才有可能研究和解决工程紊流问题。而且工程中关注的往往也是紊流的平均值,随着科学技术的发展,紊流运动也受到越来越多的关注。

为简单起见,忽略质量力。将速度和压力的瞬时值分别用平均值和脉动值替代:

$$u_x=\bar{u}_x+u'_x, u_y=\bar{u}_y+u'_y, u_z=\bar{u}_z+u'_z, p=\bar{p}+p'$$

将它们代入方程(7-3-1)式和(7-6-3)式,且应用平均运算法则进行简化,就可得到忽略了质量力的不可压缩粘性流体紊流的连续性微分方程和运动微分方程:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}=0 \tag{7-9-1}$$

$$
\begin{cases}
\rho\left(\dfrac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}+\bar{u}_x\dfrac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_y\dfrac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}+\bar{u}_z\dfrac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}\right)=-\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\mu\Delta\bar{u}_x \\
+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_x'^2})}{\partial x}+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_x' u_y'})}{\partial y}+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_x'u_z'})}{\partial z} \\
\rho\left(\dfrac{\partial \bar{u}_y}{\partial t}+\bar{u}_x\dfrac{\partial \bar{u}_y}{\partial x}+\bar{u}_y\dfrac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}+\bar{u}_z\dfrac{\partial \bar{u}_y}{\partial z}\right)=-\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\mu\Delta\bar{u}_y \\
+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_x'u_y'})}{\partial x}+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_y'^2})}{\partial y}+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_y'u_z'})}{\partial z} \\
\rho\left(\dfrac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}+\bar{u}_x\dfrac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}+\bar{u}_y\dfrac{\partial \bar{u}_z}{\partial y}+\bar{u}_z\dfrac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\right)=-\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\mu\Delta\bar{u}_z \\
+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_x'u_z'})}{\partial x}+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_y'u_z'})}{\partial y}+\dfrac{\partial(-\rho\overline{u_z'^2})}{\partial z}
\end{cases}
\qquad (7\text{-}9\text{-}2)
$$

式中 $\Delta=\dfrac{\partial}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y^2}+\dfrac{\partial}{\partial z^2}$称为拉普拉斯算子。详细的推导不难在相应的流体力学教材中找到。方程式(7-9-2)称为雷诺方程或紊流运动基本方程。

将(7-9-2)式与 N-S 方程(7-6-3)式相比较,前者除平均运动的粘性应力外,还多了由于紊流脉动所引起的应力。九个应力

$$
\begin{matrix}
-\rho\overline{u_x'u_x'} & -\rho\overline{u_x'u_y'} & -\rho\overline{u_x'u_z'} \\
-\rho\overline{u_y'u_x'} & -\rho\overline{u_y'u_y'} & -\rho\overline{u_y'u_z'} \\
-\rho\overline{u_z'u_x'} & -\rho\overline{u_z'u_y'} & -\rho\overline{u_z'u_z'}
\end{matrix}
$$

称之为雷诺应力或紊流应力。

方程组(7-9-1)式(7-9-2)式是不封闭的。方程个数为四个,未知函数有十个,即 $\bar{u}_x,\bar{u}_y,\bar{u}_z,\bar{p}$ 及六个独立的雷诺应力分量。因此为了求解,必须寻求封闭条件,即补充关系式,也称为控制微分方程。目前,解决该问题的主要途径有:

紊流的统计理论;

紊流的半经验理论;

紊流的模式理论。

工程上广泛使用的有"1"方程模式,"2"方程模式,"3"方程模式以及半经验理论中的紊流粘性理论和混合长度理论等。有的书中也将半经验理论归入"0"方程模式。这些理论已较成功地应用于管流,明渠流,射流和边界层等的紊流流动中。限于篇幅和大纲要求,不作详细介绍。

习　题

7-1　已知平面流场内的速度分布为 $u_x=x^2+xy, u_y=2xy^2+5y$。求在点$(1,-1)$处流体微团的线变形速度,角变形速度和旋转角速度。

7-2　已知有旋流动的速度场为 $u_x=2y+32, u_y=2z+3x, u_z=2x+3y$。试求旋转角速度,角变形速度和涡线方程。

7-3　已知有旋流动的速度场为 $u_x=c\sqrt{y^2+z^2}, u_y=0, u_z=0$,式中 c 为常数,试求流场的涡量及涡线

方程。

7-4 求沿封闭曲线 $x^2+y^2=b^2, z=0$ 的速度环量。(1) $u_x=Ax, u_y=0$;(2) $u_x=Ay, u_y=0$;(3) $u_r=0, u_\theta=A/r$。其中 A 为常数。

7-5 试确定下列各流场是否满足不可压缩流体的连续性条件?

(1) $u_x=kx, u_y=-ky, u_z=0$;

(2) $u_x=y+z, u_y=z+x, u_z=x+y$;

(3) $u_x=k(x^2+xy-y^2), u_y=k(x^2+y^2), u_z=0$;

(4) $u_x=k\sin xy, u_y=-k\sin xy, u_z=0$;

(5) $u_r=0, u_\theta=kr, u_z=0$;

(6) $u_r=-k/r, u_\theta=0, u_z=0$;

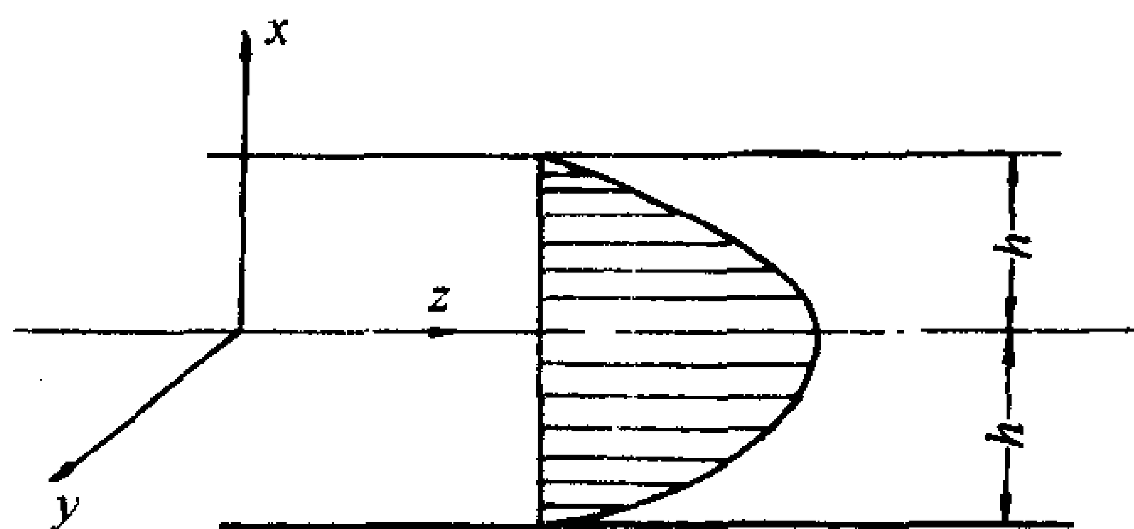
(7) $u_r=2r\sin\theta\cos\theta, u_\theta=-2r\sin^2\theta, u_z=0$。

7-6 已知流场的速度分布为 $u_x=x^2y, u_y=-3y, u_z=2z^2$。求(3,1,2)点上流体质点的加速度。

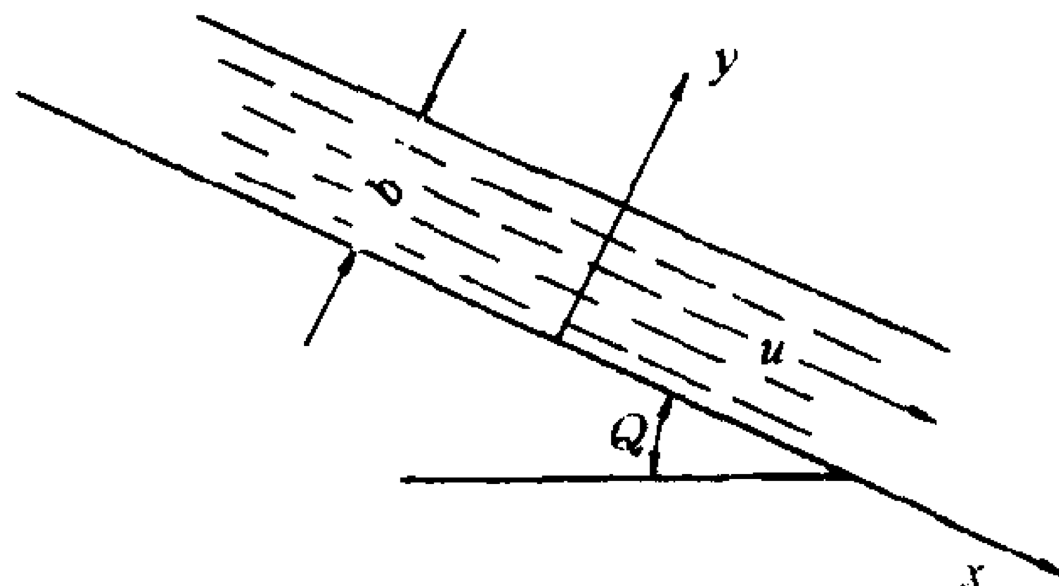
7-7 已知平面流场的速度分布为 $u_x=4t-\dfrac{2y}{x^2+y^2}, u_y=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$。求 $t=0$ 时,在(1,1)点上流体质点的加速度。

7-8 设两平板之间的距离为 $2h$,平板长宽皆为无限大,如图所示。试用粘性流体运动微分方程,求此不可压缩流体恒定流的流速分布。

7-9 沿倾斜平面均匀地流下的薄液层,试证明:(1) 流层内的速度分布为 $u=\dfrac{\gamma}{2\mu}(2by-y^2)\sin\theta$;(2) 单位宽度上的流量为 $q=\dfrac{\gamma}{3\mu}b^3\sin\theta$。



题 7-8 图



题 7-9 图

第八章 绕 流 运 动

在自然界和工程实际中,存在着大量的流体绕物体的流动问题,即绕流问题。例如,飞机在空气中的飞行,河水流过桥墩,火力发电厂的高烟囱周围空气流动,粉尘颗粒在空气中的飞扬或沉降,水处理中固体颗粒污染物在水中的运动,晨雾中水滴在空气中的下落等。流体的绕流运动,可以有多种方式,或者流体绕静止物体运动,或者物体在静止的流体中运动,或者两者兼之,均为物体和流体作相对运动。不管是哪一种方式,我们研究时,都是把坐标固结于物体,将物体看作是静止的,而探讨流体相对于物体的运动。因此,所有的绕流运动,都可以看成是同一类型的绕流问题。

在大雷诺数的绕流中,由于流体的惯性力远远大于作用在流体上的粘性力,粘性力相对于惯性力可以忽略不计,将流体视为理想流体,由理想流体的流动理论求解流场中的速度分布和压强分布。但是在靠近物体的一薄层内,由于存在着强烈的剪切流动,粘性力却大到约与惯性力相同的数量级,因此,在这一薄层(称为附面层)内,粘性力不能忽略。在附面层内,由于存在着强烈的剪切涡旋运动,粘性对绕流物体的阻力、能量耗损、扩散和传热等问题,起着主要的作用。

基于上述缘由,在处理大雷诺数下的绕流问题时,可以用附面层理论处理附面层内的流动,而用理想流体动力学理论求解附面层外流场中的流动,将两者衔接起来,就可以解决整个绕流问题。

本章主要论述理想不可压缩流体平面无旋流动的势流理论,以及有关附面层的基本概念和基本解法。作为专业上的应用之一,对固体球形颗粒在空气中的升降的临界速度—悬浮速度也进行了分析与讨论。

第一节 无 旋 流 动

当流动为无旋时,将使问题的求解简化,因此提出了无旋流动的模型。

流动场中各点旋转角速度等于零的运动,称为无旋流动。在无旋流动中:

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0$$

因此,无旋流动的前提条件是:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial z}\\\frac{\partial u_x}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial x}\\\frac{\partial u_y}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{8-1-1}$$

根据全微分理论，上列三等式是某空间位置函数 $\varphi(x、y、z)$存在的必要和充分的条件。它和速度分量 $u_x、u_y、u_z$(图 8-1)的关系表为下列全微分的形式：

$$d\varphi(x、y、z)=u_x dx+u_y dy+u_z dz \tag{8-1-2}$$

函数 φ 称为速度势函数。存在着速度势函数的流动，称为有势流动，简称势流。无旋流动必然是有势流动。

展开势函数的全微分，

$$d\varphi=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

比较上两式的对应系数，得出

$$\left.\begin{aligned}u_x&=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\\u_y&=\frac{\partial \varphi}{\partial y}\\u_z&=\frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{8-1-3}$$

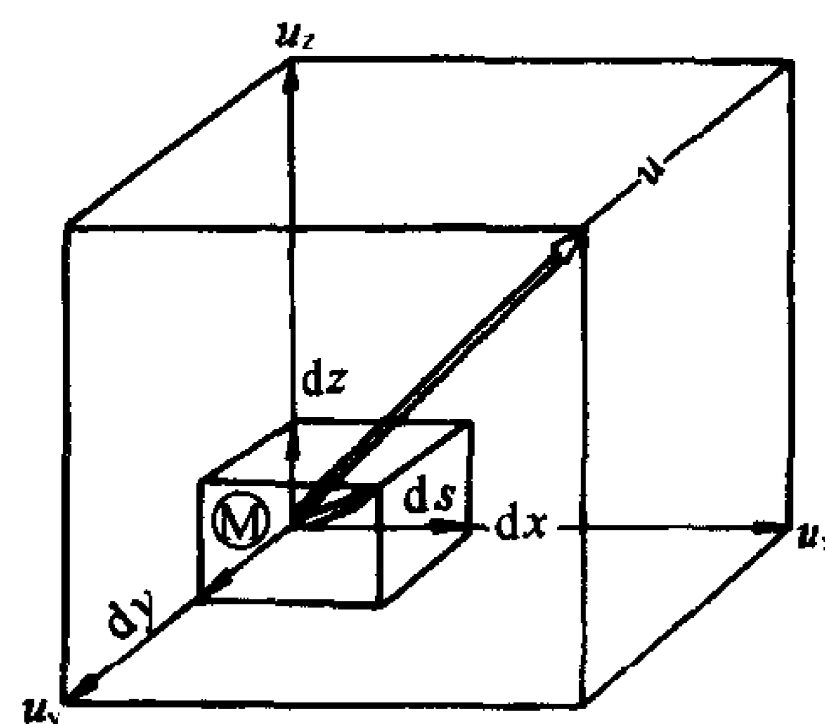


图 8-1 无旋流动的分速

即速度在三坐标上的投影，等于速度势函数对于相应坐标的偏导数。

事实上，通过速度势这个函数，不仅可以描述 $x、y、z$ 三个方向的分速度，而且可以反映任意方向的分速度。根据方向导数的定义，函数 φ 在任一方向$\vec{s}$上的方向导数为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial s}&=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\vec{s},x)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\vec{s},y)+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos(\vec{s},z)\\&=u_x\cos(\vec{s},x)+u_y\cos(\vec{s},y)+u_z\cos(\vec{s},z)\end{aligned}$$

上式右边是速度$\vec{u}$的三个分量在$\vec{s}$上的投影之和，应等于$\vec{u}$在$\vec{s}$上的投影 u_s，即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}=u\cos(\vec{u},\vec{s})=u_s \tag{8-1-4}$$

即速度在某一方向的分量等于速度势函数对该方向上的偏导数。

存在着势函数的前提是流场内部不存在旋转角速度。根据汤姆逊关于旋涡守恒定理所引伸出的推论，只有内部不存在摩擦力的理想流体，才会既不能创造旋涡，又不能消灭旋涡。摩擦力是产生和消除旋涡的根源，因而一般只有理想流体流场才可能存在无旋流动。而理想流体模型在实际中要根据粘滞力是否起显著作用来决定它的采用。工程上所考虑的流体主要是水和空气，它们的粘性很小，如果在流动过程中没有受到边壁摩擦的显著作用，就可以当作理想流体来考虑。

水流和气流总是从静止状态过渡到运动状态的。当静止时，显然没有旋转角速度。根据汤姆逊定理，对于可按理想流体处理的水和空气的流动，从静止到运动，也应保持无旋状态。

例如，通风车间用抽风的方法使工作区出现风速，工作区的空气即从原有静止状态过渡到运动状态，流动就是无旋的。所以，一切吸风装置所形成的气流，可以按无旋流动处理。

相反，利用风管通过送风口向通风地区送风，空气受风道壁面的摩擦作用，流动在风道内是有旋的，流入通风地区后，又以较高的速度和静止空气发生摩擦，所以只能维持有旋，而不能按无旋处理。

飞机在静止空气中飞行时，静止空气原来是无旋的。飞机飞过时，空气受扰动而运动，仍应保持无旋。只有在紧靠机翼的近距离内，流体受固体壁面的阻碍作用，流动才是有旋的。

此外，即使流动是有旋的，当它的流速分布接近于无旋，也可以有条件有范围地按无旋处理。

现在，我们把速度势函数代入不可压缩流体的连续性方程：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

其中

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

同理

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

得出

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0 \tag{8-1-5}$$

上述方程称为拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数。因此，不可压缩流体势流的速度势函数，是坐标 x、y、z 的调和函数。而拉普拉斯方程本身，就是不可压缩流体无旋流动的连续性方程。

【例 8-1】 在(1) $u_x=-ky, u_y=kx, u_z=0$；(2) $u_x=\frac{-y}{x^2+y^2}, u_y=\frac{x}{x^2+y^2}, u_z=0$ 的流动中，判断两者是否无旋流动。如果为无旋流动，求它的势函数，并检查势函数是否满足拉普拉斯方程。

【解】 由例 7-1 的解答可知，对于第一种流动，$\omega_z=k, \omega_x=\omega_y=0$，因此为有旋流动，没有势函数。

对于第二种流动，$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$，是无旋流动，它满足

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{1}$$

它的势函数的全微分为：

$$d\varphi=u_x dx+u_y dy+u_z dz=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy+0\cdot dz$$

由高等数学中关于曲线积分的定理知道，当它满足条件(1)式时，曲线积分

$$\int d\varphi = \int u_x dx + u_y dy$$

与路径无关，函数 φ 可由普通积分求出，其形式为：

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} u_x(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} u_y(x,y)dy$$

取(x_0, y_0)为(0,0)，则

$$\varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{-y_0}{x^2+y_0^2}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int_0^y\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^y\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}d\left(\frac{y}{x}\right)=\text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

计算 φ 的二次偏导数：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

代入

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+0=0$$

满足拉普拉斯方程。

【例 8-2】 不可压缩流体的流速分量为：

$$u_x=x^2-y^2 \qquad u_y=-2xy \qquad u_z=0$$

是否满足连续性方程？是否无旋流？求速度势函数。

【解】 检查是否满足连续性方程：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(-2xy)=2x-2x=0$$

满足连续性方程。

其次，检查流动是否无旋：

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)=-2y$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}=-2y$$

两者相等，故为无旋流动。

求速度势：

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = (x^2 - y^2)dx - 2xydy$$
$$= x^2 dx - (y^2 dx + 2yx dy) = x^2 dx - dxy^2$$
$$\varphi = \frac{1}{3}x^3 - xy^2$$

第二节　平 面 无 旋 流 动

在流场中，某一方向(取作 z 轴方向)流速为零，$u_z=0$，而另两方向的流速 u_x、u_y 与上述轴向坐标 z 无关的流动，称为平面流动。上节例题中的两种流动：(1) $u_x = -ky$, $u_y = +kx$, $u_z = 0$；(2) $u_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $u_y = \frac{x}{x^2+y^2}$, $u_z = 0$，都是平面流动。

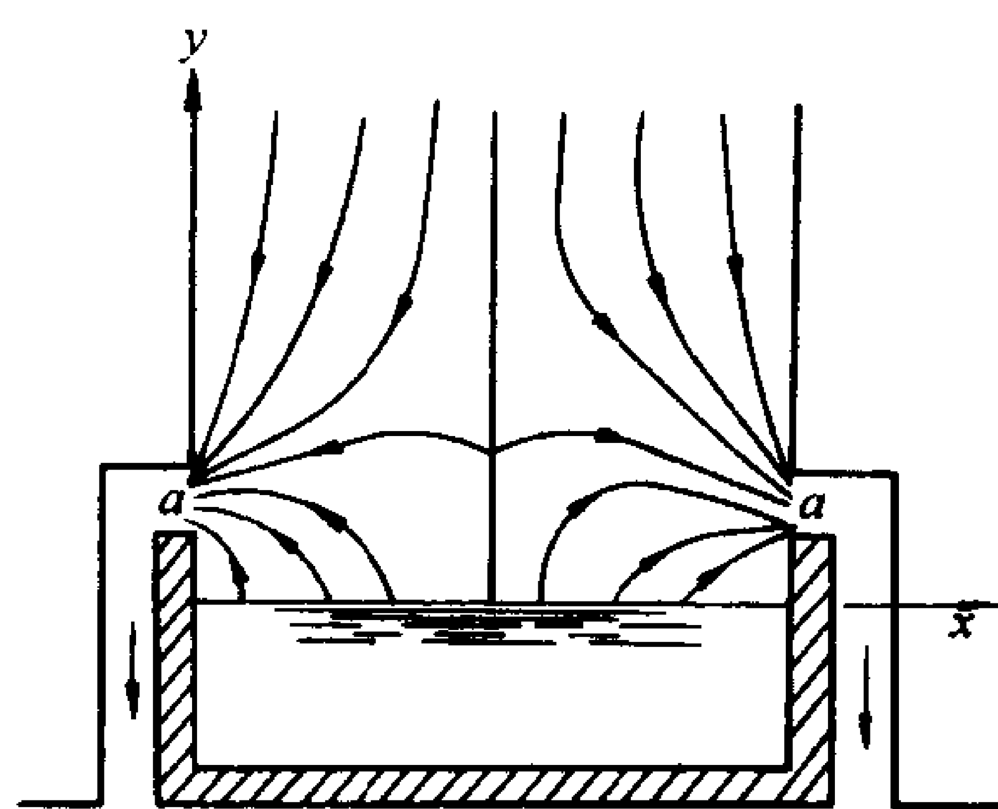


图 8-2　工业液槽边侧吸气

例如工业液槽的边侧吸气，沿长形液槽两边，设置狭缝吸风口。气流由吸风口 a 吸出，在液槽上方造成 x—y 平面上的速度场。沿长度方向，即垂直于纸面方向，流速为零。而且沿此方向取任一 x—y 平面，它的速度场完全一致，这就是平面流动的具体例子(图 8-2)。

在不可压缩流体平面流动中，连续性方程简化为：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

而旋转角速度只可能有 ω_z 的分量，如果 ω_z 为零，

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{8-2-1}$$

则为平面无旋流动。平面无旋流动的速度势函数为：

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy \tag{8-2-2}$$

并满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{8-2-3}$$

由于某些问题采用极坐标比较方便，现将速度势函数写为极坐标 $\varphi(r、\theta)$ 的形式。根据势函数的特征，沿 γ 和 θ 方向的分速度等于势函数对相应方向的偏导数：

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \\ u_\theta &= \frac{\partial \varphi}{\gamma \partial \theta} \end{aligned}\right\} \tag{8-2-4}$$

代入连续性方程式(7-3-3)式，取 $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$，则

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\gamma^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = 0 \tag{8-2-5}$$

这就是极坐标中函数 φ 的拉普拉斯方程。

不可压缩流体平面流动的连续性方程为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \tag{8-2-6}$$

由(8-2-6)式可以定义一个函数 ψ,令

$$\left.\begin{aligned} u_x&=\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y&=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{8-2-7}$$

满足(8-2-7)式的函数 ψ 称为流函数。

一切不可压缩流体的平面流动,无论是有旋流动或是无旋流动都存在流函数,但是,只有无旋流动才存在势函数。所以,对于平面流动问题,流函数具有更普遍的性质,它是研究平面流动的一个重要工具。

在平面流动中,流线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x}=\frac{\mathrm{d}y}{u_y}$$

或

$$u_x\mathrm{d}y-u_y\mathrm{d}x=0 \tag{8-2-8}$$

沿流线

$$\mathrm{d}\psi=\frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y=u_x\mathrm{d}y-u_y\mathrm{d}x=0 \tag{8-2-9}$$

即

$$\psi=\text{常数}$$

上式表示,等流函数线即是流线。

若流函数用极坐标(γ、θ)表示,则

$$\left.\begin{aligned} u_r&=\frac{\partial \psi}{\gamma\partial \theta} \\ u_\theta&=-\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \end{aligned}\right\} \tag{8-2-10}$$

令

$$\varphi(x、y)=c \tag{8-2-11}$$

给 c 以不同值,得出不同的势函数等值线。称为等势线。

等势线和流线的关系,可以对比两函数和流速分量的关系求出:

$$u_x=\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$u_y=\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

上两式说明平面势流的流函数和势函数互为共轭函数。将这两式交叉相乘得:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

即

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$$

由高等数学可知,这是 $\varphi(x、y)=c$ 和 $\psi(x、y)=c$ 相互正交的条件。说明流函数和势函数相互垂直。

将流函数偏导数表示的流速分量 $u_x、u_y$ 式(8-2-7)代入无旋流条件:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

其中

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\qquad\frac{\partial u_y}{\partial x}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

代入并移项,得出

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0\tag{8-2-12}$$

说明流函数满足拉普拉斯方程,也是调和函数。

由于流函数与势函数共同以流速相互联系,它们互为共轭调和函数,所以,若已知其中一个函数,即能求出另一个函数。

由于流函数等值线(即流线)和势函数等值线(简称等势线)相互垂直,我们可对 $\psi(x,y)=c$ 的常数值 c 给以一系列等差数值:$\psi_1,\psi_1+\Delta\psi,\psi_1+2\Delta\psi,\cdots\cdots$,并在流场中绘出相应的一系列流线。再对 $\varphi(x,y)=c$ 的常数值 c 给以另一系列等差数值:$\varphi_1,\varphi_1+\Delta\varphi、\varphi_1+2\Delta\varphi,\cdots\cdots$,并绘入同一流场中,得出相应的一系列等势线。这两簇曲线构成正交曲线网格,称之为流网。

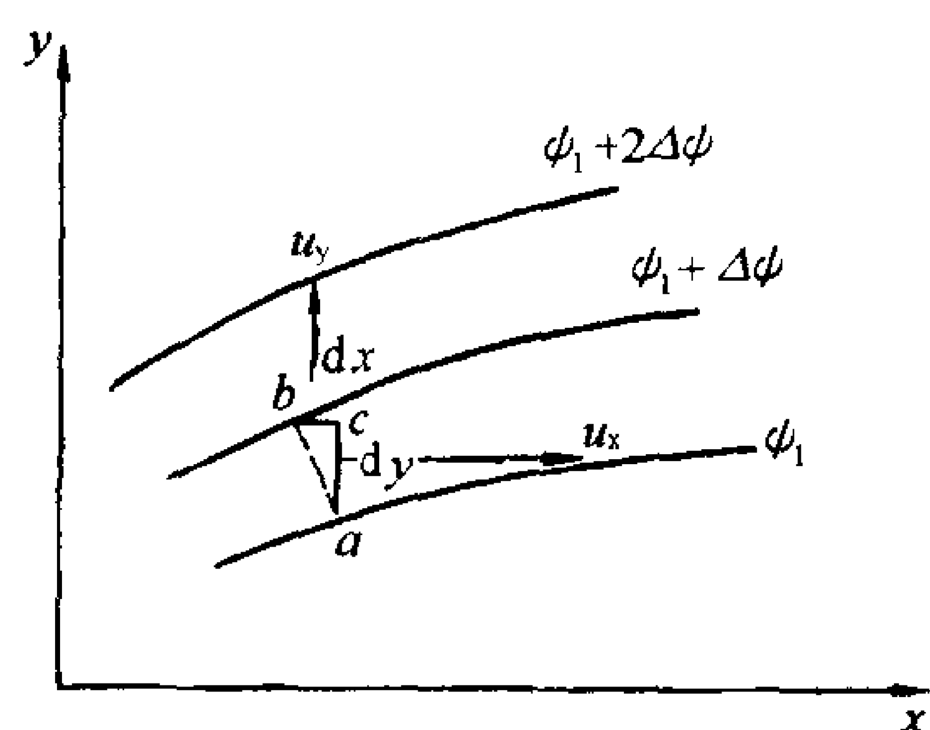


图 8-3 流函数差的流量意义

在流网中,等势线簇的势函数数值沿流线方向增大,而流线簇的流函数数值则沿流线方向逆时针旋转 90°后所指的方向增加。

流网有下列性质:

(1) 流线与等势线正交;

(2) 相邻两流线的流函数数值之差,是此两流线间的单宽流量。

为了证明,在曲线 ψ_1 和 $\psi_1+\Delta\psi$ 上,沿等势线向 ψ 值增大的方向取 $a、b$ 两点,求通过两点间的单宽流量。从图 8-3 可以看出,从 a 到 b 取 $dx、dy$,流速分速为 $u_x、u_y$,则单宽流量 dq 应为通过 dx 的单宽流量 $u_y dx$ 和通过 dy 的单宽流量 $u_x dy$ 之和。但由 a 到 b,dx 为负值,而流量应为正值,所以,$u_y dx$ 应冠以负号,即

$$dq=u_x dy-u_y dx$$

与流函数的表达式(8-2-9)比较,得:

$$dq=d\psi$$

即两流线间的流函数差值,等于两流线间的单宽流量。流线簇既是按流函数差值相等绘出的,则任一相邻两流线间的流量相等。根据连续性方程,两流线间的流速和流线间距离成反比。流线愈密,流速愈大;流线愈疏,流速越小。这样,流线簇不仅能表征流场的流速方向,也能表征流速的大小。

(3) 流网中每一网格的相邻边长维持一定的比例。

设 dn 为两等势线间的网格边长,则它在 $x、y$ 方向的投影为:

$$dx = dn\cos\theta$$
$$dy = dn\sin\theta$$

又 dn 是流速的方向，所以

$$u_x = u\cos\theta$$
$$u_y = u\sin\theta$$

则 $d\varphi = u_x dx + u_y dy = u\,dn(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = u\,dn$

设 dm 为两流线间的网格边长，则按图 8-4：

$$dx = -dm\sin\theta$$
$$dy = dm\cos\theta$$

由于

$$d\psi = u_x dy - u_y dx$$

代入 u_y、u_x 式，

$$d\psi = u\,dm(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = u\,dm$$

则

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{dn}{dm}$$

因为$\frac{d\varphi}{d\psi}$对任一网格都保持常数，所以$\frac{dn}{dm}$也保持定值。如取$\frac{d\varphi}{d\psi}=1$，则每一网格成曲线正方形。

流场中的流网，可以利用流线和等势线相互正交，形成曲线正方网格的特性，直接在流场中徒手绘出。具体绘法是用一张绘图纸，先绘出流场。根据流动的大致方向，试绘一系列流线以及垂直于流线的等势线，形成正交网格。初绘之后，检查不符合流网的特性的地方，用橡皮擦去，重新修改，逐渐形成互相垂直的正方形网格。最后绘成基本上符合流网特性的两簇曲线(图 8-5)。绘制时，抓住边界条件是重要的。一般说来，固体边界都是边界流线；过水断面或势能相等的线，都是边界等势线。对于给定流场，绘出边界等势线和边界流线，就确定了流网的范围。

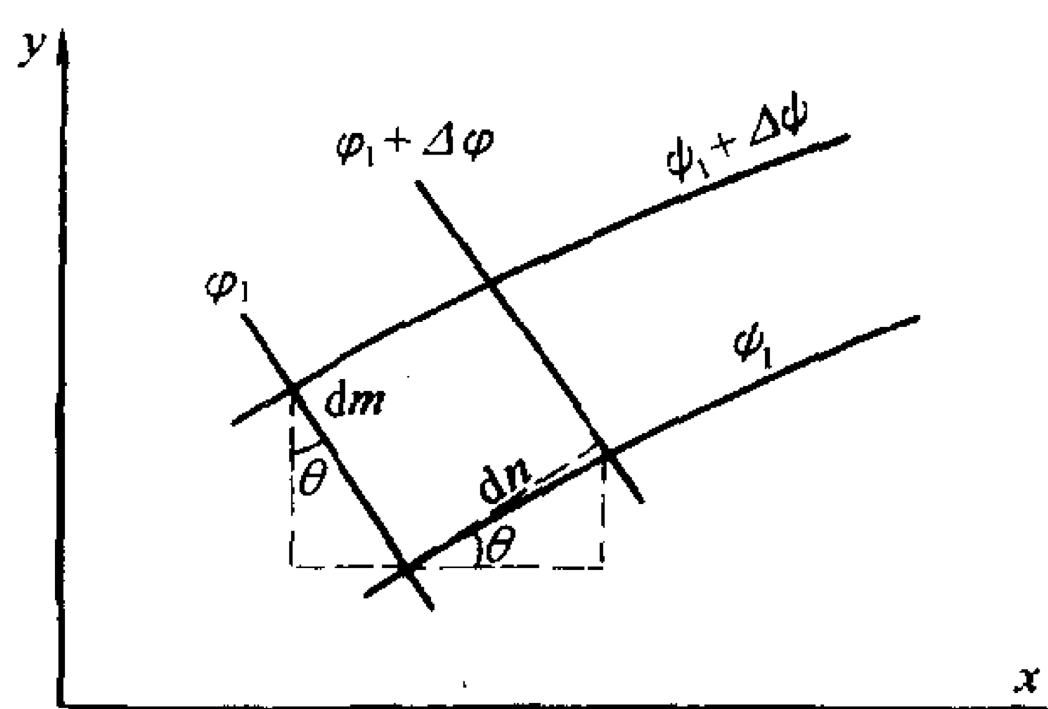


图 8-4　流网的特性

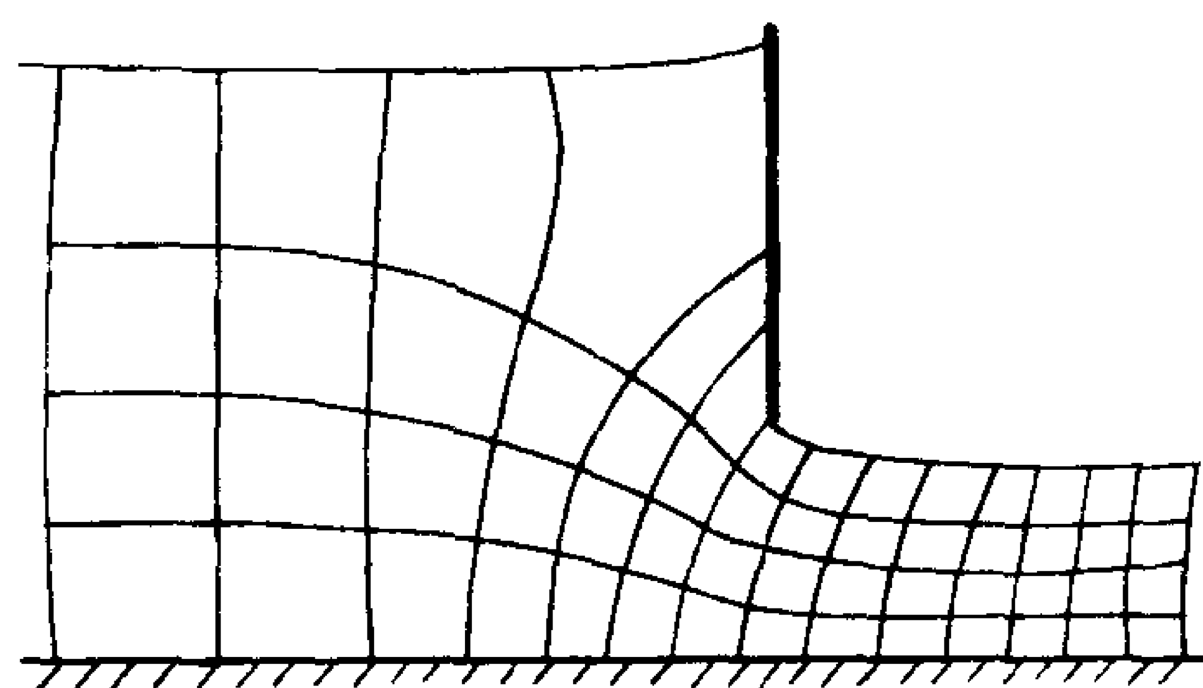


图 8-5　闸门下出流的流网

至此，我们已引进了势函数 φ 和流函数 ψ 的概念，阐述了它们的主要性质。一个流动存在势函数的条件仅仅是流动无旋，只要无旋，那末，不管是可压缩流体，还是不可压缩流体，也不管是恒定流，还是非恒定流，三元流还是二元流，都存在势函数。对于不可压缩流体无旋流动，势函数 φ 满足拉普拉斯方程。

流函数 ψ 存在的条件则是不可压缩流体，以及流动是平面问题，与流动是否无旋，是否恒定和是否具有粘性无关。当流动又是无旋时，则流函数 ψ 也满足拉普拉斯方程。顺便指

出,对于可压缩流体或空间轴对称流动的流函数定义,本章不作讨论。

势函数 φ 或流函数 ψ 所满足的拉普拉斯方程由连续性方程演变得到。

这样,我们讨论的理想不可压缩流体平面无旋流动的求解方法就有下列两种数学模型:一是以流函数 ψ 为未知函数的拉普拉斯方程和初边值条件;另一是以势函数为未知函数的拉普拉斯方程和初边值条件。

对于不可压缩流体平面无旋流动,势函数和流函数是共轭调和函数,满足哥西—黎曼条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y},\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8-2-13}$$

因此,可引入复函数 $w(z)=\varphi+i\psi$ 作为未知函数,利用复变函数求解析函数的方法求解。下面将介绍的势流叠加法其实质就是复变函数中的的奇点法。

第三节　几种简单的平面无旋流动

一、均匀直线流动

在均匀直线流动中,流速及其在 x、y 向分速保持为常数。

$$u_x=a \qquad u_y=b$$

则存在着势函数 φ:

$$\mathrm{d}\varphi = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$$

$$\varphi = \int a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y = ax + by \tag{8-3-1}$$

流函数根据

$$\mathrm{d}\psi = u_x\mathrm{d}y - u_y\mathrm{d}x = a\mathrm{d}y - b\mathrm{d}x$$

$$\psi = ay - bx \tag{8-3-2}$$

当流动平行于 y 轴,$u_x=0$。则

$$\varphi = by \qquad \psi = -bx \tag{8-3-3}$$

当流动平行于 x 轴,$u_y=0$。则

$$\varphi = ax \qquad \psi = ay \tag{8-3-4}$$

变为极坐标方程,代入 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,则(8-3-4)式变为

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= ar\cos\theta\\ \psi &= ar\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{8-3-5}$$

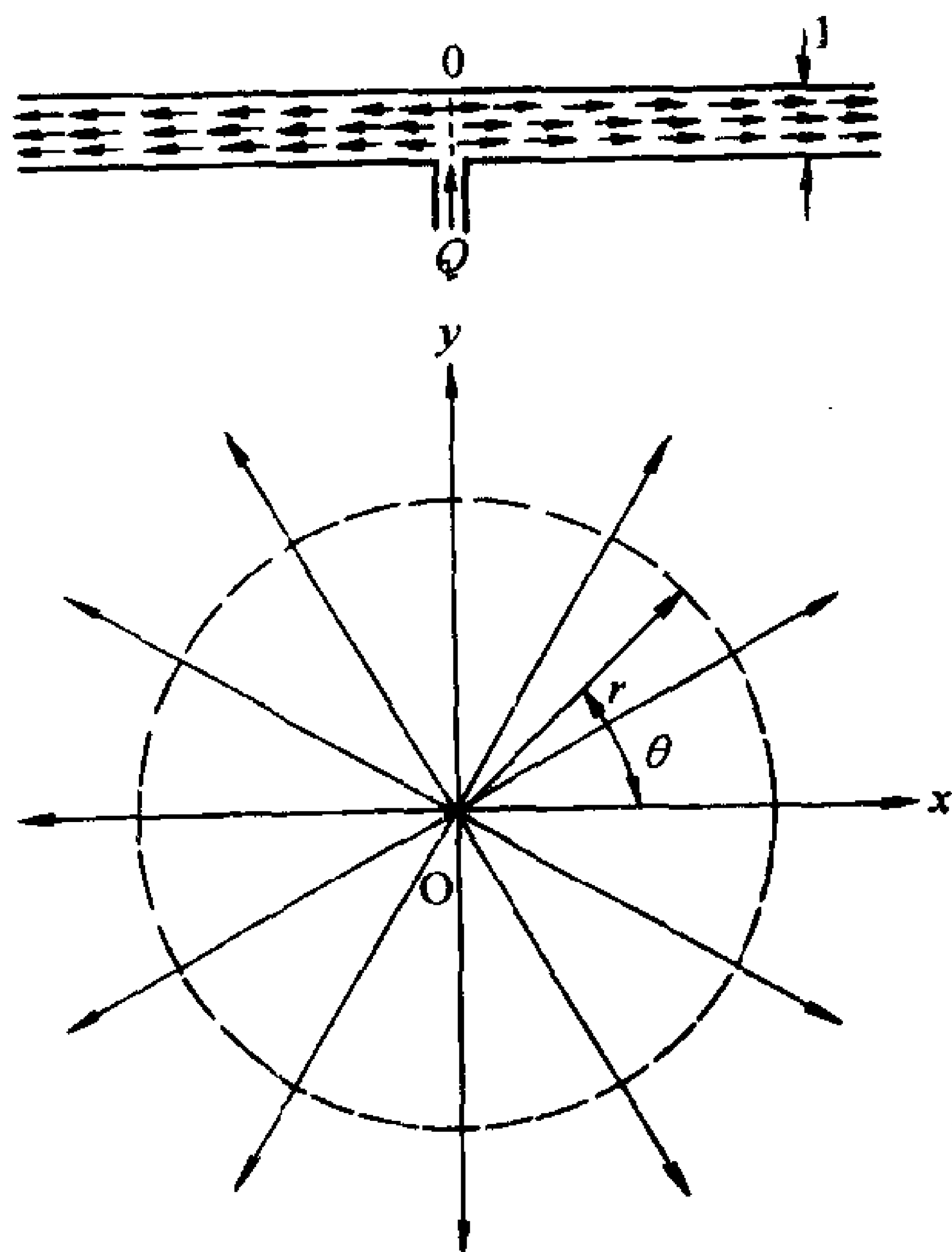


图 8-6　源流

二、源流和汇流

设想流体从通过 O 点垂直于平面的直线,沿极半径 r 均匀地四散流出,这种流动称为源流(图 8-6)。O 点为源点。垂直单位长度所流出的流量为 Q,Q 称为源流强度。连续性条件要求,流经任一半径 r 的圆周的流量 Q 不变,则径向流速 u_r 等于流量 Q 被除以周长 $2\pi r$。即

$$u_r=\frac{Q}{2\pi r}\qquad u_\theta=0$$

势函数用 $\varphi=\int u_r\mathrm{d}r+\int u_\theta r\mathrm{d}\theta=\int\frac{Q}{2\pi r}\mathrm{d}r+\int o\cdot r\mathrm{d}\theta$

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\ln r \tag{8-3-6}$$

流函数用

$$\psi=\int u_r r\mathrm{d}\theta-\int u_\theta\,\mathrm{d}r$$

$$=\int\frac{Q}{2\pi r}r\mathrm{d}\theta-\int o\mathrm{d}r$$

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}\theta \tag{8-3-7}$$

相应的直角坐标

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}\\ \psi&=\frac{Q}{2\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\end{aligned}\right\} \tag{8-3-8}$$

可以看出,源流流线为从源点向外射出的射线,而等势线则为同心圆周簇。

当流体反向流动,即流体从四方向某汇合点集中,这种流动称为汇流。汇流的流量称为汇流强度 ,它的 φ 和 ψ 函数,是源流相应的函数的负值。

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=-\frac{Q}{2\pi}\ln r\\ \psi&=-\frac{Q}{2\pi}\theta\end{aligned}\right\} \tag{8-3-9}$$

直角坐标的相应函数为:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=-\frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}\\ \psi&=-\frac{Q}{2\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\end{aligned}\right\} \tag{8-3-10}$$

三、环流

流场中各流体质点均绕某点0(图8-7)以辐向流速 $u_\theta=\frac{c}{r}$(c 为常数)作圆周运动,因而流线为同心圆簇,而等势线则为自圆心0发出的射线簇,这种流动称为环流。环流的流函数和势函数分别是:

$$\left.\begin{aligned}\psi&=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r\\ \varphi&=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta\end{aligned}\right\} \tag{8-3-11}$$

即:将源流的流函数和势函数互换,把(8-3-6)和(8-3-7)式中的 Q 换为速度环量 Γ,若考虑到流动方向,就得(8-3-11)式。速度环量通常是对封闭周边写出的,在环流的情况下,是沿某

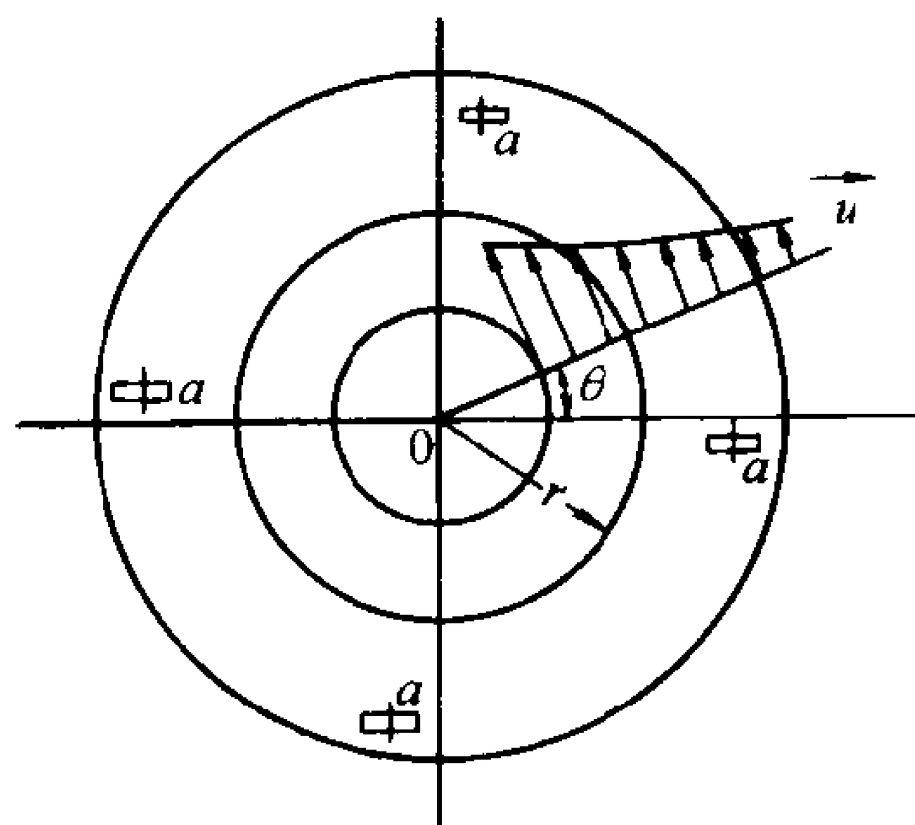


图 8-7　环流

一流线写出的速度环量,称为环流强度:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} u_\theta r \mathrm{d}\theta = 2\pi r u_\theta = \text{常量}$$

因此,环流速度为:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = \frac{\partial \varphi}{r\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

即:环流流速与矢径的大小成反比,而原点 0 为奇点。

应当注意,环流是圆周流动,但却不是有旋流动。因为,除了原点这个特殊的奇点之外,各流体质点均无旋转角速度。如果把一个固体质点漂浮在环流中(图 8-7 中 a),则该质点本身将不旋转地沿圆周流动。

四、直角内的流动

假设无旋流动的速度势为:

$$\varphi = a(x^2 - y^2) \tag{8-3-12}$$

则

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax, \quad u_y = -2ay$$

流函数全微分为

$$\mathrm{d}\psi = u_x \mathrm{d}y - u_y \mathrm{d}x = 2ax\mathrm{d}y + 2ay\mathrm{d}x = 2a\mathrm{d}(xy)$$

积分

$$\psi = 2axy \tag{8-3-13}$$

流线是双曲线族。当 $\psi > 0$ 时,x、y 值的符号相同,流线在一、三象限内。当 $\psi < 0$ 时,x、y 值符号相反,流线在二、四象限内。

当 $\psi = 0$ 时,$x = 0$,或 $y = 0$。说明坐标轴就是流线。这个 $\psi = 0$ 的流线,称为零流线。原点是速度为零的点,称为驻点。

根据 $\varphi = a(x^2 - y^2)$ 可以看出,在 $y = 0$ 的轴上,随着 x 绝对值的增大,φ 也增加。说明流动方向是沿 x 轴向外,如图8-8所示。

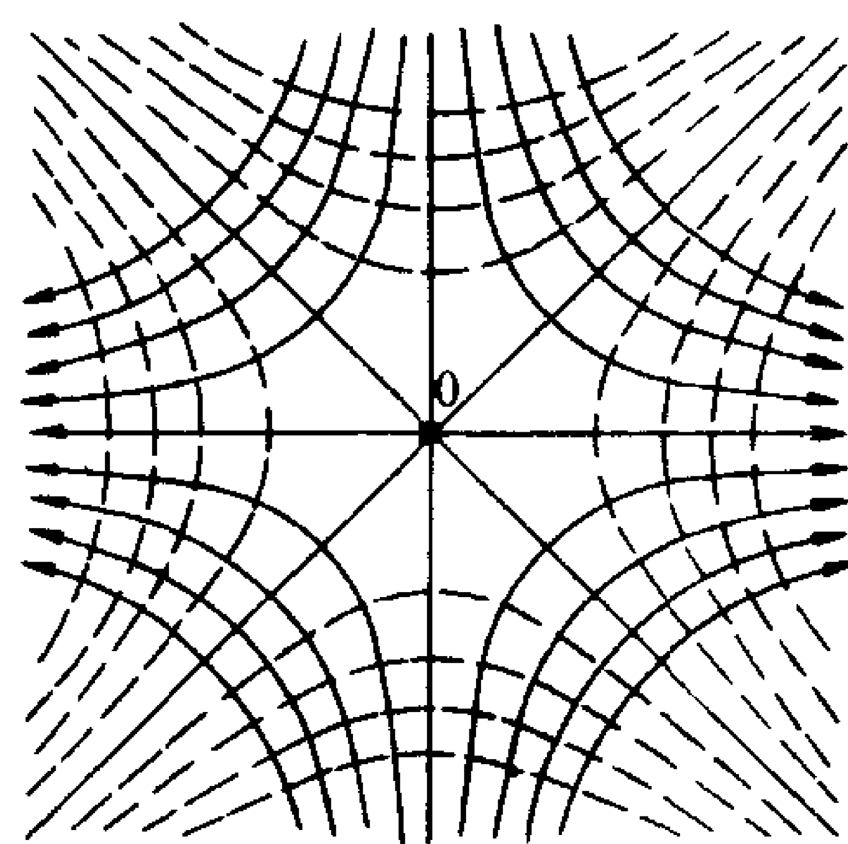


图 8-8　直角内流动

在理想流体中,由于忽略粘性的影响,固体边界线可以看作一条流线。因此,若把流场中某一流线换为固体边界线,并不破坏原有流场。我们把图 8-8 中的零流线 x、y 轴的正值部分用固体壁面来代替,就得到直角内的流动,其势函数就是原有流场的势函数。如果把 x 轴的全部,用固体壁面代替,则原来的势函数就代表垂直流向固体壁面的流动。

为了写成极坐标的形式,代入 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 2ar^2\sin\theta\cos\theta = ar^2\sin 2\theta \\ \varphi &= a(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) = ar^2\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{8-3-14}$$

这种直角转角内流动可以推广至更一般的转角角度 α,它的流函数和势函数表为:

$$\left.\begin{aligned}\psi &= ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\\ \varphi &= ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}\end{aligned}\right\}\tag{8-3-15}$$

其中零流线为 $\theta=0$ 和 $\theta=\alpha$，相当于转角的固体壁面线。当 $\alpha=45°$ 和 $\alpha=225°$ 时，其流线形状如图 8-9。

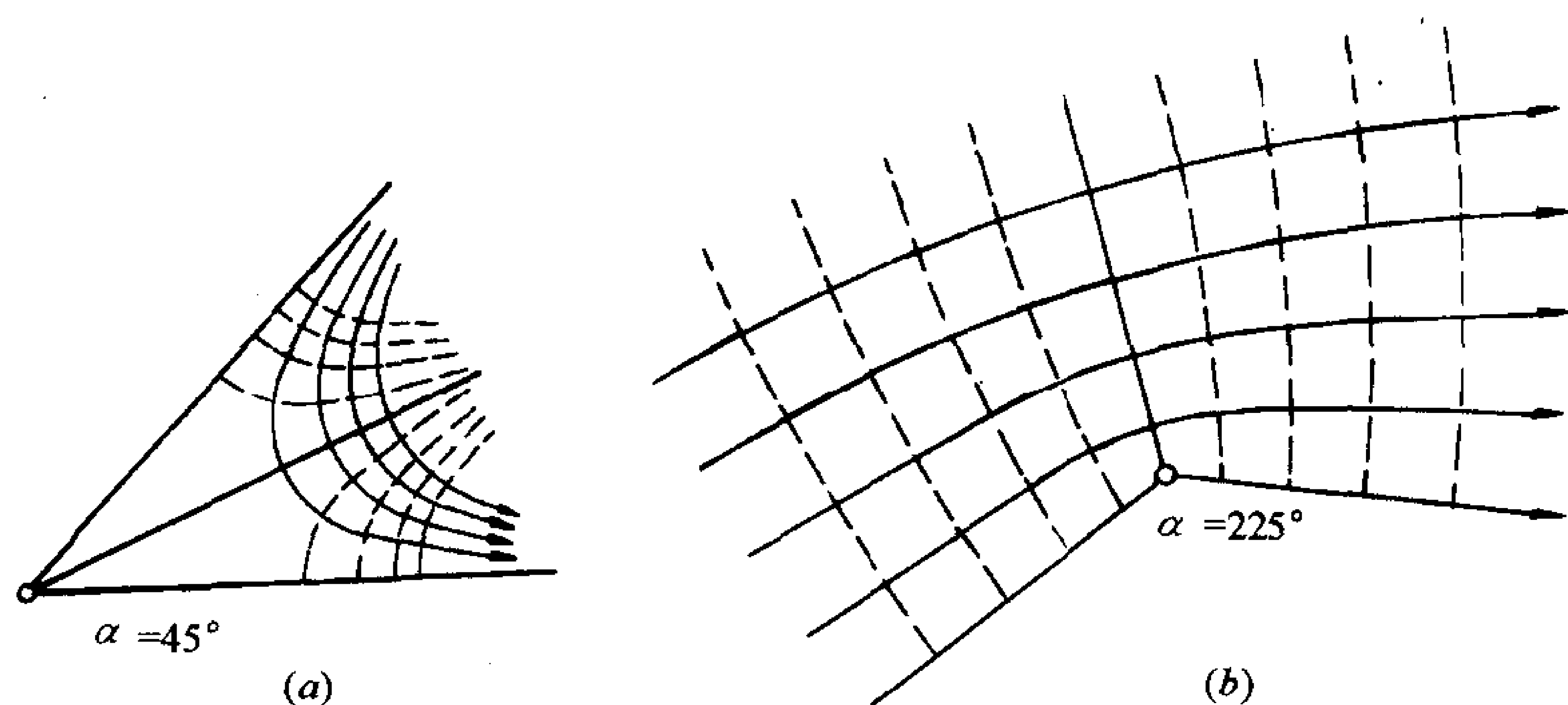


图 8-9　转角流流网

事实上，由于此角 $\alpha=225°$ 大于 180°，在 $u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\pi}{\alpha}ar^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}$ 中，r 的指数 $\frac{\pi}{\alpha}-1$ 为负值。则在转角点 $r\to 0$ 处，$r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\to\infty$，$u_r\to\infty$，这显然是不可能的。所以实际上是在转角处出现流动的分离，在分离后形成旋涡。

【例 8-3】　气流绕直角墙面作平面无旋流动如图 8-10 所示，在距离角顶点 0 的距离为 $r=1$ 处，流速为 3m/s。求流函数和势函数。

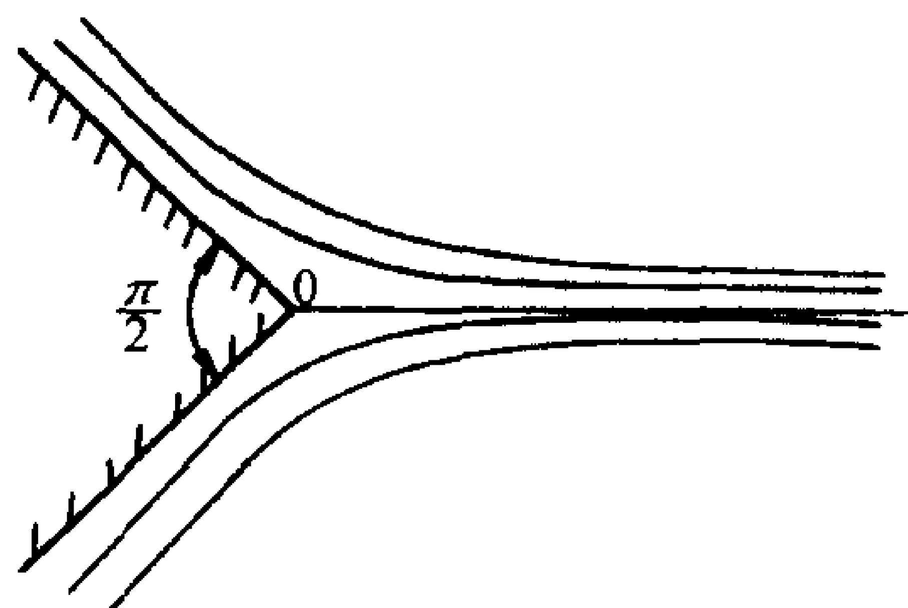


图 8-10　转角流例题

【解】　这种流动可以认为是两个转角流动的相加，用 (8-3-15) 式，代入 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$，

$$\varphi=ar^{\frac{4\pi}{3\pi}}\cos\frac{4\pi}{3\pi}\theta=ar^{\frac{4}{3}}\cos\frac{4}{3}\theta$$

$$\psi=ar^{\frac{4}{3}}\sin\frac{4}{3}\theta$$

当 $\theta=0$ 时，$\psi=0$；当 $\theta=\pm\frac{3}{4}\pi$ 时，$\psi=0$。所以零流线和边界条件相符。

流速函数

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{4}{3}ar^{\frac{1}{3}}\cos\frac{4}{3}\theta$$

$$u_\theta=\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}=-\frac{4}{3}ar^{\frac{1}{3}}\sin\frac{4}{3}\theta$$

当 $r=1,\theta=0$ 时

$$u_r=\frac{4}{3}a=3,\qquad a=\frac{9}{4}$$

代入流函数及势函数：

$$\varphi=\frac{9}{4}r^{\frac{4}{3}}\cos\frac{4}{3}\theta$$

$$\psi=\frac{9}{4}r^{\frac{4}{3}}\sin\frac{4}{3}\theta$$

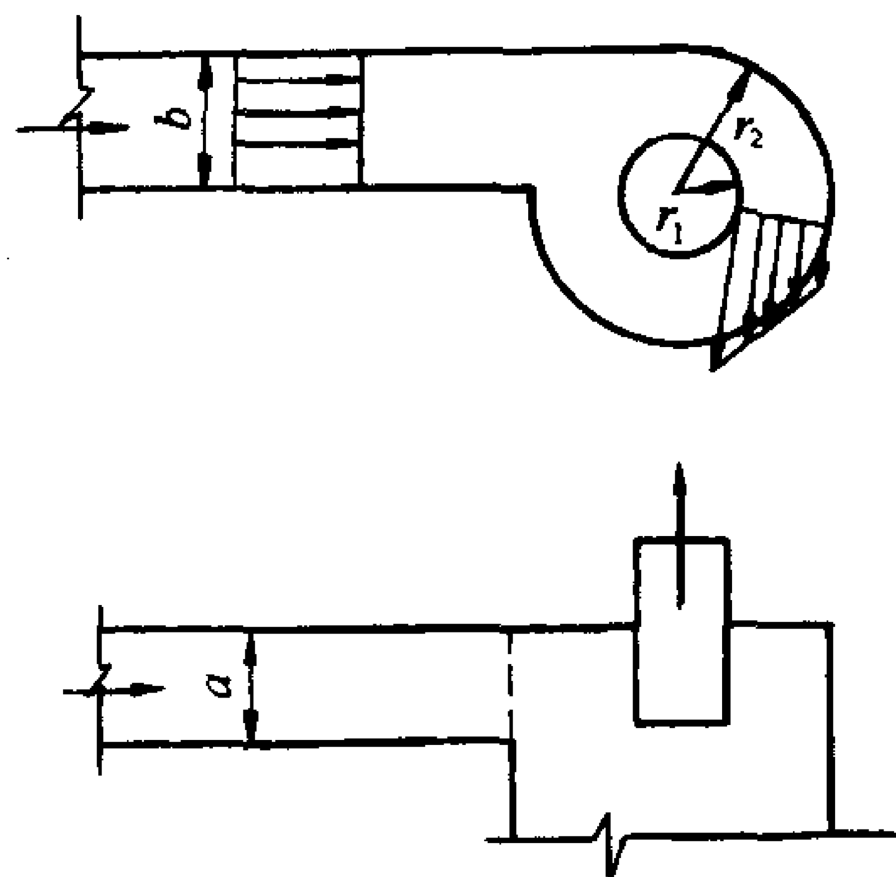


图 8-11 旋风除尘器的气流流动

【例 8-4】 旋风除尘器上部的流动如图 8-11 所示，图中 $r_1=0.4\text{m}, r_2=1\text{m}, a=1\text{m}, b=0.6\text{m}$。气流沿管道从左流入。在内部旋转后，从上部流出。试估计旋转流动中，断面的流速分布。管中平均流速 $v=10\text{m/s}$。

【解】 流体在管中流动时，流速均匀分布，可以按无旋流动处理。但受除尘器边壁作用，被迫作旋转流动，按环流作流速分配。

$$u_\theta=\frac{\Gamma}{2\pi r}=\frac{k}{r}$$

为确定 k 值，用连续性原理，流量保持不变。

$$vb=\int_{r_1}^{r_2}u_\theta \mathrm{d}r=\int_{r_1}^{r_2}k\frac{\mathrm{d}r}{r}=\ln\frac{r_2}{r_1}\cdot k$$

$$k=\frac{vb}{\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{10\times0.6}{\ln\frac{1}{0.4}}=6.56\text{m}^2/\text{s}$$

由此知道，断面流速分布是：

$$u_\theta=\frac{6.56}{r}$$

内壁 $$u_{\theta1}=\frac{6.56}{0.4}=16.4\text{m/s}$$

外壁 $$u_{\theta2}=\frac{6.56}{1}=6.56\text{m/s}$$

第四节 势 流 叠 加

势流在数学上的一个非常有意义的性质，是势流的可叠加性。

设有两势流 φ_1 和 φ_2，它们的连续性条件是由满足拉普拉斯方程来表征的：

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0$$

而这两势函数之和，$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ 也将适合拉普拉斯方程。因为

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

这就是说，两势函数之和形成新势函数，代表新流动。新流动的流速

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=u_{x1}+u_{x2}$$

$$u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=u_{y1}+u_{y2}$$

是原两势流流速的叠加。亦即在平面点上，将两流速几何相加的结果。

同样可以证明，复合流动的流函数等于原流动流函数的代数和：

$$\psi=\psi_1+\psi_2$$

显然以上的结论可以推广到两个以上的流动，也可以推广到三元流动。这样就可以将某些简单的有势流动，叠加为复杂的但实际上有意义的有势流动。

一、均匀直线流中的源流

将源流和水平匀速直线流相加，坐标原点选在源点，则流函数：

$$\psi=v_0 r\sin\theta+\frac{Q}{2\pi}\theta \tag{8-4-1}$$

由此可以用极坐标画出流速场，如图 8-12。这是绕某特殊形状物体前部的流动。

在源点 0，流速极大。离开源点，流速迅速降低。离源点较远之处，流速几乎不受影响，保持匀速 v_0。但在离源点前某一距离 x_s，必然存在着某一点 s，匀速流速和源流在该点所造成的速度，大小相等，方向相反，使该点流速为零，这一点称为驻点。它的位置 x_s 可以根据势流叠加原理来确定：

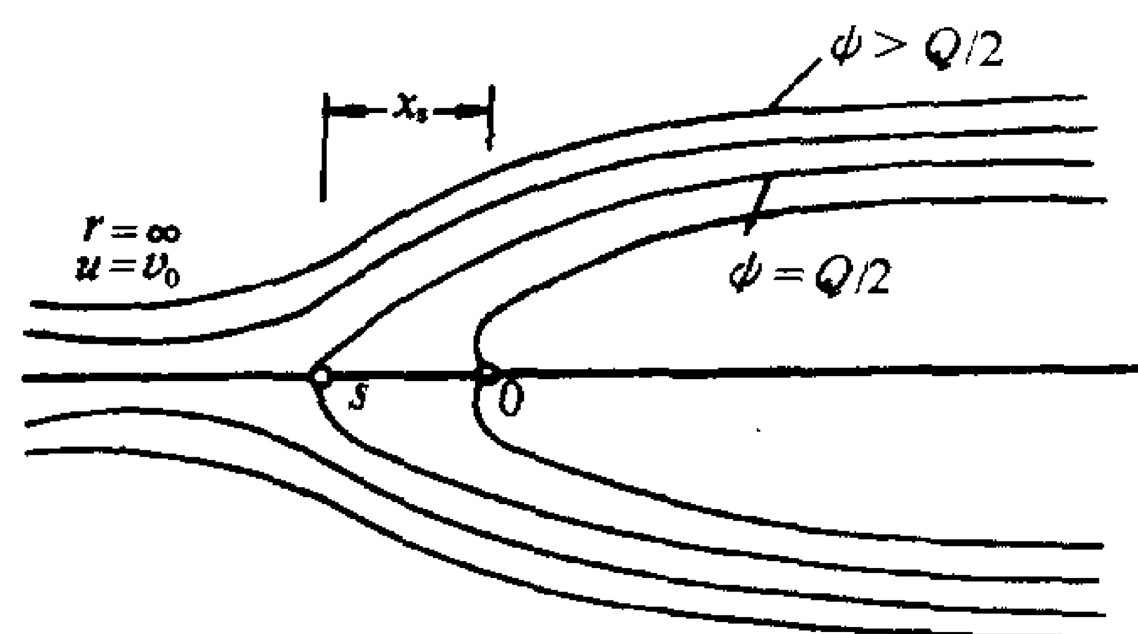


图 8-12　半无限物体

$$v_0-\frac{Q}{2\pi x_s}=0$$

$$x_s=\frac{Q}{2\pi v_0} \tag{8-4-2}$$

到达驻点的质点，不能继续向前流动，被迫两路分流。这两路分流的流线，可以换为物体的轮廓线。则得流体绕此物体流动的流场。

为求此物体的轮廓线，可将驻点的极坐标 $r=\dfrac{Q}{2\pi v_0}$，$\theta=\pi$，代入(8-4-1)式。得出驻点的流函数值：

$$\psi=v_0\left(\frac{Q}{2\pi v_0}\right)\sin\pi+\frac{Q}{2\pi}\pi=\frac{Q}{2}$$

显然，这也是轮廓线的流函数数值。则轮廓线方程为：

$$v_0 r\sin\theta+\frac{Q}{2\pi}\theta=\frac{Q}{2} \tag{8-4-3}$$

从方程可以看出，$\theta=0$，$r=\infty$，但 $r\sin\theta=y$，则 $v_0 y=\dfrac{Q}{2}$，$y=\dfrac{Q}{2v_0}$。表示物体的轮廓以 $y=$

$\dfrac{Q}{2v_0}$为渐近线。

匀速直线流和源流叠加所形成的绕流物体是有头无尾的，因此称为半无限物体。半无限物体在对称物体头部流速和压强分布的研究上很有用。这种方法的推广，是采用很多不同强度的源流，沿 x 轴排列，使它和匀速直线流叠加，形成和实际物体轮廓线完全一致或较为吻合的边界流线。这样，就可以无需进行费用巨大的实验工作，而能准确地估计物体上游端的流速分布和压强分布。

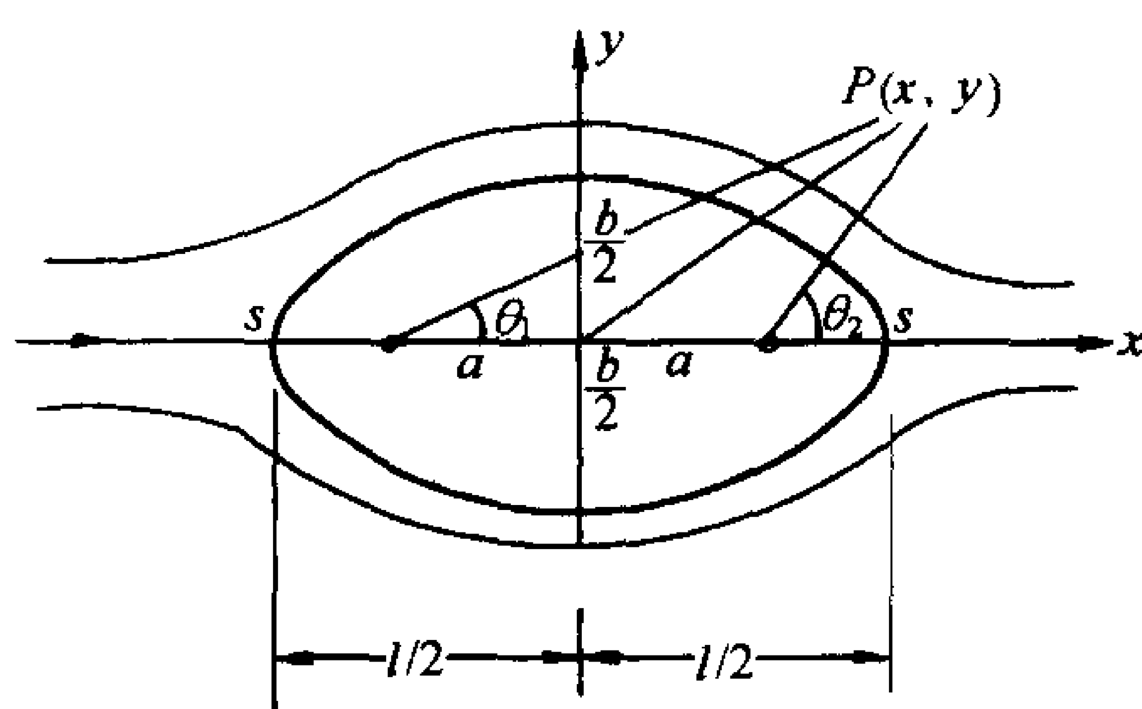


图 8-13　朗金椭圆

二、匀速直线流中的等强源汇流

为了将上述的半物体变成全物体，在匀速直线流中，沿 x 轴叠加一对强度相等的源和汇，这样的叠加势流场，可用以描述如图 8-13 所示的绕朗金椭圆的流动。

匀速直线流中的等强源汇流的流函数为：

$$\psi = v_0 y + \frac{Q}{2\pi}\left(\text{arctg}\,\frac{y}{x+a} - \text{arctg}\,\frac{y}{x-a}\right) \tag{8-4-4}$$

驻点在物体的前后，它流速为零的条件为

$$\frac{-Q}{2\pi\left(\dfrac{l}{2}-a\right)} + \frac{Q}{2\pi\left(\dfrac{l}{2}+a\right)} + v_0 = 0$$

得出

$$\frac{l}{2} = a\sqrt{1+\frac{Q}{a\pi v_0}} \tag{8-4-5}$$

驻点在 $y=0, x=\pm\dfrac{l}{2}$处。由式(8-4-4)可以看出，过驻点的流线的流函数之值为零。

为求宽度 b，将 $x=0, y=\dfrac{b}{2}$，代入 $\psi=0$。得出

$$v_0\frac{b}{2} + \frac{Q}{\pi}\text{arctg}\,\frac{b}{2a} = 0 \tag{8-4-6}$$

其中，$\dfrac{b}{2}$可以用试算法定出。

若已知流函数，则流速场可以确定，而压强分布可以根据能量方程求出。但是，绕流物体尾部情况，由于尾迹旋涡的形成，不能根据上述方法求出。但物体的前部，由于附面层很薄，而且流动处于加速区，理论推算和实测结果相符。

这种方法的发展是沿 x 轴布置源流和汇流，使强度总和为零。它们和均匀直线流叠加，使流动和实际物体更紧密相依。这种流动更有用，但数学上困难很多。

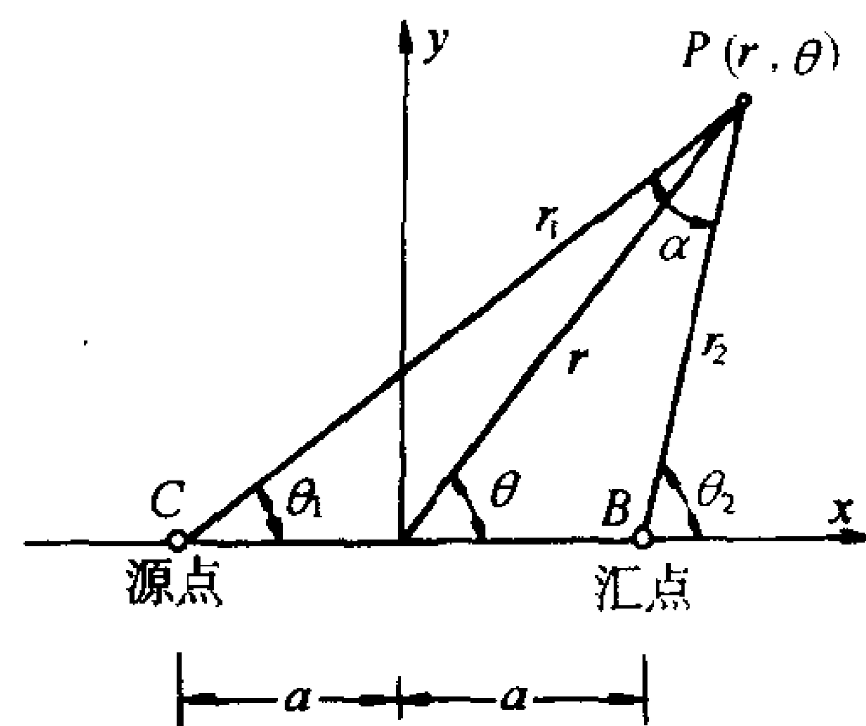


图 8-14　偶极流的推证

三、偶极流绕柱体的流动

现在将上述等强度的源流和汇流分别放在 x 轴的左侧

$(-a,0)$和右侧$(+a,0)$如图 8-14，并互相接近，使 $a\to 0$，但保持源点汇点距离 $2a$ 和强度 Q 的乘积为定值 $M=2aQ$。这种流动称为偶极流，M 称为偶极矩。

为求偶极流的流函数，先写等强源流和汇流的流函数，

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}(\theta_1-\theta_2) \tag{1}$$

从图可以看出，设 $P(r、\theta)$为流场中任一点，P 对源汇两点联结线 PC、PB 的夹角为 α 则 ψ 可写为：

$$\psi=-\frac{Q}{2\pi}\alpha \tag{2}$$

对 ΔCBP 的 θ_1 和 α 角按正弦定理，则

$$2a\sin\theta_1=r_2\sin\alpha$$

当 $a\to 0$ 时，$\alpha\to 0$，$\sin\alpha\to\alpha$，$r_2\to r$，$\sin\theta_1\to\sin\theta$。

则 $\alpha r=2a\sin\theta$。代入(2)式

$$\psi=-\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{2a\sin\theta}{r}\right)$$

代入 $M=2aQ$ 得

$$\psi=-\frac{M\sin\theta}{2\pi r} \tag{8-4-7}$$

我们使流函数等于常数来决定流线。

$$\frac{\sin\theta}{r}=c$$

写为直角坐标，代入

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

得出
$$\frac{y}{x^2+y^2}=c$$

变化得
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{1}{4c^2}$$

这是圆心在 y 轴的圆周簇，在原点与 x 轴相切，如图 8-15 所示。

单独的偶极流无实际意义，它和匀速直线流形成绕圆柱体的流动。此时的流函数为：

$$\psi=v_0r\sin\theta-\frac{M\sin\theta}{2\pi r} \tag{3}$$

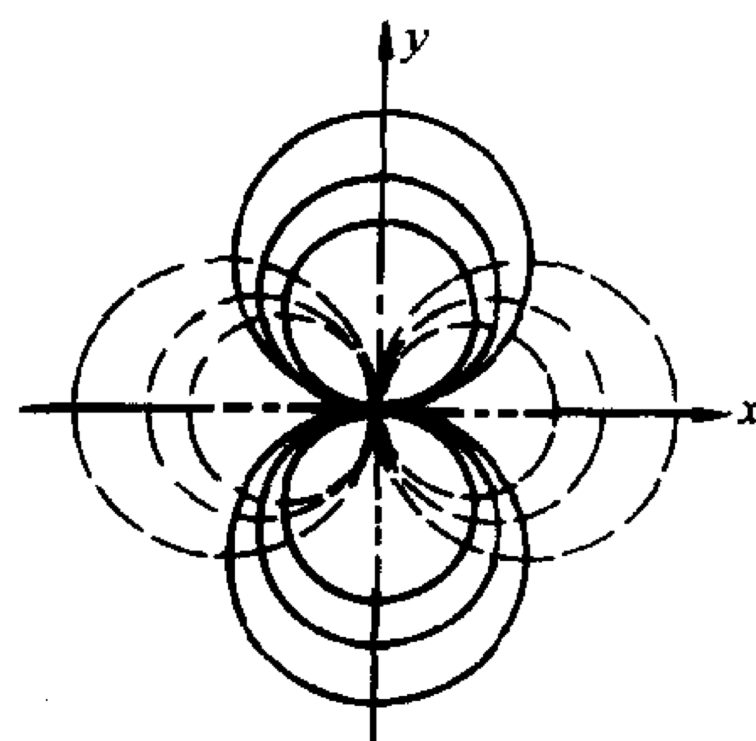


图 8-15 偶极流的流线簇

若把零流线换为物体轮廓线，并设物体轮廓线上 $r=R$，则：

$$v_0R\sin\theta-\frac{M\sin\theta}{2\pi R}=0$$

因而 $M=2\pi v_0R^2$ 代入流函数(3)式：

$$\psi = v_0\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta \tag{8-4-8}$$

速度分量为：

$$u_r = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = v_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -v_0\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

在轮廓线上，$\psi = 0$，即

$$v_0\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta = 0$$

$$r = R$$

流速分量为

$$\left.\begin{aligned} u_r &= 0 \\ u_\theta &= -2v_0\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{8-4-9}$$

最大表面速度为匀速直线流速的 2 倍。而当 $\theta = \frac{\pi}{6}$时，物体上流速等于匀速直线流速。

四、源环流

源流和环流相加，使流体既作旋转运动，又作径向流动，称为源环流。这种流动的流函数：

$$\psi = \frac{Q\theta}{2\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{8-4-10}$$

零流线方程，$\psi = 0$。得出：

$$r = e^{-\frac{Q\theta}{\Gamma}} \tag{8-4-11}$$

表明流线是对数螺旋线簇，如图 8-16。这种在半径为 r_1 的内圆周到半径为 r_2 的外圆周的流动，对工程上有重要意义。从内向外流速不断减少，则压强不断增大。径向流速和辐向流速为：

$$u_r = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$u_\theta = \frac{-\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

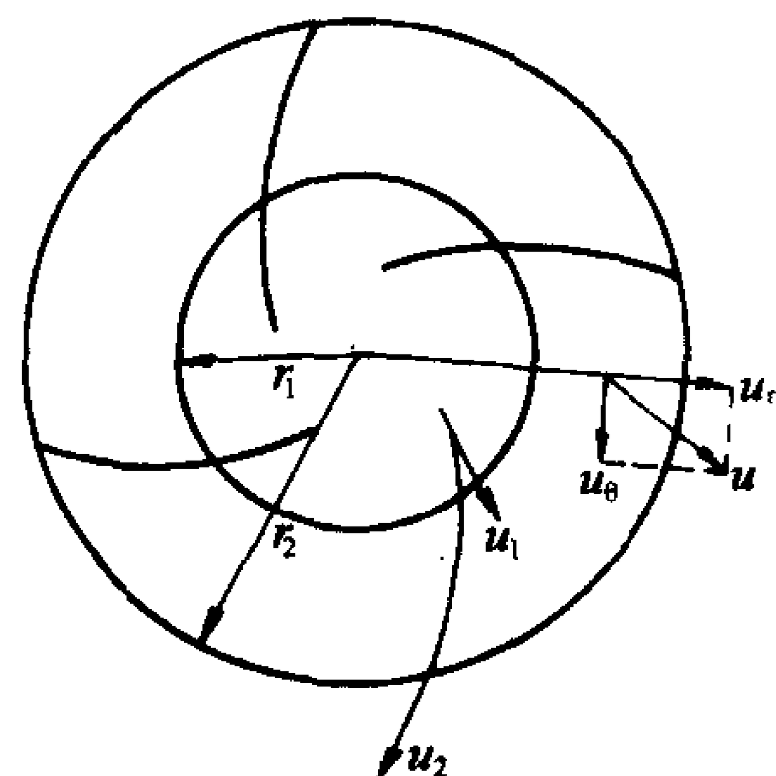


图 8-16 源环流

这样，u_r 和 u_θ 的比值$\frac{Q}{\Gamma}$保持不变。而且由于

$$(u_\theta r)_1 = (u_\theta r)_2$$

则
$$(\rho Q u_\theta r)_1 = (\rho Q u_\theta r)_2$$

即断面 1、2 的动量矩相等，作用于流体的力矩为零。说明流体和固体没有力矩作用，不存在能量交换。因此不能误认为是流体机械旋转叶轮内部的流动，而是离开叶轮后的径辐向流动。离心水泵蜗壳内的扩压流动，就是这种流动。导轮也应当按照这种流动来设计它的叶片形状。

与源环流相对应的流动是汇环流。汇环流表明水力涡轮机在导轮叶中的流动。

【例 8-5】 某山脉剖面如 8-17 图。山高为 300m，风速为 48km/h。它的地形可近似地用半无限物体来模拟。为了用作滑翔运动的参数，求出流函数，势函数及半无限物体轮廓线。推导纵向流速等值线方程。

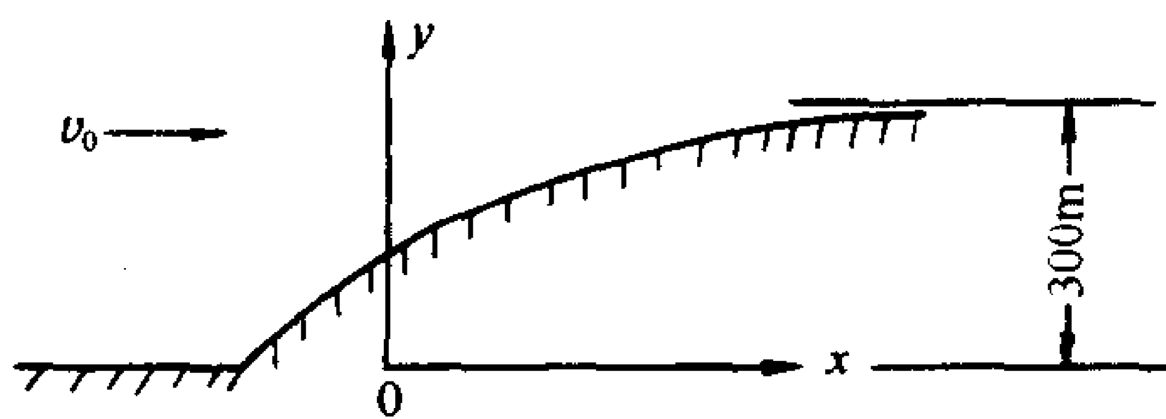


图 8-17 半无限物体的实例

【解】 首先求出流函数及势函数：

$$v_0=\frac{48000}{3600}=13.33\text{m/s}$$

$$Q=2\times13.33\times300=8000\text{m}^3/\text{s}$$

$$\frac{Q}{2\pi}=1270$$

流函数及势函数：

$$\psi=v_0y+\frac{Q}{2\pi}\text{arctg}\,\frac{y}{x}=13.33y+1270\text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

$$\varphi=13.33x+1270\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

半无限物体的轮廓线：

$$13.33y+1270\text{arctg}\,\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\times8000=4000$$

纵向流速等值线方程：

$$u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=635\times\frac{2y}{x^2+y^2}=k$$

即：

$$\frac{y}{x^2+y^2}=c$$

可见，纵向流速等值线为一系列圆

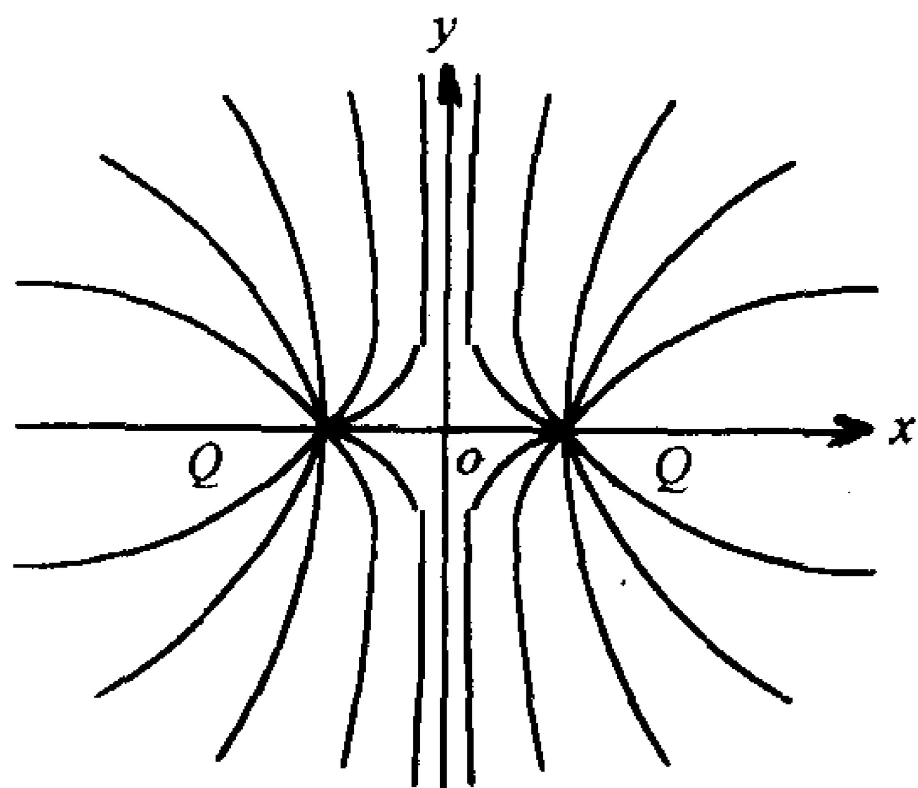


图 8-18 等强度两源流

【例 8-6】 如图 8-18 所示等强度两源流的源点位于 x 轴，距原点为 a。求流函数。并确定滞点位置。

【解】 设两源流的强度均为 Q，则流函数 ψ 为：

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}\left(\text{arctg}\,\frac{y}{x+a}+\text{arctg}\,\frac{y}{x-a}\right)$$

可以看出，$y=0$ 时，$\psi=0$。$x=0$ 时，$\psi=0$。即 x 轴和 y 轴均为零流线。

$$u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{x+a}{y^2+(x+a)^2}+\frac{x-a}{y^2+(x-a)^2}\right)$$

$$u_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{y}{y^2+(x+a)^2}+\frac{y}{y^2+(x-a)^2}\right)$$

可以看出，$x=0$ 时，$u_y=\dfrac{Q}{2\pi}\cdot\dfrac{2y}{y^2+a^2}=\dfrac{Qy}{\pi(y^2+a^2)}$，$u_x=0$

流动在原点，流速为零，原点为滞点。沿 y 轴上下分流，流速值对称于原点。

$$y=0\text{ 时}\qquad u_y=0\qquad u_x=\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}\right)$$

沿 x 轴流速值对称于原点。

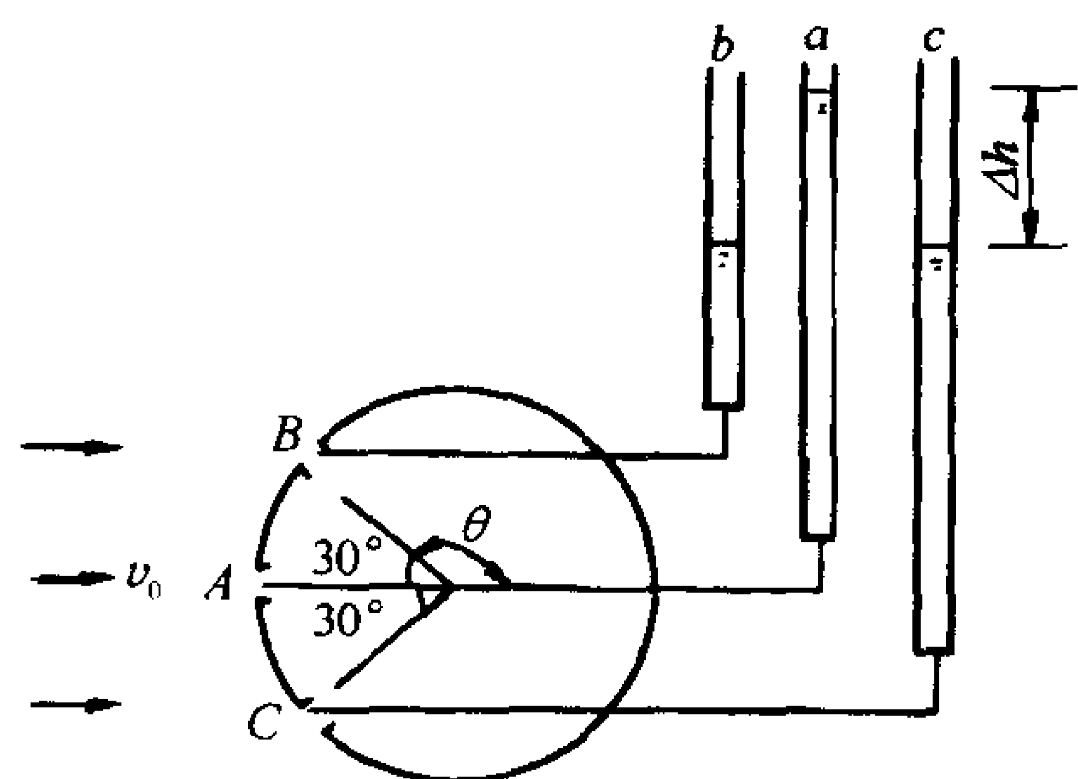


图 8-19　流速的测定

从流线图形中可以看出，由于 y 轴是流线，它可以用固体壁面来代替，得出的流动是半无限平面中有一强度为 Q 的源流的流动。也可以是一个象限内（$\frac{1}{4}$无限平面）沿壁面有一强度为$\frac{Q}{2}$的源流的流动。

【例 8-7】 图 8-19 为一种测定流速的装置，圆柱体上开三个相距为 30°的压力孔 A、B、C，分别和测压管 a、b、c 相连通。将柱体置放于水流中，使 A 孔正对水流，其方法是旋转柱体使测压管 b、c 中水面同在一水平面为止。当 a 管水面高于 b、c 管水面 $\Delta h = 3\text{cm}$ 时，求流速 v_0。

【解】 根据柱体表面流速分布公式：

$$v_s = -2v_0\sin\theta$$

当 $\theta = 30°$时　　$v_B = v_C = 2v_0 \times \frac{1}{2} = v_0$

$$v_A = 0$$

A、B 两点能量方程：

$$\frac{p_A}{\gamma} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_A - p_B}{\gamma} \qquad v_0 = \sqrt{2g\frac{p_A - p_B}{\gamma}}$$

当$\frac{p_A - p_B}{\gamma} = 0.03\text{m}$　　$v_0 = \sqrt{19.6 \times 0.03} = 0.767\text{m/s}$

【例 8-8】 图 8-20 中流速为 v_0、压强为 p_0 的均匀气流，流过半径为 r_0 的柱体。求柱体所受的水平分压力 F_x 和铅直分压力 F_y。

【解】 根据柱体表面流速分布公式：

$$u_s = -2v_0\sin\theta$$

沿柱体零流线写理想流体能量方程：

$$p_0 + \frac{\rho}{2}v_0^2 = p + \frac{\rho}{2}(4v_0^2\sin^2\theta) = c$$

$$p = c - 2\rho v_0^2\sin^2\theta$$

在柱体上取 $ds = r_0 d\theta$，作用于此微段的压力 $p ds = p r_0 d\theta$，分解为 x 方向及 y 方向的分力：

$$dF_x = -p r_0\cos\theta d\theta \quad dF_y = -p r_0\sin\theta d\theta$$

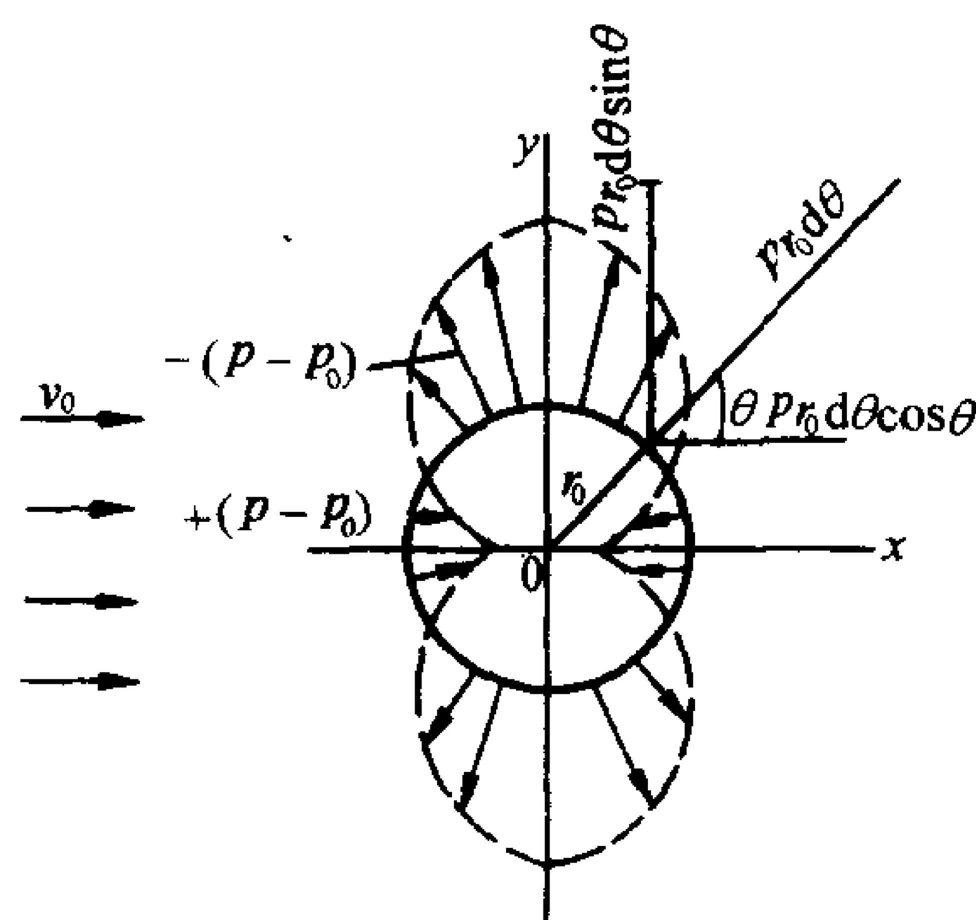


图 8-20　柱面压力

积分求合力：

$$F_x = -\int_0^{2\pi} p r_0\cos\theta d\theta = -\int_0^{2\pi}(c - 2\rho v_0^2\sin^2\theta) r_0\cos\theta d\theta$$

$$F_y = -\int_0^{2\pi} p r_0 \sin\theta \mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi} (c - 2\rho v_0^2 \sin^2\theta) r_0 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

但上项积分式中 $\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta$、$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$、$\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta$、$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$ 均等于零，所以

$$F_x = F_y = 0$$

即理想流体作无旋运动绕过柱体，绕柱体的合力为零。

*第五节　平面无旋流动的有限差分法

计算流体力学在能源开发，环境保护，航空和宇航等诸多领域内得到日益广泛的应用，随着现代大型高速计算机的出现和发展，它已成为流体力学中不可缺少的重要分支。

在众多的流体力学数值方法中，有限差分法是发展较悠久，方法较成熟的一种计算方法。流体力学中的有限差分法主要包括三部分内容：物理问题的数学描述，流场的离散化和用差分逼近微分将微分方程等化为代数方程组，最后是数值求解寻求流场中离散点上物理量（流动参数）的近似数值解。

本节将通过恒定不可压缩流体平面势流的有限差分解阐明有限差分法的基本思想、概念、解题步骤和其它一些问题。考虑平行壁面间的圆柱绕流，见图 8-21。所有空间尺度以圆柱半径为单位。有限差分法往往考虑有限的区域，因此，设在离圆柱中心 3.5 倍半径的上游处流动受圆柱的扰动影响可忽略，流速均匀分布。该处速度 u 沿 x 轴方向，为方便起见，设大小为一个单位。由本章内容，已知流动是对称的，故可取 *ABCDEA* 部分流场求解。

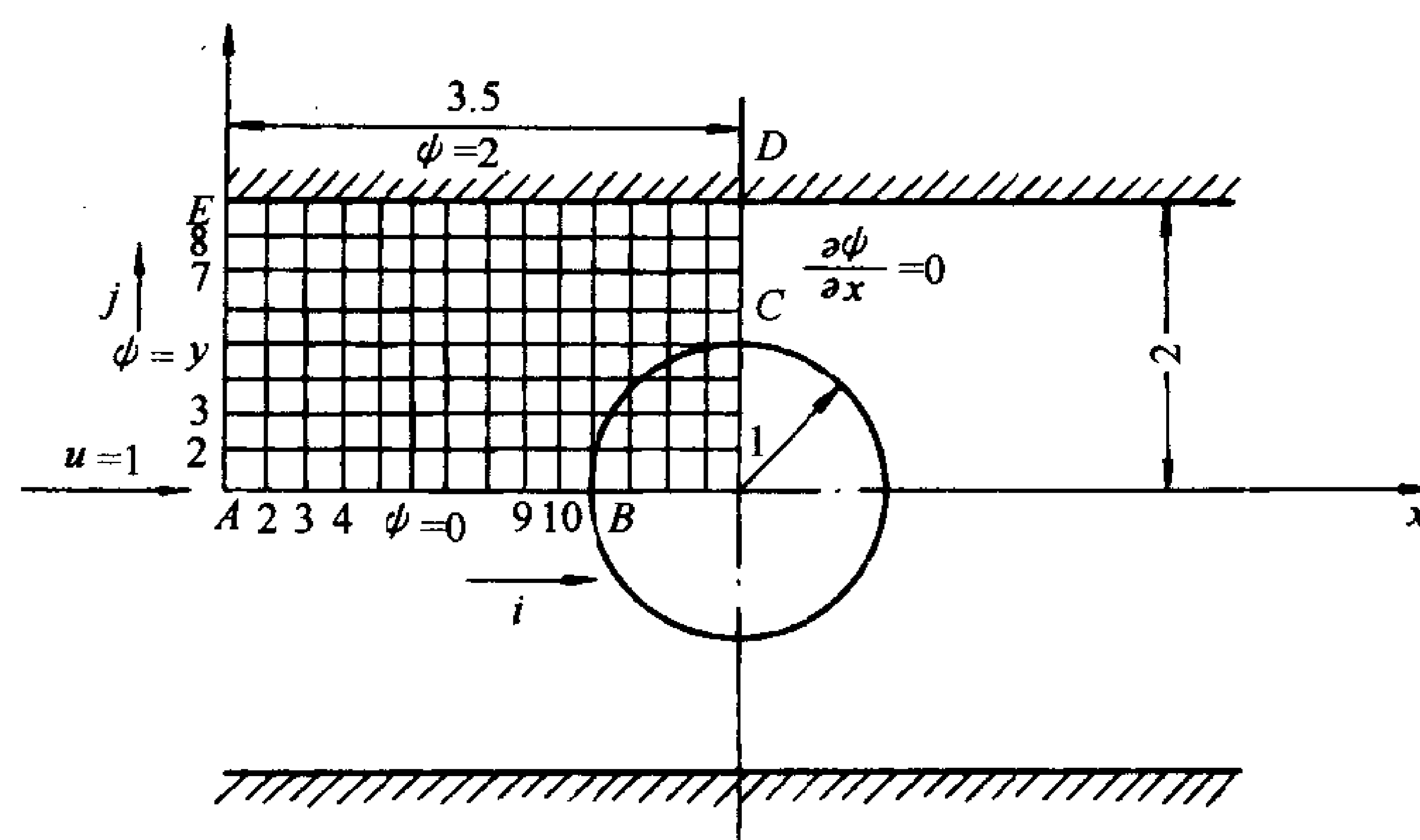


图 8-21　平行壁间圆柱绕流

一、数学模型

考虑到边界条件的特点，采用流函数 ψ 作为未知函数求解，而不采用势函数作为未知函数。

流函数 ψ 应满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{8-5-1}$$

边界条件为

$$\begin{cases} 在 AB 上 & \psi=0 \\ 在 BC 上 & \psi=0 \\ 在 DE 上 & \psi=2 \\ 在 AE 上 & \psi=y \\ 在 CD 上 & \dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0(流场关于 OCD 对称) \end{cases}$$

二、流场离散化，网格与结点

作正方形网格，取步长 $\Delta x=\Delta y=h=0.25$，指标 i 和 j 的编号见图 8-21，$i=1,2\cdots\cdots,15,j=1,2,\cdots\cdots,9$，流场离散化后，最终的解就是网格各交点上的流函数 ψ 值。

网格的交点称为结点，用编号 (i,j) 表示，由于流场边界不一定恰好与网格线重合，因此，流场中的结点分三种：

正则内点：在流场内部，其相邻的结点也在流场内部；

非正则内点：本身在流场内部，但其相邻结点至少有一个在流场之外；

边界点：正好位于流场边界上。

位于流场外的网格交点自然不在计算范围内。

三、差分和差商

从微分学知道，导数为

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname*{Lim}_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname*{Lim}_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

dy,dx 分别是函数和自变量的微分；Δy、Δx 分别称为函数和自变量的差分，而 $\Delta y/\Delta x$ 为函数对自变量的差商。在差分方法中，Δx 总是取某一小的正数。函数的差分一般有三种基本形式：

$$\begin{cases} 向前差分 & \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \\ 向后差分 & \Delta y=f(x)-f(x-\Delta x) \\ 中心差分 & \Delta y=f\left(x+\dfrac{1}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\dfrac{1}{2}\Delta x\right) \end{cases} \tag{8-5-2}$$

对应于二阶导数，将一阶差分再作一阶差分，结果称为二阶差分，记作 $\Delta^2 y$。例如二阶中心差分为

$$\begin{aligned}\Delta^2 y &= \Delta(\Delta y) = \Delta\left[f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)\right] \\ &= \Delta f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)-\Delta f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right) \\ &= [f(x+\Delta x)-f(x)]-[f(x)-f(x-\Delta x)] \\ &= f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)\end{aligned} \tag{8-5-3}$$

同样可得二阶的向后差分和向前差分及任意阶的差分。

函数的差分与自变量的差分之比，称为函数对自变量的差商。一阶中心差商为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x+\dfrac{1}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\dfrac{1}{2}\Delta x\right)}{\Delta x} \tag{8-5-4}$$

或

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

二阶中心差商为

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{8-5-5}$$

以上一元函数的差分和差商的概念,可推广到多元函数 $f(x,y,\cdots\cdots)$。

显然,当自变量的差分(增量)趋近于零时,差商的极限即导数。因此,在数值计算中,用差分代替微分,用差商代替导数,由此将微分方程(或方程组)化成代数方程组。在本例中,我们采用中心差分。

四、差分方程

将微分方程中的导数用相应的差商近似代替所得到的方程称差分方程。结点的类型不同,差分方程的构成方法也有所差别。

(1) 在正则内点(不与 BC 相邻的内点),图 8-22(a)。运用式(8-5-5),由式(8-5-1)可得

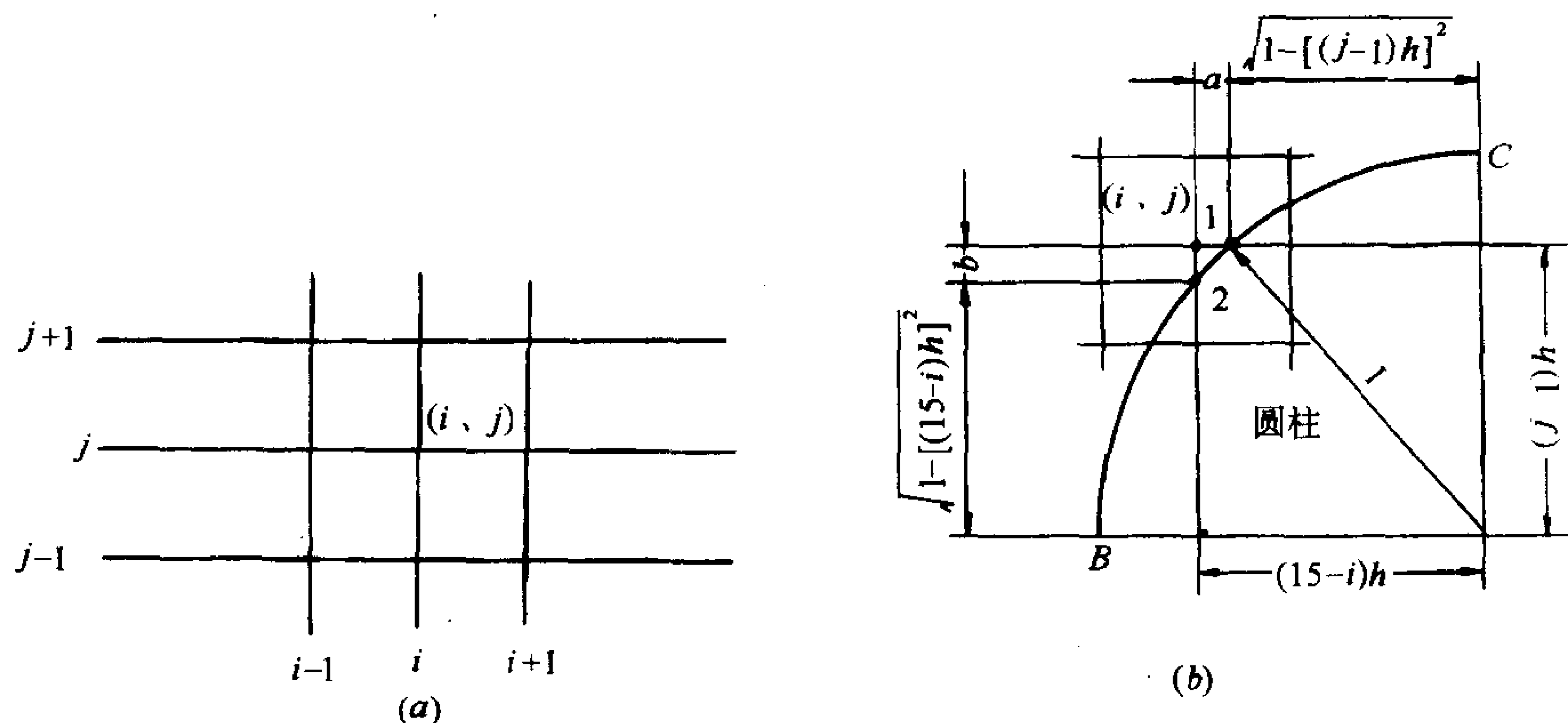


图 8-22 流场内结点

(a)正则内点;(b)非正则内点

$$\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{h^2}=0$$

或写成

$$\psi_{i,j}=\frac{1}{4}(\psi_{i-1,j}+\psi_{i,j-1}+\psi_{i+1,j}+\psi_{i,j+1}) \tag{8-5-6}$$

(2) 在非正则内点(与 BC 相邻的点),图 8-22(b)。在非正则内点,差分处理方法有直接转移法、线性插值法和不等距差分法等,在此,我们采用不等距差分法。

设点(i,j)是非正则的点,其相邻四结点$(i-1,j)$,$(i,j+1)$,1,2 中,点$(i-1,j)$和$(i,j+1)$在流场内;点 1 和点 2 是边界 S_1 与网格线的交点。相应步长分别是 h,h,a,b。

为了构造点(i,j)的 Laplace 方程的差分方程,我们用下列线性函数来逼近:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j}=\alpha_P\psi_{i,j}+\alpha_Q\psi_{i-1,j}+\alpha_R\psi_{i,j}+\alpha_A\psi_1+\alpha_B\psi_2 \tag{8-5-7}$$

根据泰勒级数展开

$$\begin{cases}\psi_{i-1,j}=\psi_{i,j}-h\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i,j}+\dfrac{1}{2}h^2\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{i,j}+O(h^3)\\ \psi_{i,j+1}=\psi_{i,j}+h\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j}+\dfrac{1}{2}h^2\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j}+O(h^3)\\ \psi_1=\psi_{i,j}+a\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i,j}+\dfrac{1}{2}a^2\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{i,j}+O(a^3)\\ \psi_2=\psi_{i,j}-b\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j}+\dfrac{1}{2}b^2\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j}+O(b^3)\end{cases}$$

略去高阶小量代入式(8-5-7),得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j}&=(\alpha_p+\alpha_Q+\alpha_R+\alpha_A+\alpha_B)\psi_{i,j}\\&-(h\alpha_Q-a\alpha_A)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i,j}-(b\alpha_B-h\alpha_R)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j}\\&+\frac{1}{2}(h^2\alpha_Q+a^2\alpha_A)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{i,j}+\frac{1}{2}(h^2\alpha_R+b^2\alpha_B)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j}\end{aligned}$$

比较等式左右两边,得

$$\begin{cases}\alpha_p+\alpha_Q+\alpha_R+\alpha_A+\alpha_B=0\\ h\alpha_Q-a\alpha_A=0\\ b\alpha_B-h\alpha_R=0\\ \dfrac{1}{2}(h^2\alpha_Q+a^2\alpha_A)=1\\ \dfrac{1}{2}(h^2\alpha_R+b^2\alpha_B)=1\end{cases}$$

解此方程组,得

$$\begin{cases}\alpha_p=-2\left(\dfrac{1}{ah}+\dfrac{1}{bh}\right) & \alpha_Q=\dfrac{2}{h(a+h)}\\ \alpha_R=\dfrac{2}{h(b+h)} & \alpha_A=\dfrac{2}{a(a+h)}\\ \alpha_B=\dfrac{2}{b(b+h)}\end{cases}$$

代入式(8-5-7),且考虑到$(\partial^2\psi/\partial x^2+\partial^2\psi/\partial y^2)=0$,则有

$$\psi_{i,j}=\left[\frac{\psi_{i-1,j}}{h(a+h)}+\frac{\psi_{i,j+1}}{h(b+h)}+\frac{\psi_1}{a(a+h)}+\frac{\psi_2}{b(b+h)}\right]\Big/\left(\frac{1}{ah}+\frac{1}{bh}\right)\tag{8-5-8}$$

本例中,$\psi_1=\psi_2=0$。由图 8-22(b),注意到流场的分划,可知

$$a=(15-i)h-\sqrt{1-[(j-1)h]^2}$$

$$b=(j-1)h-\sqrt{1-[(15-i)h]^2}$$

当 $a<0$ 或 $b<0$ 时，点 (i,j) 在流场外部；

当 $a>h$ 时，取 $a=h,\psi_1=\psi_{i+1,j}$；

当 $b>h$ 时，取 $b=h,\psi_2=\psi_{i,j-1}$；

当 $a>h$ 和 $b>h$ 时，取 $a=b=h,\psi_1=\psi_{i+1,j},\psi_2=\psi_{i,j-1}$。此时非正则内点的差分方程变成了正则内点的差分方程。

(3) AB 上的结点

$$\psi_{i,1}=0,\quad i=1,2,\cdots,11$$

(4) AE 上的结点

$$\psi_{1,j}=(j-1)h,\quad j=2,3,\cdots\cdots,8$$

(5) DE 上的结点

$$\psi_{i,9}=2,\quad i=1,2,\cdots,15$$

(6) CD 上的结点

设点 (i,j) 为 CD 上的结点，点 $(i+1,j)$ 为沿 x 方向距点 (i,j) 为 $\Delta x=h$ 处虚加的点，采用中心差商

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2h}$$

由于 $(\partial\psi/\partial x)_{i,j}=0$，可得

$$\psi_{i+1,j}=\psi_{i-1,j} \tag{8-5-9}$$

因为在点 (i,j) 同样满足 Laplace 方程，因而点 (i,j) 的差分方程为

$$\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{h^2}=0$$

将式(8-5-9)代入，得

$$\psi_{i,j}=\frac{1}{4}(2\psi_{i-1,j}+\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j+1}) \tag{8-5-10}$$

$$i=15,\quad j=6,7,8$$

为了计算方便，计算时取 $i=1,2,\cdots,15,j=1,2,\cdots,9$。对位于圆柱内部(流场外)的结点流函数 ψ 值恒取零。

五、求解差分方程

由上述可知，恒定不可压缩流体势流的差分格式是一线性代数方程组，其解法有简单迭代法，Gauss—Seidel 迭代法，松弛法等。我们采用 Gauss—Seidel 迭代法求解，其迭代算式为

$$\psi_{i,j}^{k+1}=\frac{1}{4}(\psi_{i-1,j}^{k+1}+\psi_{i,j-1}^{k+1}+\psi_{i+1,j}^{k}+\psi_{i,j+1}^{k})$$

详细解法，请参阅有关著作。当所有各点前后两次迭代流函数差值的绝对值小于某给定值 ε 时，认为迭代收敛，计算结束。

差分方程和其定解条件(初始条件和边界条件)统称为差分格式。

六、计算程序

程序说明。

计算程序名:PCYLIND

变量名:PSI-ψ,H-h,A-a,B-b,I-i,J-j,*XRANGE-DE* 边长,*YRANGE-AE* 边长,*RR* -圆柱半径,*ITER*-迭代次数,*BB*-作储存老的 ψ 值之用,*AA*-新老 ψ 差值中绝对值最大的值,E-ε。

源程序为:

```
      PROGRAM PCYLIND
      DIMENSION PSI(15,9)
      CHARACTER GRAPH(100)
      CHARACTER SYMBOL(9)/'0','','*','','1','','+','','2'/
      DATA XRANGE,YRANGE,RR,NX/3.5,2.0,1.0,100/
      DATA E,H,ITER/0.01,0.25,0/
      NI=XRANGE/H+1.1
      NJ=YRANGE/H+1.1
      N1=(XRANGE-RR)/H+0.1
      N2=RR/H+1.1
      N3=NJ-1
      DO 10 I=1,NI
      DO 10 J=1,NJ
10    PSI(I,J)=0.0
      DO 20 J=2,N3
20    PSI(1,J)=(J-1)*H
      DO 30 I=1,NI
30    PSI(I,NJ)=N3*H
40    ITER=ITER+1
      DO 50 I=2,NI
      DO 60 J=2,N3
      BB=PSI(I,J)
      IF(J.LE.N2)THEN
      IF(I.LE.N1)GOTO 70
      A=(J-1)*H-SQRT(1-((NI-I)*H)**2)
      B=(NI-I)*H-SQRT(1-((J-1)*H)**2)
      IF(A.LE.0.0.OR.B.LE.0.0)GOTO 60
      IF(A.GT.H)A=H
      IF(B.GT.H)B=H
      PSI(I,J)=H*((PSI(I-1,J)/H+PSI(I+1,J)/B)/(B+H)+
      *(PSI(I,J-1)/A+PSI(I,J+1)/H)/(A+H))/(1/A+1/B)
      GOTO 80
```

```
      ELSE
      IF(I.NE.NI)GOTO 70
      PSI(I,J)=0.25*(2*PSI(I-1,J)+PSI(I,J-1)+PSI(I,J+1))
      GOTO 80
      END IF
70    PSI(I,J)=0.25*(PSI(I-1,J)+PSI(I,J-1)+PSI(I+1,J)+PSI(I,J+1))
80    AAA=ABS(PSI(I,J)-BB)
      IF(I.EQ.2.AND.J.EQ.2)AA=AAA
      IF(AAA.LE.AA)GOTO 60
      AA=AAA
60    CONTINUE
50    CONTINUE
      IF(ITER.EQ.50)GOTO 90
      IF(AA.GT.E)GOTO 40
90    WRITE(6,100)ITER((PSI(I,J),J=1,NJ),I=1,NI)
100   FORMAT("1",5X,5HITER:,I2,15(//50X,9F7.2//),"1"
      //////////)
      NY=0.6*NX*YRANGE/XRANGE+0.001
      DELX=XRANGE/NX
      DELY=YRANGE/NY
      DELTA=PSI(1,NJ)/9.0
      DO 110 JSYMBL=1,NY
      Y=YRANGE-(JSYMBL-0.5)*DELY
      J=1+Y/H
      Y1=Y-(J-1)*H
      Y2=H-Y1
      DO 120 ISYMBL=1,NX
      X=(ISYMBL-0.5)*DELX
      XX=XRANGE-X
      IF((Y.GT.RR).OR.(Y.LE.RR.AND.XX.GT.RR))GOTO 130
      R=SQRT(XX*  *'2+Y*  *2)
      IF(R.LT.RR)GOTO 140
130   I=1+X/H
      X1=X-(I-1)*H
      X2=H-X1
      A1=X2*Y2
      A2=X2*Y1
      A3=X1*Y1
      A4=X1*Y2
```

```
      PSIO=(A1 * PSI(I,J) + A2 * PSI(I,J+1) + A3 * PSI
              (I+1,J+1) + A4 * PSI(I+1,J))/H * * 2
      NRANGE=1+PSIO/DELTA
      GRAPH(ISYMBL)=SYMBOL(NRANGE)
      GOTO 120
  140 GRAPH(ISYMBL)=''
  120 CONTINUE
  110 WRITE(6,200)GRAPH
  200 FORMAT(20X,100A1)
      WRITE(6,210)
  210 FORMAT(////43X,20HFIGURE:CHANNEL FLOW,
   *              26H PAST A CIRCULAR CYLINDER.)
      STOP
      END
```

程序中标号 100 的语句及其以前的语句是计算求解用的。该语句以后是把求解结果用图形打印出来。见图 8-23。

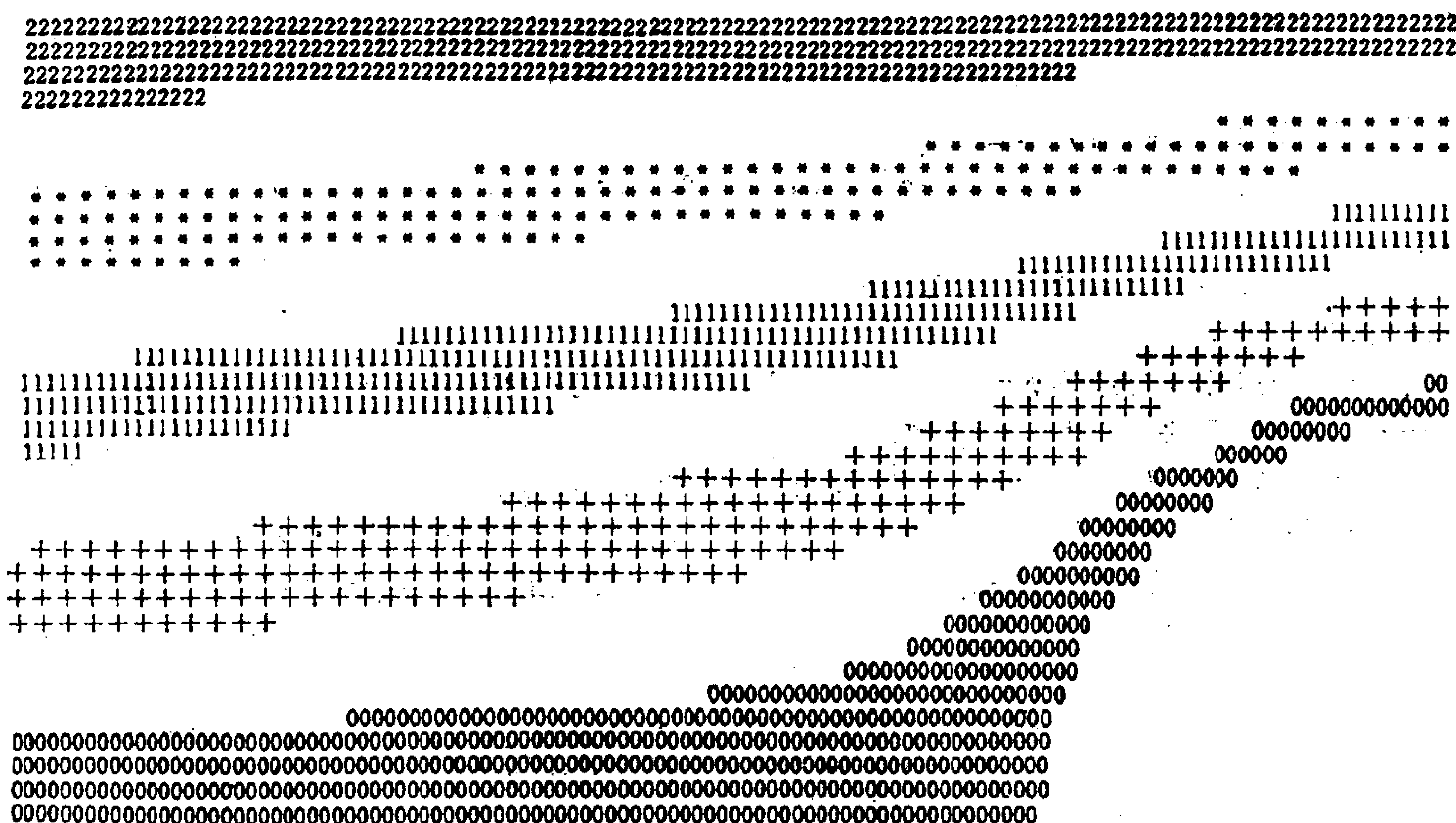


图 8-23 流线图

图 8-23 中分 9 个区域:5 个用符号“0”、“+”、“1”、“*”和“2”表示,4 个为空白区域。每一个区域中流函数 ψ 的变化幅度为 2/9。图 8-23 相当于流线图。

以上是有限差分法的最基本的一些概念和解题步骤等。此外,在用差分逼近微分时,差分方程和定解条件均应具备一定的条件,这就是相容性、收敛性和稳定性。

当空间步长和时间步长趋近于零时,由于用差分格式近似代替微分问题所引起的误差,称为截断误差,也趋于零,则称该差分格式是相容的;反之,称为不相容。不相容的差分格式不能用来代替原定解问题。

所谓收敛性是指步长趋于零时，差分格式的解是否趋于微分方程定解问题的解的性质。换句话说，如果微分方程定解问题的解和差分格式的不含有舍入误差及其它任何误差的精确解的差值，即离散误差，当步长趋于零时，也趋于零，则称此差分格式是收敛的。

相容性是收敛性的必要条件，但不一定是充分条件。相容性是在差分格式与微分问题有同一解的基础上进行讨论的。

在有限差分法的具体运算时，计算误差不可避免，如果某种格式在某一定条件下，在计算中某处产生的误差对以后计算的影响越来越小或这种影响保持在某个限度以内，那么就称这个差分格式在给定的条件下稳定。

差分格式的相容性，收敛性和稳定性都是针对特定的微分问题而言的，离开具体的微分问题孤立地研究某种格式是没有意义的。尽管有限差分法在计算流体力学的应用中具有悠久的历史和较成熟的发展，但差分格式的相容性，收敛性和稳定性对许多具体的流动问题在理论上尚未彻底解决。

除上述问题外，各种不同的差分格式，区域划分，各类边界条件的处理和差分格式的求解等构成了有限差分法的复杂而丰富的内容。至于计算流体力学中的其它方法，也已有大量的教材、专著和文献资料予以介绍。

第六节　绕流运动与附面层基本概念

在绕流中，流体作用在物体上的力可以分为两个分量：一是垂直于来流方向的作用力，叫做升力；另一是平行于来流方向的作用力，叫做阻力。本章主要讨论绕流阻力。绕流阻力可以认为由两部分组成，即摩擦阻力和形状阻力。实验证明，象水和空气这样一些粘性小的流体在绕过物体运动时，其摩擦阻力主要发生在紧靠物体表面的一个流速梯度很大的流体薄层内。这个薄层就叫附面层。形状阻力主要是指流体绕曲面体或具有锐缘棱角的物体流动时，附面层要发生分离，从而产生旋涡所造成的阻力。这种阻力与物体形状有关，故称为形状阻力。这两种阻力都与附面层有关，所以，我们先建立附面层概念。

一、附面层的形成及其性质

图 8-24 所示为绕平板的绕流运动。来流流速 u_0 是均匀分布的，它的方向和平板平行。如果平板对流动不产生影响，则流经平板上的流速将没有任何变动，仍保持均匀分布。但粘

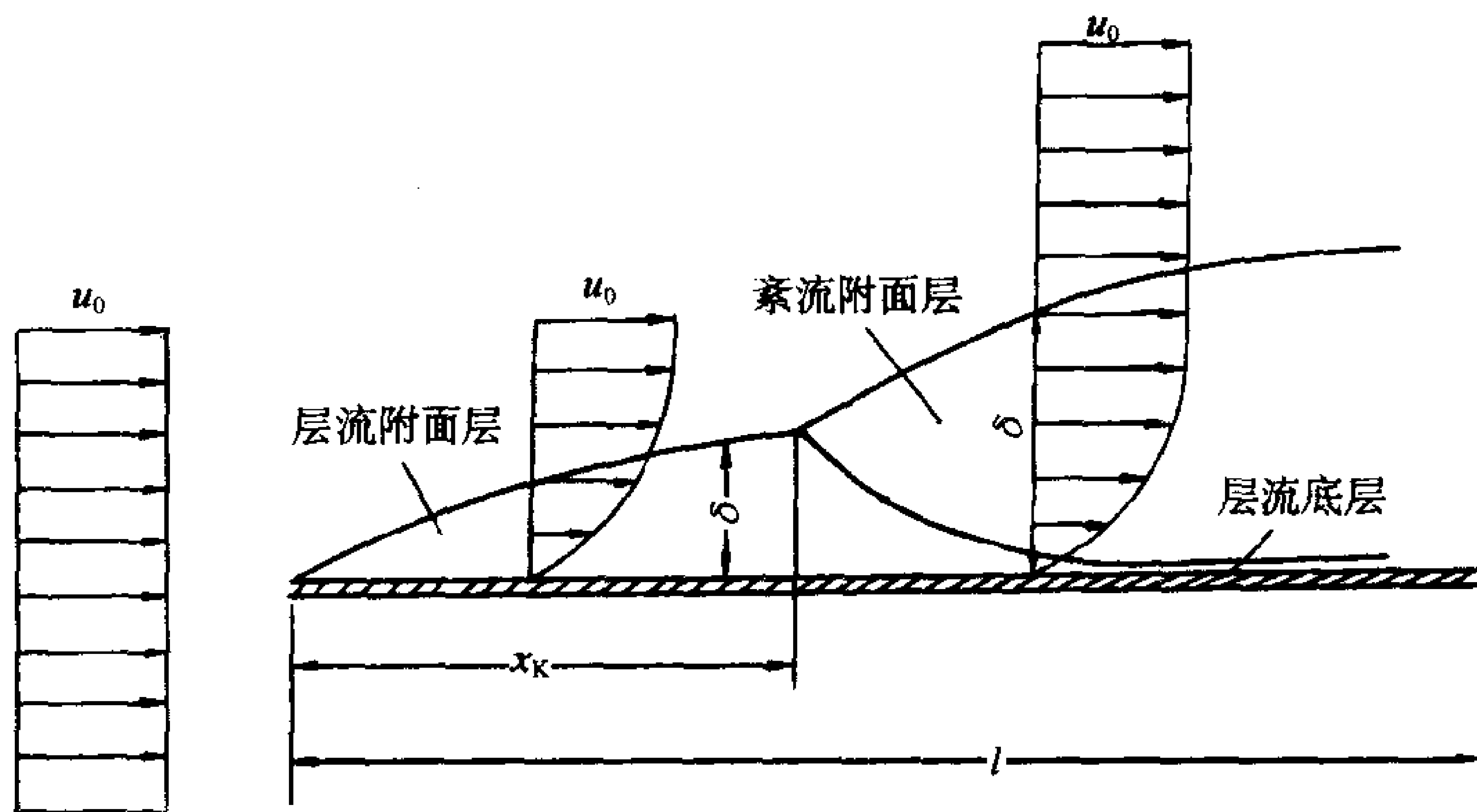


图 8-24　附面层概念

性作用使紧靠表面的质点流速为零。在垂直于平板方向,流速急剧增加,迅速接近未受扰动时的流速 u_0。这样,流场中就出现了两个性质不相同的流动区域。紧贴物体表面的一层薄层,流速低于 u_0,流体作粘性流体的有旋流动,称为附面层。在附面层边沿以外,流体作理想流体的无旋流动,速度保持原有的势流速度,称为势流区。在实际计算中,要确定附面层和势流区之间的界限是困难的。虽然物体表面附近流速梯度是很大的,但离开表面稍远,流速梯度即迅速变小,流速变化很慢,渐近地趋于外部流动,很难确定流速为 u_0 的附面层边界。为此,一般把速度等于 $0.99u_0$ 处作为两区间的分界,u_0 为未受粘性影响的速度,这样,边界层的厚度就是确定的了。

一般地对曲面物面的绕流,附面层外边界的定义为:设 u_e 为按势流理论求得的物面上的速度分布。在物面每一点的法线方向上速度恢复到 $0.99u_e$ 的点的连接面,称为附面层的外边界。速度 u_e 沿着曲面物面的切向是变化的,只有当来流方向与平板平行的平板绕流,u_e 才等于来流速度 u_0,是常数。

附面层的厚度和流态沿流向怎样变化呢?从平板迎流面的端点开始,附面层厚度 δ 从零沿流向逐渐增加。在平板前部,作层流流动。随着附面层不断加厚,到达一定距离 x_k 处,层流流动转变为紊流。在作紊流运动的附面层内,也还有一层极薄的层流底层。这和管道内流体作紊流运动的情况是一致的。附面层由层流转化为紊流的条件,也由某一临界雷诺数来判定。实验指出,如速度取来流速度 u_0,长度取平板前端至流态转化点的距离 x_k,则此临界雷诺数为:

$$\mathrm{Re}_{xk}=\frac{u_0 x_k}{\nu}=(3.5\sim5.0)\times10^5 \tag{8-6-1}$$

如长度取流态转化点的附面层厚度 δ_k,则相应的临界雷诺数为

$$\mathrm{Re}\delta_k=3000\sim3500 \tag{8-6-2}$$

附面层这一概念的重要意义,在于将流场划分为两个计算方法不同的区域,即势流区和附面层。由于附面层很薄,故可先假设附面层并不存在、全部流场都是势流区,用势流理论来计算物体表面速度。并用理想流体能量方程,根据势流速度求相应压强。然后把按上述势流理论计算的物体表面的流速和压强认为就是附面层外边界的流速和压强。附面层内边界就是物体表面,其流速为零。可以证明,在一阶近似下,附面层内沿物体表面的法线 y 方向上压强不变,等于按势流理论求解得到的物面上的相应点压强。这就是所谓的"压力穿过边界层不变"的边界层特性。这样确定的附面层外边界上的流速和压强分布就是附面层和外部势流区域流动的主要衔接条件。

二、管流附面层

附面层的概念对于管流同样是有效的。事实上,管路内部的流动除入口段外,都处于受壁面影响的附面层内。管路的沿程阻力是由附面层内的速度梯度引起的,管路的局部阻力则是附面层分离的产物,与一定的旋涡区相联系。旋涡区产生的条件与以上附面层分离的条件是一致的。

图 8-25 是管流入口段的情况,这里可清楚地看到管流的发展过程。假设速度以均匀速度流入,则在入口段的始端将保持均匀的速度分布。由于管壁的作用,靠近管壁的流体将受阻滞而形成附面层。其厚度 δ 随离管口距离的增加而增加。当附面层厚度 δ 等于管半径 r_0 后,则上下四周附面层相衔接。使附面层占有管流的全部断面,而形成充分发展的管流。

其下游断面将保持这种状态不变。从入口到形成充分发展的管流的长度称入口段长度，以 x_E 表示。根据试验资料的分析：

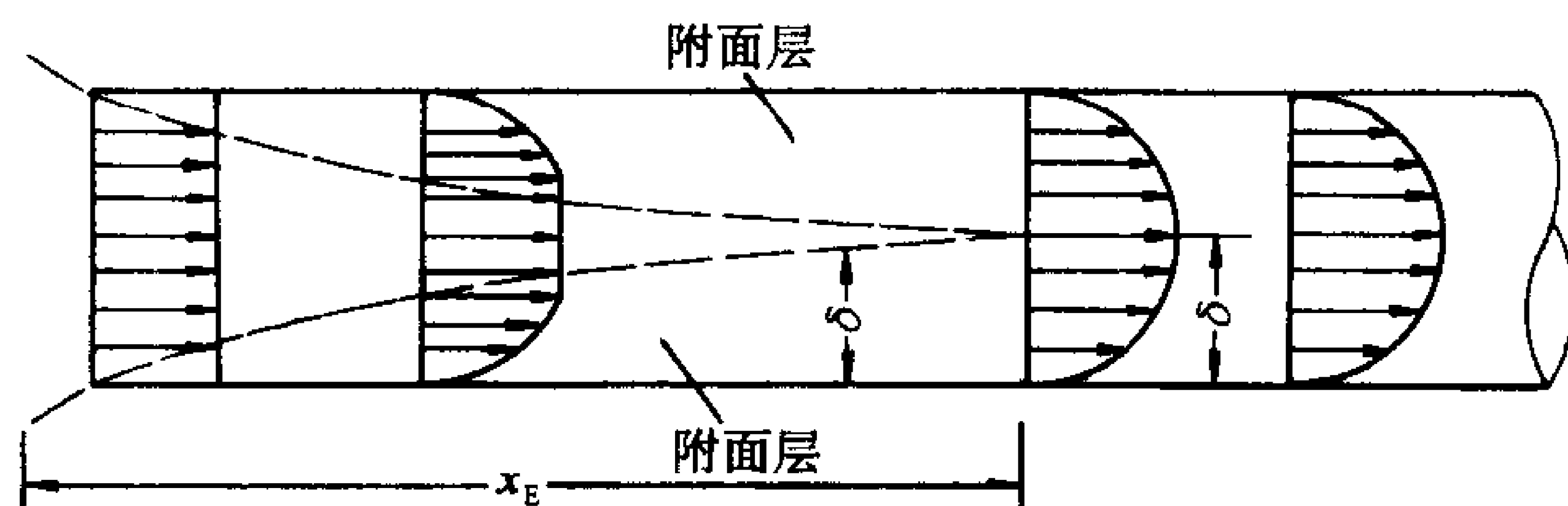


图 8-25 管流入口处的附面层

对于层流
$$\frac{x_E}{d}=0.028\mathrm{Re} \tag{8-6-3}$$

对于紊流
$$\frac{x_E}{d}=50 \tag{8-6-4}$$

显然，入口段的流体运动情况是不同于正常的层流或紊流的。因此在实验室内进行管路阻力试验时，需避开入口段的影响。

第七节 附面层动量方程

如上所述，绕流物体的阻力作用，主要表现在附面层内流速的降低，引起动量的变化。为了研究摩擦阻力，我们来分析阻力和附面层动量变化的关系，这就提出附面层的动量方程。

图 8-26a 所示，沿物体的表面取 x 轴，沿物体表面的法线取 y 轴。在物体表面取附面层微段 $ABDCA$，把微段放大，x 轴便成为直线，如图 8-26b 所示。微段 BD 长为 $\mathrm{d}x$，AC 为附面层外边界。AB、CD 垂直于物体表面。现在对微段写动量平衡方程：

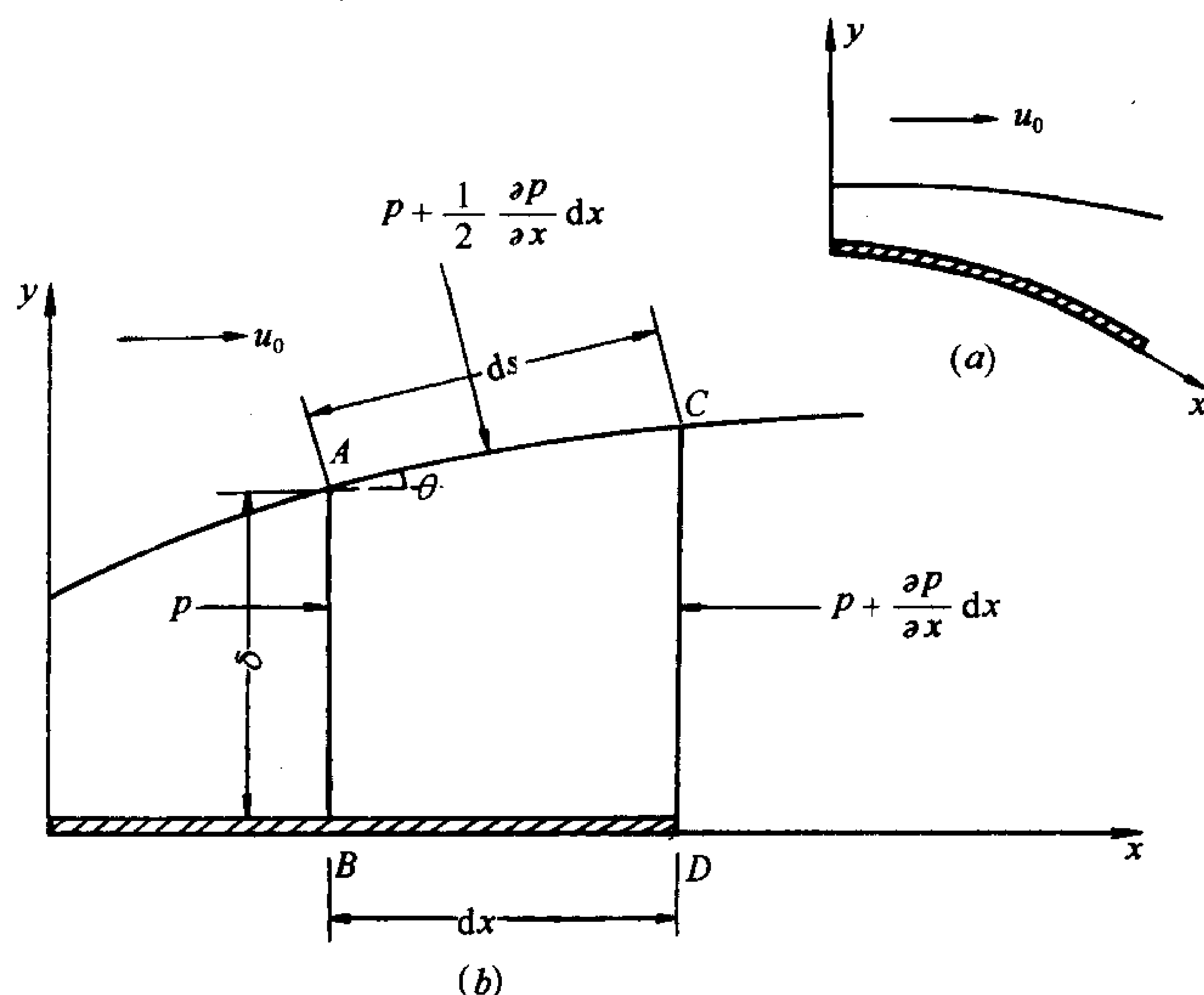


图 8-26 附面层动量方程

假设：(1) 不计质量力；

(2) 流动是恒定的平面流动；

(3) dx 为无限小，因此微小附面层的底边 BD 和外边界 AC 可看成是直线。

根据动量定理

$$K_{CD} - K_{AB} - K_{AC} = P_x \tag{a}$$

式中，K_{CD}、K_{AB}和 K_{AC}依次为单位时间内通过 CD、AB 和 AC 的流体动量在 x 轴的投影。P_x 为作用在周界 $ABDCA$ 上所有表面力在 x 轴上的投影。

取垂直于纸面的宽度为 1，则通过 AB、CD 和 AC 的质量流量分别为：

$$\rho Q_{AB} = \int_0^\delta \rho u_x dy$$

$$\rho Q_{CD} = \rho Q_{AB} + \frac{\partial \rho Q_{AB}}{\partial x}dx = \int_0^\delta \rho u_x dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x dy\right)dx$$

$$\rho Q_{AC} = \rho Q_{CD} - \rho Q_{AB} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x dy\right)dx$$

通过 AB、CD 和 AC 的动量流量分别为：

$$K_{AB} = \int_0^\delta \rho u_x^2 dy \tag{b}$$

$$K_{CD} = K_{AB} + \frac{\partial K_{AB}}{\partial x}dx = \int_0^\delta \rho u_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x^2 dy\right)dx \tag{c}$$

$$K_{AC} = \rho Q_{AC} U = U\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x dy\right)dx \tag{d}$$

式中，U 为附面层外边界上速度在 x 轴上的投影。这里将附面层外边界 AC 上的速度看成是各点相等的，都等于 A 点的速度 U。

现分析式(a)中的 P_x。为此，需分析所有作用在 $ABDCA$ 周界上的表面力(包括压力和切力)。由于$\frac{\partial p}{\partial y}=0$，所以 AB 和 CD 上作用着均匀的压强。设 AB 上作用的压强为 p，则由泰勒级数展开可知，作用在 CD 上的压强为：

$$p_{CD} = p + \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

作用在 AC 上的压强一般说来是不均匀的。在 A 点为 p，在 C 点为 $p+\frac{\partial p}{\partial x}dx$。所以平均压强为 $p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx$。$\tau_0$ 表示物体表面对流体作用的切应力。因为附面层外可以当作理想流体，所以在附面层外边界上没有切应力。这样，各表面力在 x 轴方向投影之和为：

$$P_x = p\delta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta + d\delta) + \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)ds\cdot\sin\theta - \tau_0 dx$$

因为 $$ds\cdot\sin\theta = d\delta$$

所以 $$P_x = -\frac{\partial p}{\partial x}dx\cdot\delta - \tau_0 dx - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\cdot d\delta$$

上式中最后一项为高阶无穷小量,可略去不计。并考虑到$\frac{\partial p}{\partial y}=0$,即 p 与 y 无关,因此用全微分代替偏微分后,可得:

$$P_x = -\frac{dp}{dx}dx\delta - \tau_0 dx \tag{e}$$

将(b)、(c)、(d)、(e)代入(a)式后,则可得出附面层的动量方程为:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x^2 dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_x dy = -\delta\frac{dp}{dx} - \tau_0 \tag{8-7-1}$$

附面层动量方程中有五个未知数:δ、p、u_x、U 和 τ_0。其中 U 可以用理想流体的势流理论求得。$\frac{dp}{dx}$可以按能量方程求得。剩下三个未知数 τ_0、δ 和 u_x。因此要解附面层动量方程,还需两个补充方程。即

(1) 附面层内的速度分布,$u_x = f_1(y)$。

(2) τ_0 与 δ 的关系,事实上,$\tau_0 = f_2(\delta)$可根据附面层内的速度分布求得。

通常在解附面层动量方程时,先假定速度分布 $u_x = f_1(y)$,这个假定愈接近实际,则所得结果愈正确。

*第八节　平板上层流附面层的近似计算

附面层理论用于探讨摩擦阻力的规律,而绕平板的流动,是一种只有摩擦阻力而无形状阻力的典型流动。流体以均匀速度 u_0 沿平板方向作恒定流动。由于附面层的存在不影响附面层外部的流动,因此平板附面层边界上的速度 U 处处为 u_0。即

$$U = u_0 \qquad \frac{dU}{dx} = 0$$

同时根据能量方程可知,流速不变,附面层外边界上的压强也处处相等。即

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

再由于流体不可压缩,ρ = 常数,可提到积分号之外。则式(8-7-1)对平板绕流具有如下形式:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x^2 dy - u_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \tag{8-8-1}$$

上式为计算平板附面层的基本方程式。对层流和紊流均适用。我们先研究层流附面层。

在上一节已经提到,必须补充两个方程,才能解出所需要的量。

第一个补充方程为附面层中的速度分布函数 $u_x = f_1(y)$。假设层流附面层中的速度分布和管流中的层流相同,

$$u = u_m\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

将上式应用于附面层时,管流中的 r_0 对应于附面层中为 δ,r 对应为$(\delta - y)$,u_m 对应

为 u_0，u 则对应为 u_x。这样，上式可写成：

$$u_x = u_0\left[1 - \frac{(\delta - y)^2}{\delta^2}\right]$$

所以
$$u_x = \frac{2u_0}{\delta}\left(y - \frac{y^2}{2\delta}\right) \tag{8-8-2}$$

第二个补充方程为平板上的切应力 τ_0 和附面层厚度 δ 之间的函数关系，

$$\tau_0 = f_2(\delta)$$

因为是层流，符合牛顿内摩擦定律。求平板上的切应力，只要令 $y=0$。

$$\tau_0 = -\mu \left.\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} = -\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{2u_0}{\delta}\left(y - \frac{y^2}{2\delta}\right)\right]_{y=0}$$

式中负号表示切应力和 x 坐标轴的方向相反。现去掉负号取绝对值，并经简化后可得：

$$\tau_0 = \mu \frac{2u_0}{\delta} \tag{8-8-3}$$

可见 τ_0 和 δ 成反比，将以上所得的两个补充方程(8-8-2)，(8-8-3)代入附面层动量方程(8-8-1)中：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\delta}\left[\frac{2u_0}{\delta}\left(y - \frac{y^2}{2\delta}\right)\right]^2\mathrm{d}y - u_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\delta}\left[\frac{2u_0}{\delta}\left(y - \frac{y^2}{2\delta}\right)\right]\mathrm{d}y = -\frac{2\mu u_0}{\rho\delta}$$

化简上式，并进行积分。δ 对固定断面是定值，因此可提到积分号外。但 δ 沿 x 方向是变化的，所以不能移到对 x 的全导数符号外。u_0 沿 x 方向是不变的，可移到对 x 的全导数符号外。这样对上式积分，便可找到附面层厚度 δ 沿 x 方向的变化关系。即

$$\frac{1}{15}\,\frac{u_0\rho}{\mu}\cdot\frac{\delta^2}{2} = x + c$$

式中，c 为积分常数，当 $x=0$，$\delta=0$，代入后则得 $c=0$。故

$$\frac{1}{15}\,\frac{u_0\rho}{\mu}\cdot\frac{\delta^2}{2} = x$$

以 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 代入，并化简后，

$$\delta = 5.477\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} \tag{8-8-4}$$

这便是附面层厚度 δ 沿 x 方向的变化关系。由式中可见，平板层流附面层 δ 和 $x^{\frac{1}{2}}$ 成正比。

以(8-8-4)式代入(8-8-3)式，经简化后可得：

$$\tau_0 = 0.365\sqrt{\frac{\mu\rho u_0^3}{x}} \tag{8-8-5}$$

这是平板上切应力沿平板长度方向的变化关系。

作用在平板上一面的总摩擦阻力 D_f 为：

$$D_f = \int_0^L \tau_0 b\,\mathrm{d}x$$

式中，b 为平板垂直于纸面方向的宽度，L 为平板长度。将(8-8-5)式代入上式，积分后可得：

$$D_f = 0.73b\sqrt{\mu\rho u_0^3 L} \tag{8-8-6}$$

如要求流体对平板两面的总摩擦阻力时，只需乘2。

通常把绕流摩擦阻力的计算公式写成如下的形式：

$$D_f = C_f \frac{\rho u_0^2}{2} A \tag{8-8-7}$$

式中 C_f——无因次摩阻系数；

A——平板面积，这里 $A = bL$；

ρ——流体的密度；

u_0——气流速度。

对比(8-8-6)式和(8-8-7)式后，可得：

$$C_f = 1.46\sqrt{\frac{\mu}{\rho u_0 L}} = 1.46\sqrt{\frac{\nu}{u_0 L}}$$

即

$$C_f = \frac{1.46}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \tag{8-8-8}$$

式中的 Re 是以板长 L 作为特征长度的。以上得出了流体绕平板流动时，层流附面层的计算公式。

*第九节 平板上紊流附面层的近似计算

假设整个平板上都是紊流区。

讨论紊流附面层时仍用适于平板的动量方程式(8-8-1)，但需要另找两个补充方程式。这里我们借用紊流光滑区中的速度分布指数公式，

$$u_x = u_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{8-9-1}$$

和其对应的切应力公式，

$$\tau_0 = 0.0225\rho u_0^2\left(\frac{\nu}{u_0\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{8-9-2}$$

现将(8-9-1)式代入(8-8-1)中，可得

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u_0^2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{2/7}dy - u_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta u_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}dy = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

积分并移项后，得

$$\frac{7}{72}\rho u_0^2 d\delta = \tau_0 dx$$

将(8-9-2)式代入上式，可得

$$\frac{7}{72}\rho u_0^2 d\delta = 0.0225\rho u_0^2\left(\frac{\nu}{u_0\delta}\right)^{\frac{1}{4}}dx$$

积分并移项后，得

$$\left(\frac{7}{72}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\delta^{5/4}=0.0225\left(\frac{\nu}{u_0}\right)^{\frac{1}{4}}x+C$$

式中，C 为积分常数。在平板前，当 $x=0,\delta=0$。代入式中可得 $C=0$。则

$$\left(\frac{7}{72}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\delta^{5/4}=0.0225\left(\frac{\nu}{u_0}\right)^{\frac{1}{4}}x$$

化简后

$$\delta=0.37\left(\frac{\nu}{u_0x}\right)^{\frac{1}{5}}x \tag{8-9-3}$$

这是附面层厚度沿平板长度方向的变化关系。可以看出紊流附面层厚度 δ 和 $x^{4/5}$ 成正比。而层流附面层的厚度 δ 和 $x^{1/2}$ 成正比[见式(8-8-4)]。可见紊流附面层的厚度比层流附面层的厚度增加得快。

将(8-9-3)式代入第二个补充方程(8-9-2)中，经化简后可得

$$\tau_0=0.029\rho u_0^2\left(\frac{\nu}{u_0x}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{8-9-4}$$

这是平板切应力 τ_0 沿 x 方向的变化关系式。由式中可见，$\tau_0\propto\frac{1}{x^{1/5}}$，即沿平板长度方向 τ_0 是减小的。在层流附面层 $\tau_0\propto\frac{1}{x^{1/2}}$。因此，紊流中 τ_0 沿长度方向的减小比层流要慢一些。

平板上的总摩擦阻力为：

$$D_f = b\int_0^L\tau_0\mathrm{d}x$$

将(8-9-4)式代入上式后，则得

$$D_f=0.036\rho u_0^2bL\left(\frac{\nu}{u_0L}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{8-9-5}$$

由式中可见，在紊流附面层中，D_f 和来流速度 ${u_0}^{9/5}$ 成正比。而层流附面层中 $D_f\propto{u_0}^{1.5}$[见式(8-8-6)]。因此，当 u_0 增加时，紊流附面层的 D_f，要比层流附面层增加得快些。

若用式(8-8-7) $D_f=C_f\frac{\rho u_0^2}{2}A$ 表示时，其摩阻系数为：

$$C_f=0.072\left(\frac{\nu}{u_0L}\right)^{\frac{1}{5}}$$

或

$$C_f=\frac{0.072}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}}} \tag{8-9-6}$$

和层流附面层比较[见式(8-8-8)]，当 Re 增加时，紊流的 C_f 要比层流的 C_f 减小得慢些。实验研究表明，如将上式中的系数 0.072 改为 0.074，则与实验的结果符合得更好。

$$C_f=\frac{0.074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}}} \tag{8-9-7}$$

上式对于 $\mathrm{Re}=3\times10^5\sim10^7$ 之间是正确的。这意味着，雷诺数在该范围内时，流速分布服从$\frac{1}{7}$定律。当 Re 再增加时，流速分布的$\frac{1}{7}$定律已不适用，这时应按对数分布规律来计算。其结果为：

$$C_f=\frac{0.445}{(\lg\mathrm{Re})^{2.58}} \tag{8-9-8}$$

此式的适用范围是 $10^5<\mathrm{Re}<10^9$。

如前所述，以上是整个平板附面层都处于紊流区作为讨论的对象。但实际上，当板长 $L<x_k$ 时，整个平板才都处于层流区，当 $L>x_k$ 时，平板的前部为层流区，后部为紊流区，而且层流区和紊流区之间还有过渡区。只有在平板很长或来流速度 u_0 很大的情况下，由于层流的附面层在平板上占有的长度很小，才可能将整个平板附面层都当作紊流进行近似计算。

对于同时考虑到存在层流区和紊流区的混合附面层的计算，也可以根据简化的假设，利用上述的阻力系数得出下列计算公式

$$C_f=\frac{0.074}{\mathrm{Re}^{1/5}}-\frac{1700}{\mathrm{Re}} \tag{8-9-9}$$

第十节　曲面附面层的分离现象与卡门涡街

一、曲面附面层的分离现象

当流体绕曲面体流动时，沿附面层外边界上的速度和压强都不是常数。根据理想流体势流理论的分析，在图 8-27 所示的曲面体 MM' 断面以前，由于过流断面的收缩，流速沿程

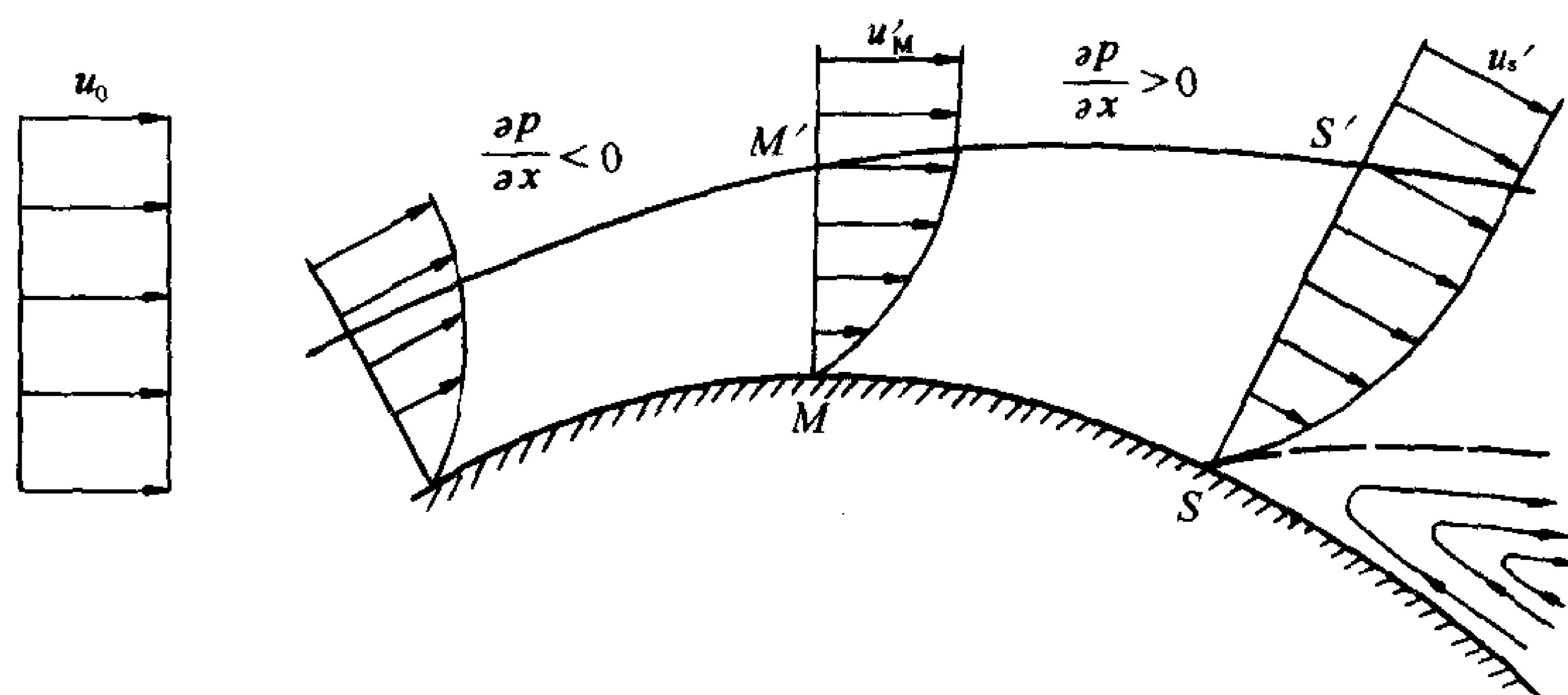


图 8-27　曲面附面层的分离

增加，因而压强沿程减小（即$\frac{\partial p}{\partial x}<0$）。在 MM' 断面以后，由于断面不断扩大，速度不断减小，因而压强沿程增加（即$\frac{\partial p}{\partial x}>0$）。由此可见，在附面层的外边界上，$M'$ 必然具有速度的最大值和压强的最小值。由于在附面层内，沿壁面法线方向的压强都是相等的，故以上关于压

强沿程的变化规律，不仅适用于附面层的外边界，也适用于附面层内。在 MM'断面前，附面层为减压加速区域，流体质点一方面受到粘性力的阻滞作用，另一方面又受到压差的推动作用，即部分压力势能转为流体的动能，故附面层内的流动可以维持。当流体质点进入 MM'断面后面的增压减速区，情况就不同了，流体质点不仅受到粘性力的阻滞作用，压差也阻止着流体的前进，越是靠近壁面的流体，受粘性力的阻滞作用越大。在这两个力的阻滞下，靠近壁面的流速就趋近于零。S 点以后的流体质点在与主流方向相反的压差作用下，将产生反方向的回流。但是离物体壁面较远的流体，由于附面层外部流体对它的带动作用，仍能保持前进的速度。这样，回流和前进这两部分运动方向相反的流体相接触，就形成旋涡。旋涡的出现势必使附面层与壁面脱离，这种现象称为附面层的分离，而 S 点就称为分离点。由上述分析可知，附面层的分离只能发生在断面逐渐扩大而压强沿程增加的区段内，即增压减速区。

附面层分离后，物体后部形成许多无规则的旋涡，由此产生的阻力称形状阻力。因为分离点的位置，旋涡区的大小，都与物体的形状有关，故称形状阻力。对于有尖角的物体，流动在尖角处分离，愈是流线型的物体，分离点愈靠后。飞机、汽车、潜艇的外形尽量做成流线型，就是为了推后分离点，缩小旋涡区，从而达到减小形状阻力的目的。

二、卡门涡街

当流体绕圆柱体流动时，在圆柱体后半部分，流体处于减速增压区，附面层要发生分离。物体后面的流动图形取决于

$$\mathrm{Re}=\frac{u_0 d}{\nu}$$

式中 u_0——来流速度；

d——圆柱体直径；

ν——流体的运动粘性系数。

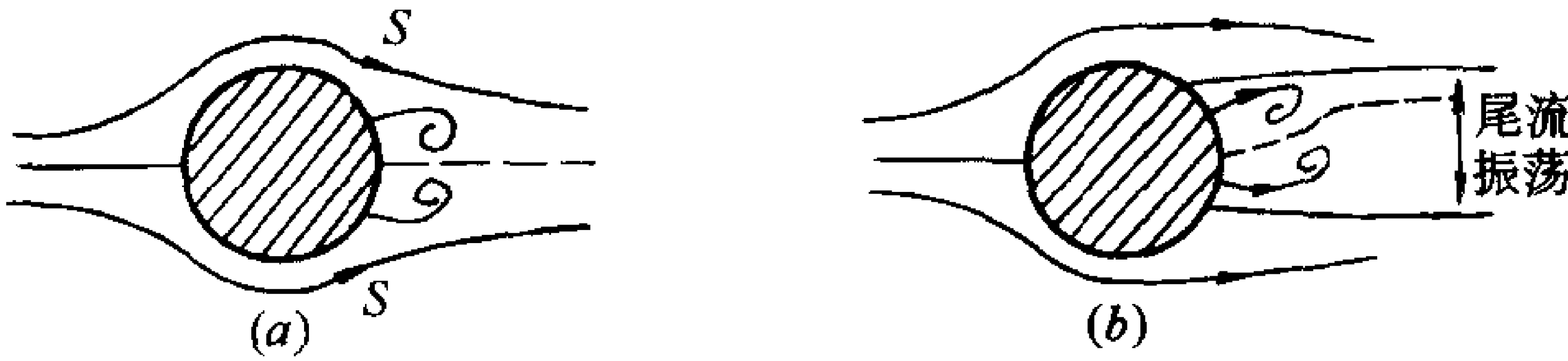


图 8-28 卡门涡街的尾流振荡

当 Re<40 时，附面层对称地在 S 处分离，形成两个旋转方向相对的对称旋涡。随着 Re 增大，分离点不断向前移，如图 8-28a 所示。Re 再升高，则旋涡的位置已不稳定。在 Re=40～70 时，可观察到尾流中有周期性的振荡(图 8-28b)。待 Re 数达到 90 左右，旋涡从柱体后部交替释放出来，旋涡的排列如图 8-29 所示。这种物体后面形成有规则的交错排列的旋涡组合，称为卡门涡街。

由于柱体上的涡以一定频率交替释放，因而柱体表面的压强和切应力也以一定频率发生有规则的变化。这是电线在空气中发声，锅炉中烟气或空气横向流过管束时产生振动和噪声的原因。工程上的许多振动现象，例如烟囱，悬桥，潜望镜在气流中的振动，均与卡门涡街有关。

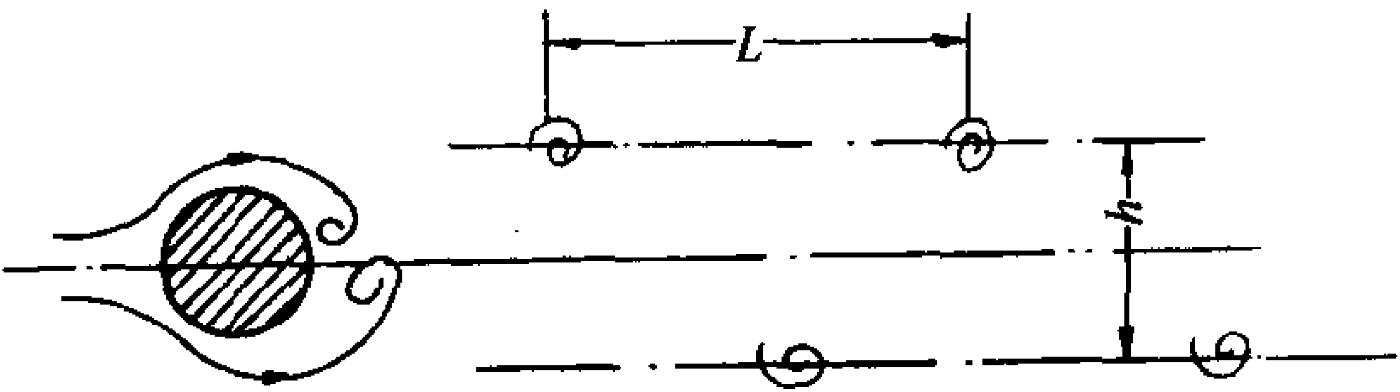


图 8-29 卡门涡街的排列

关于涡街振动频率的计算，在 $\mathrm{Re}=250\sim2\times10^5$ 的范围内，斯特洛哈尔提出的经验公式

如下：

$$\frac{fd}{u_0}=0.198\left(1-\frac{19.7}{\mathrm{Re}}\right) \tag{8-10-1}$$

式中　f——振动频率。

在高 Re 的情况下，柱体后部已不见规则性的涡衔了。大尺度的涡已消失在紊流中。

应当指出，卡门涡衔不限于圆柱体，一切钝形物体必会出现卡门涡衔，同样受到涡激振动的作用。

第十一节　绕流阻力和升力

绕流阻力包括摩擦阻力和形状阻力，附面层理论用于求摩擦阻力。形状阻力一般依靠实验来决定。绕流阻力的计算式，和平板阻力计算式相同。

$$D=C_{\mathrm{d}}A\frac{\rho u_0^2}{2} \tag{8-11-1}$$

式中　D——物体所受的绕流阻力；

C_{d}——无因次的阻力系数；

A——物体的投影面积。如主要受形状阻力时，采用垂直于来流速度方向的投影面积；

u_0——未受干扰时的来流速度；

ρ——流体的密度。

一、绕流阻力的一般分析

下面以圆球绕流为例来说明绕流阻力的变化规律。

设圆球作匀速直线运动，如果流动的雷诺数 $\mathrm{Re}=\frac{u_0 d}{\nu}$（$d$ 为圆球直径）很小，在忽略惯性力的前提下，可以推导出：

$$D=3\pi\mu d u_0 \tag{8-11-2}$$

称为斯托克斯公式。

如用(8-11-1)式来表示，则

$$D=3\pi\mu d u_0=\frac{24}{\frac{u_0 d\rho}{\mu}}\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{\rho u_0^2}{2}=\frac{24}{\mathrm{Re}}A\cdot\frac{\rho u_0^2}{2}$$

由此得

$$C_{\mathrm{d}}=\frac{24}{\mathrm{Re}} \tag{8-11-3}$$

如以雷诺数为横坐标，C_{d} 为纵坐标，绘在对数纸上，则式(8-11-3)是一条直线，如图 8-30 所示。如把不同雷诺数下的实测数据，绘在同一图上，则由图中可见，在 $\mathrm{Re}<1$ 的情况下，斯托克斯公式是正确的。但这样小的雷诺数只能出现在粘性很大的流体(如油类)，或粘性虽不大但球体直径很小的情况。故斯托克斯公式只能用来计算空气中微小尘埃或雾珠运动时的阻力，和静水中直径 $d<0.05\mathrm{mm}$ 的泥沙颗粒的沉降速度等。当 $\mathrm{Re}>1$ 时，因惯性力不能完全忽略，因此斯托克斯公式偏离实验曲线。

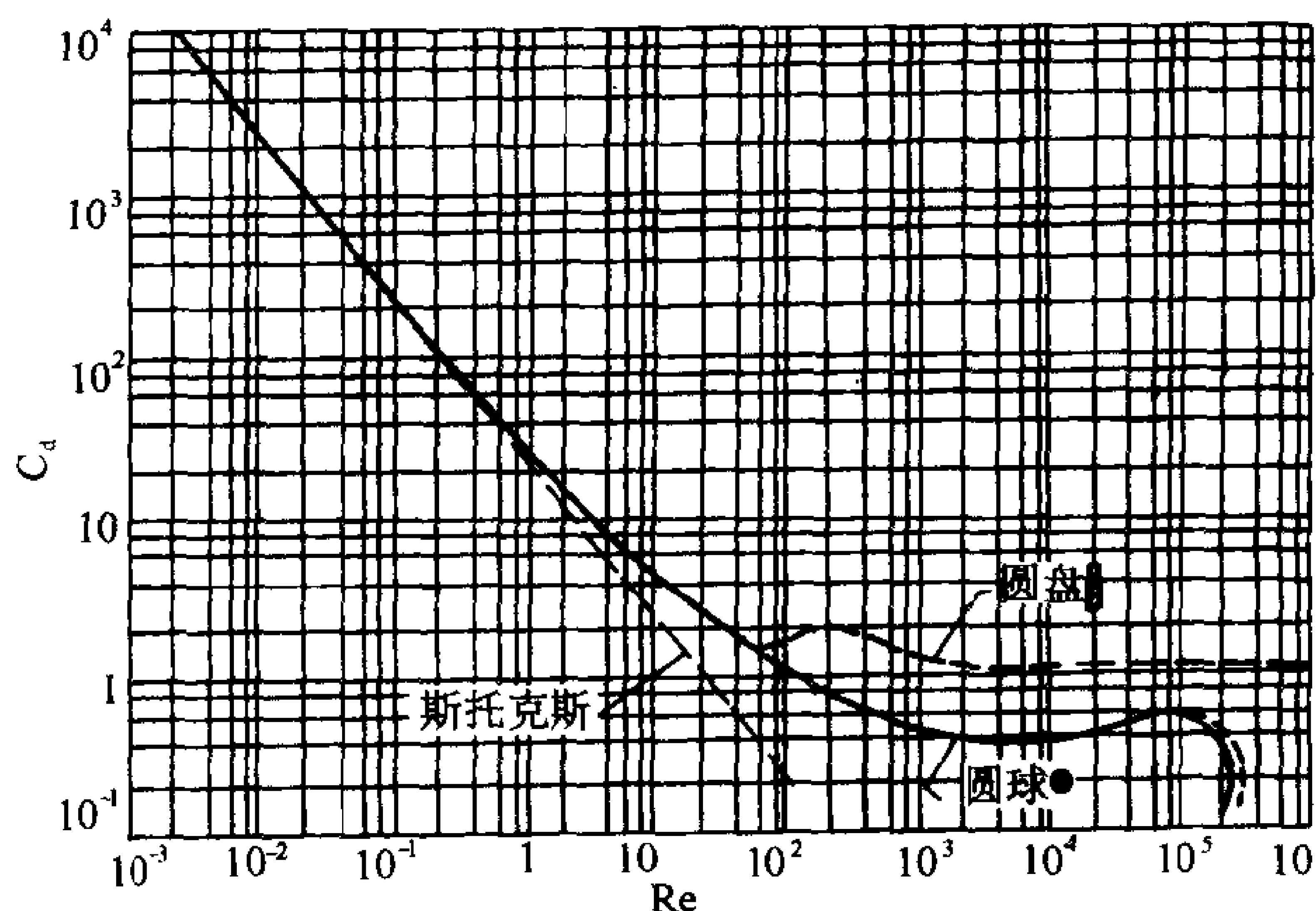


图 8-30　圆球和圆盘的阻力系数

如将圆球绕流的阻力系数曲线和垂直于流动方向的圆盘绕流进行比较，由图 8-30 可见，$Re>3\times10^3$ 以后，圆盘的 C_d 保持为常数，而圆球绕流的阻力系数 C_d 仍随 Re 而变化，原因何在？这是因为圆盘绕流只有形状阻力，没有摩擦阻力。附面层的分离点将固定在圆盘的边线上。圆球则是光滑的曲面，圆球绕流既有摩擦阻力，又有形状阻力。当流体以不同的 Re 绕它流动时，附面层分离点的位置随 Re 的增大而逐渐前移。旋涡区的加大使形状阻力随之加大，而摩擦阻力则有所减小。因此，C_d 随 Re 而变。当 $Re\approx3\times10^5$ 时，C_d 值在该处突然下降，这是由于附面层内出现了紊流。而紊流的掺混作用，使附面层内的流体质点取得更多的动能补充，因而分离点的位置后移，旋涡区显著减少，从而大大降低了形状阻力。这样虽然摩擦阻力有所增加，但总的绕流阻力还是大大地减小了。

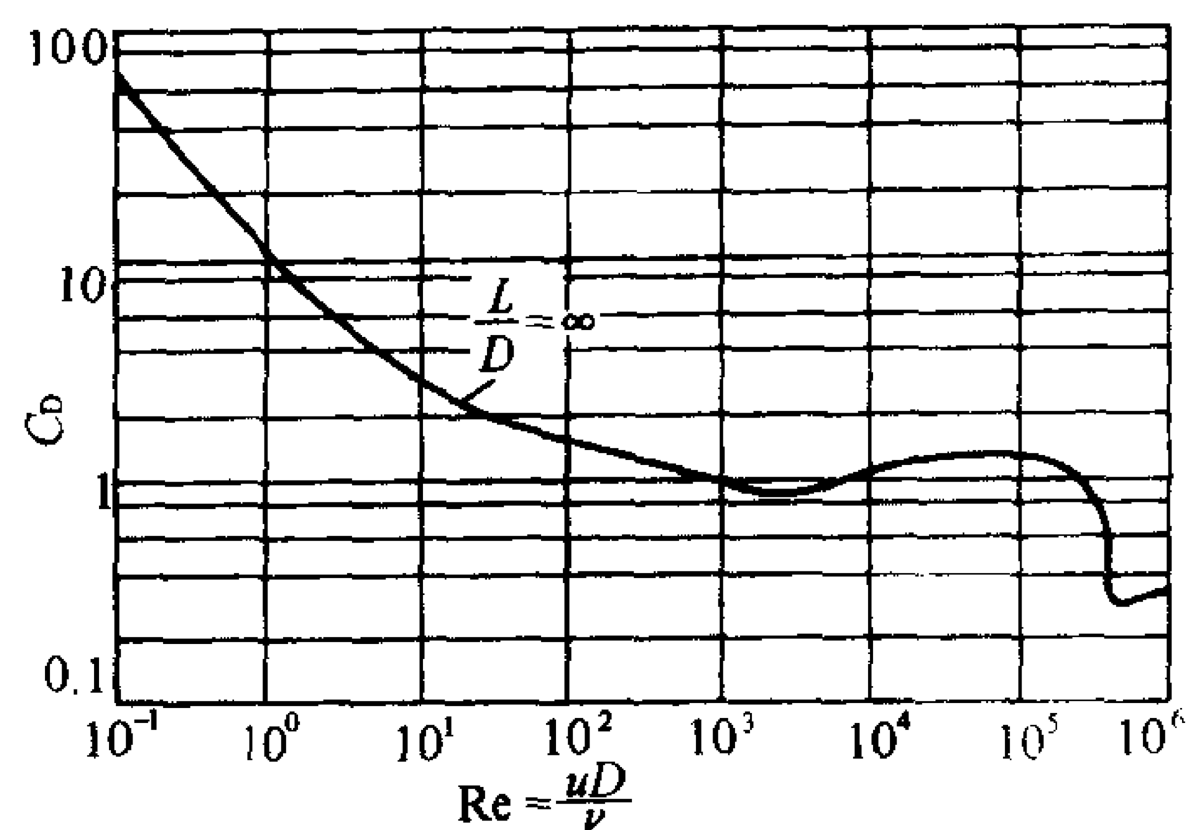


图 8-31　无限长圆柱体的阻力系数

专业中还常遇到绕圆柱体的运动，其阻力系数 C_d 的实验曲线如图 8-31 所示。

综上所述，可以根据绕流物体的形状对阻力规律作出区分：(1) 细长流线型物体，以平板为典型例子，绕流阻力主要由摩擦阻力来决定，阻力系数与雷诺数有关；(2) 有钝形曲面或曲率很大的曲面物体，以圆球或圆柱为典型例子。绕流阻力既与摩擦阻力有关，又与形状阻力有关。但在低雷诺数时，主要为摩擦阻力，阻力系数与雷诺数有关；在高雷诺数时，主要为形状阻力，阻力系数与附面层分离点的位置有关。分离点位置不变，阻力系数不变。分离点向前移，旋涡区加大，阻力系数也增加。反之亦然。(3) 有尖锐边缘的物体，以迎流方向的圆盘为典型例子。附面层分离点位置固定，旋涡区大小不变，阻力系数基本不变。

二、悬浮速度

根据作用力和反作用力关系的原理，固体对流体的阻力，也就是流体对固体的推动力，正是这个数值上等于阻力的推动力，控制着固体或液体微粒在流体中的运动。为了研究在气力输送中，固体颗粒在何种条件下才能被气体带走；在除尘室中，尘粒在何种条件下才能沉降；在燃烧技术中，是层燃式、沸腾燃烧式还是悬浮燃烧式、都要研究固体颗粒或液体颗粒在气流中的运动条件，这就提出了悬浮速度这个概念。

设在上升的气流中，小球的密度为 ρ_m，大于气体的密度 ρ，即 $\rho_m>\rho$。小球受力情况如下。

方向向上的力有：

绕流阻力
$$D=C_dA\frac{\rho u_0^2}{2}=\frac{1}{8}C_d\pi d^2\rho u_0^2$$

浮力 $$B=\frac{1}{6}\pi d^3\rho g$$

方向向下的力有:

小球重量 $$G=\frac{1}{6}\pi d^3\rho_{\mathrm{m}}g$$

当 $D+B>G$ 时,小球随气流上升;

$D+B<G$ 时,小球沉降;

$D+B=G$ 时,小球处于悬浮状态。

悬浮速度即颗粒所受的绕流阻力、浮力和重力平衡时的流体速度。此时,颗粒处于悬浮状态。因此

$$\frac{1}{8}C_{\mathrm{d}}\pi d^2\rho u^2+\frac{1}{6}\pi d^3\rho g=\frac{1}{6}\pi d^3\rho_{\mathrm{m}}g$$

故 $$u=\sqrt{\frac{4}{3C_{\mathrm{d}}}\left(\frac{\rho_{\mathrm{m}}-\rho}{\rho}\right)gd} \tag{8-11-4}$$

当 $\mathrm{Re}<1$ 时,$C_{\mathrm{d}}=\frac{24}{\mathrm{Re}}$。代入上式可得:

$$u=\frac{1}{18\mu}d^2(\rho_{\mathrm{m}}-\rho)g \tag{8-11-5}$$

当 $\mathrm{Re}>1$ 时,用(8-11-4)式来计算悬浮速度。C_{d} 值由图 8-30 给出。但 C_{d} 是一个随 Re 而变的值,而 Re 中又包含未知数 u。因此,一般要经过多次试算才能求得悬浮速度。要强调指出的是(8-11-4)式中的 C_{d} 所隐含的流速 u 是指悬浮速度,而非实际的流速,除非实际流速恰好等于悬浮速度。在一般工程中:

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \mathrm{Re}=10\sim10^3 \text{ 时,可近似采用 } C_{\mathrm{d}}=\dfrac{13}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\\ \text{当 } \mathrm{Re}=10^3\sim2\times10^5 \text{ 时,可采用 } C_{\mathrm{d}}=0.48\end{array}\right\} \tag{8-11-6}$$

三、绕流升力的一般概念

当绕流物体为非对称形,如图 8-32a;或虽为对称形,但其对称轴与来流方向不平行,如图 8-32b,由于绕流的物体上下侧所受的压力不相等,因此,在垂直于流动方向存在着升力 L。由图可见,在绕流物体的上部流线较密,而下部的流线较稀。也就是说,上部的流速大于下部的流速。根据能量方程,速度大则压强小,而流速小则压强大。因此物体下部的压强较物体上部的压强为大。这就说明了升力的存在。升力对于轴流水泵和轴流风机的叶片设计有重要意义。良好的叶片形状应具有较大的升力和较小的阻力。升力的计算公式为:

$$L=C_{\mathrm{L}}A\frac{\rho u_0^2}{2} \tag{8-11-7}$$

式中,C_{L} 为升力系数,一般由实验确定。其余符号意义同前。

【例 8-9】 一圆柱烟囱,高 $l=20\mathrm{m}$,直径 $d=0.6\mathrm{m}$。求风速 $u_0=18\mathrm{m/s}$ 横向吹过时,烟囱所受的总推力。已知空气密度 $\rho=1.293\mathrm{kg/m^3}$,运动粘滞系数 $\nu=13\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$。

【解】 流动的雷诺数

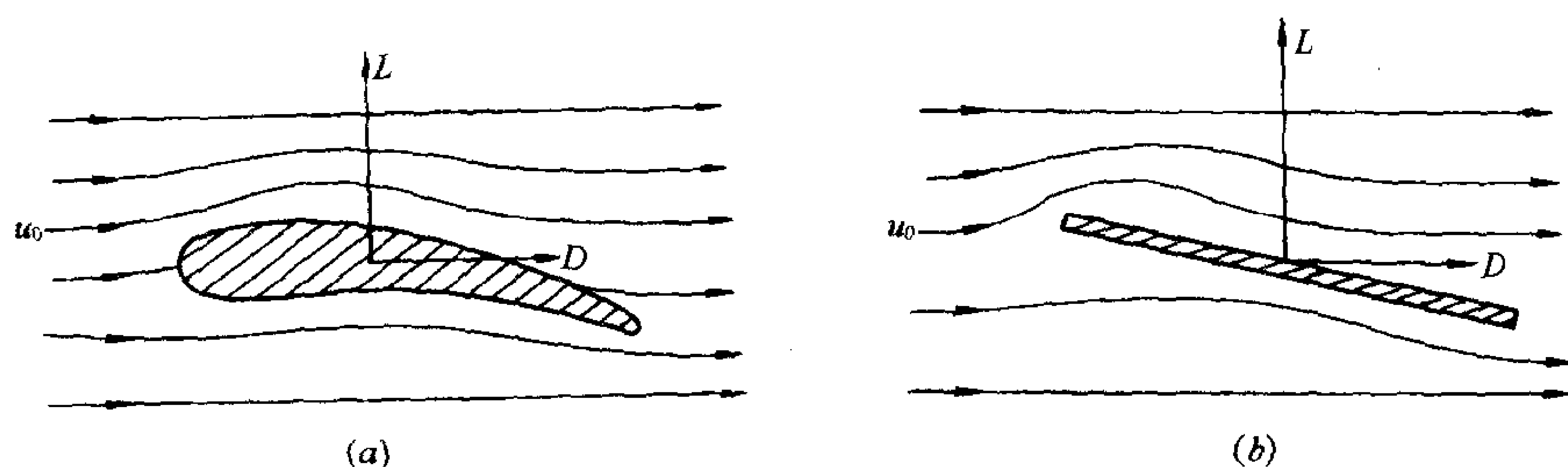


图 8-32 升力示意图

$$\mathrm{Re}=\frac{u_0 d}{\nu}=\frac{18\times 0.6}{13\times 10^{-6}}=6.8\times 10^5$$

可近似由图 8-31 查得阻力系数 $C_d=0.35$。

烟囱的总推力，即绕流阻力 D，

$$D=C_d L d\frac{\rho u_0^2}{2}=0.35\times 20\times 0.6\times\frac{1.293\times 18^2}{2}=612\mathrm{N}$$

【例 8-10】 在煤粉炉膛中，若上升气流的速度 $u_0=0.5\mathrm{m/s}$，烟气的 $\nu=223\times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，试计算在这种流速下，烟气中的 $d=90\times 10^{-6}\mathrm{m}$ 的煤粉颗粒是否会沉降。烟气密度 $\rho=0.2\mathrm{kg/m^3}$，煤的密度 $\rho_m=1.1\times 10^3\mathrm{kg/m^3}$。

【解】 先求直径 $d=90\times 10^{-6}\mathrm{m}$ 的煤粉颗粒的悬浮速度，如气流速度大于悬浮速度，则煤粉不会沉降。反之，煤粉就将沉降。由于悬浮速度未知，无法求出其相应的雷诺数 Re 值，这样也就不能确定阻力系数 C_d 应采用的公式，因此要应用试算法。不妨先假设悬浮速度相应的雷诺数小于 1，因此可用(8-11-5)式计算悬浮速度。

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{18\mu}d^2(\rho_m-\rho)g=\frac{1}{18\nu\rho}d^2(\rho_m-\rho)g\\&=\frac{1}{18\times 223\times 10^{-6}\times 0.2}(90\times 10^{-6})^2(1.1\times 10^3-0.2)\times 9.8\\&=0.105\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

校核：悬浮速度相应的雷诺数

$$\mathrm{Re}=\frac{ud}{\nu}=\frac{0.105\times 90\times 10^{-6}}{223\times 10^{-6}}=0.0424<1$$

假设成立，悬浮速度 $u=0.105\mathrm{m/s}$ 正确。如果校核计算所得 Re 值不在假设范围内，则需重新假设 Re 范围，重复上述步骤，直至 Re 值在假设范围内。

由于气流速度大于悬浮速度，所以这种尺寸的煤粉颗粒不会沉降，而是随烟气流动。

【例 8-11】 一竖井式的磨煤机中，空气流速 $u_0=2\mathrm{m/s}$，空气的运动粘滞系数 $\nu=20\times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，密度 $\rho=1\mathrm{kg/m^3}$。煤的密度 $\rho_m=1000\mathrm{kg/m^3}$。试求此气体能带走的最大煤粉颗粒的直径 d 为多少？

【解】 按题意，当悬浮速度即为实际空气流速时，处于悬浮状态的颗粒直径就是能被此气流带走的最大颗粒直径。因此，本题是已知悬浮速度求颗粒直径。

由于颗粒直径 d 未知，无法求得 Re 值。假设 $\mathrm{Re}=10\sim 10^3$。由式(8-11-6)，将 $C_d=13/$

$\sqrt{\mathrm{Re}}$代入(8-11-4)式：

$$u=\sqrt{\frac{4}{3C_d}\frac{\rho_m-\rho}{\rho}gd}=\sqrt{\frac{4}{39}\frac{\rho_m-\rho}{\rho}gd\ \sqrt{\mathrm{Re}}}$$

化简后得

$$d=u\sqrt[1.5]{\frac{\rho}{\rho_m-\rho}\sqrt{\nu}}=2\times\sqrt[1.5]{\frac{1}{1000-1}\sqrt{20\times10^{-6}}}=0.544\mathrm{mm}$$

校核：

$$\mathrm{Re}=\frac{u_0 d}{\nu}=\frac{2\times5.4\times10^{-4}}{20\times10^{-6}}=54.4$$

此值在原假设范围内，故计算成立。在题中给出的条件下，直径小于 0.544mm 的颗粒能被气流带走。

习　题

8-1　描绘出下列流速场，每一流速场绘三根流线（不绘(j)、(k)两流场）。

$(a)\ u_x=4$	$u_y=3$	$(b)\ u_x=4$	$u_y=3x$
$(c)\ u_x=4y$	$u_y=0$	$(d)\ u_x=4y$	$u_y=3$
$(e)\ u_x=4y$	$u_y=-3x$	$(f)\ u_x=4y$	$u_y=4x$
$(g)\ u_x=4y$	$u_y=-4x$	$(h)\ u_x=4$	$u_y=0$
$(i)\ u_x=4$	$u_y=-4x$	$(j)\ u_x=4x$	$u_y=0$
$(k)\ u_x=4xy$	$u_y=0$	$(l)\ u_r=c/r$	$u_\theta=0$
$(m)\ u_r=0$	$u_\theta=c/r$		

8-2　在上题流速场中，哪些流动是无旋流动，哪些流动是有旋流动。如果是有旋流动，它的旋转角速度的表达式是什么？

8-3　在上题流速场中，求出各有势流动的流函数和势函数。

8-4　流速场为$(a)\ u_r=0, u_\theta=c/r$　$(b)\ u_r=0, u_0=\omega^2 r$ 时，求半径为 r_1 和 r_2 的两流线间流量的表达式。

8-5　流速场的流函数是 $\psi=3x^2y-y^3$。它是否是无旋流动？如果不是，计算它的旋转角速度。证明任一点的流速只取决于它对原点的距离。绘流线 $\psi=2$。

8-6　确定半无限物体的轮廓线，需要哪些量来决定流函数。要改变物体的宽度，需要变动哪些量。以某一水平流动设计的绕流流速场，当水平流动的流速变化时，流函数是否有变化？

8-7　确定朗金椭圆的轮廓线，主要取决于哪些量？试根据指定长度 $l=2$m，指定宽度 $b=0.5$m，设计朗金椭圆的轮廓线。

8-8　确定绕圆柱流场的轮廓线，主要取决于哪些量？已知 $R=2$m，求流函数和势函数。

8-9　等强度的两源流，位于距原点为 a 的 x 轴上，求流函数。并确定驻点位置。如果此流速场和流函数为 $\psi=vy$ 的流速场相迭加，绘出流线，并确定驻点位置。

8-10　强度同为 $60\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ 的源流和汇流位于 x 轴，各距原点为 $a=3$m。计算坐标原点的流速。计算通过(0,4)点的流线的流函数值，并求该点流速。

8-11　为了在(0,5)点产生 10 的速度，在坐标原点应加强度多大的偶极矩？过此点的流函数值为何？

8-12　强度为 $0.2\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ 的源流和强度为 $1\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ 的环流均位于坐标原点。求流函数和势函数，求(1m，0.5m)点的速度分量。

8-13　在速度为 $v=0.5$ 的水平直线流中，在 x 轴上方 2 单位处放一强度为 $q=5$ 的源流。绘此半物体的形状。然后利用一个镜像源流，以得出沿墙面的流动。绘半无限物体的新形状（在墙上 $y>0$ 的区间），借以研究地面的影响。

8-14　在厚度为 T 的地下含水层用单井由河流取水。求流函数和势函数，绘出流线。

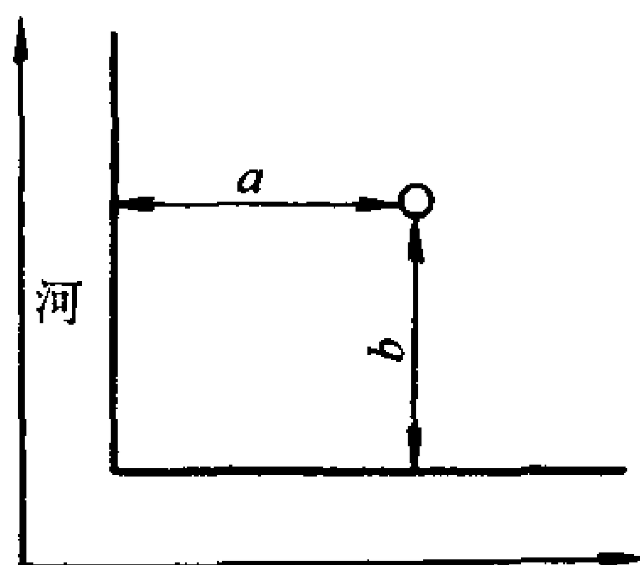
8-15　试讨论速度势函数为 $\varphi=ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}\theta$ 的转角流的压强分布。假定流速为零处压强为零。

8-16　在第十节所列举的平行壁面间圆柱绕流这一平面无旋流动中

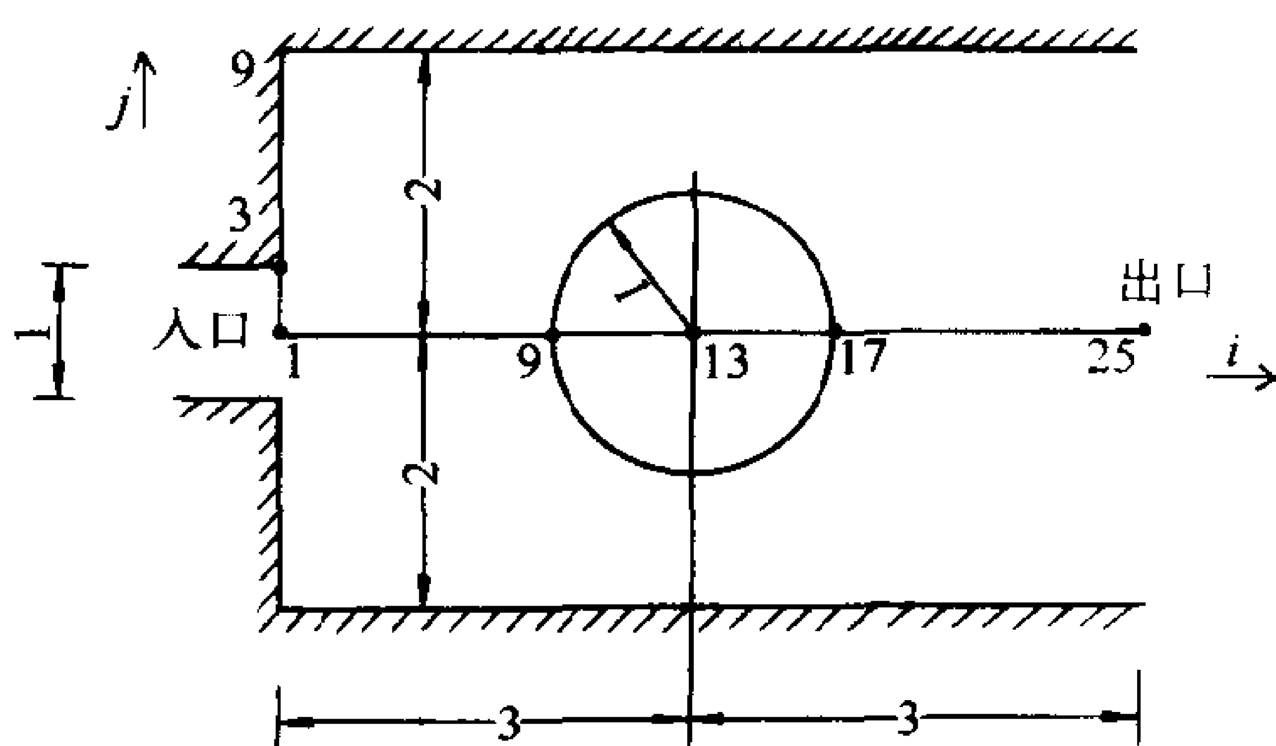
（1）用教材的源程序计算各结点上的有限差分数值解；

（2）运用势流理论先求出该流动流函数的解析表达式，再计算各结点上的解析解，并与数值解比较。

8-17　计算图中从左端入口绕圆柱体至右端出口的平面无旋流动数值解。可令上部壁面流函数值 $\psi=1$，在出口截面近似认为 $\partial\psi/\partial x=0$。



题 8-14　图



题 8-17　图

8-18　在管径 $d=100$mm 的管道中，试分别计算层流和紊流时的入口段长度（层流按 Re＝2000 计算）。

8-19　有一宽为 2.5m，长为 30m 的平板在静水中以 5m/s 的速度等速拖曳，水温为 20℃，求平板的总阻力。

8-20　无穷远处来流速度 $U_\infty=4$m/s，密度 $\rho=10^3$kg/m^3 的水流过长 $L=10$m 的二元平板，测得边界层中的速度剖面为

$$\frac{u}{U_\infty}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/5}=\varphi(\eta)$$

式中 $\eta=y/\delta$。平板后缘处边界层厚度 $\delta(L)=12$cm，试求单位宽度（1m）平板单面所受的阻力及阻力系数的值。

8-21　光滑平板宽 1.2m，长 3m，潜没在静水中以速度 $u=1.2$m/s 沿水平方向拖曳，水温为 10℃，求：（1）层流附面层的长度；（2）平板末端的附面层厚度；（3）所需水平拖曳力。（取 $Re_{xk}=5\times10^5$）

8-22　在渐缩管中会不会产生附面层的分离？为什么？

8-23　若球形尘粒的密度 $\rho_m=2500$kg/m^3，空气温度为 20℃，求允许采用斯托克斯公式计算尘粒在空气中悬浮速度的最大粒径（相当于 Re＝1）。

8-24　某气力输送管路，要求风速 u_0 为砂粒悬浮速度 u 的 5 倍，已知砂粒粒径 $d=0.3$mm，密度 $\rho_m=2650$kg/m^3，空气温度为 20℃，求风速 u_0 值。

8-25　已知煤粉炉炉膛中上升烟气流的最小速度为 0.5m/s，烟气的运动粘滞系数 $\nu=230\times10^{-6}$ m^2/s，问直径 $d=0.1$mm 的煤粉颗粒是沉降下来还是被烟气带走？已知烟气的密度 $\rho=0.2$kg/m^3，煤粉的密度 $\rho_m=1.3\times10^3$kg/m^3。

第九章　一元气体动力学基础

气体动力学研究可压缩流体运动规律及其在工程实际中的应用。

当气体流动速度较高，压差较大时，气体的密度发生了显著变化，从而气体流动现象，运动参数亦发生显著变化。因此必须考虑气体的可压缩性，也就是必须考虑气体密度随压强和温度的变化而变化。这样一来，研究可压缩流体的动力学不只是流速，压强问题，而且也包含密度和温度问题。不仅需要流体力学的知识，还需要热力学知识。在这种情况下，进行气体动力学计算时，压强、温度只能用绝对压强及开尔文温度。

第一节　理想气体一元恒定流动的运动方程

从微元流束中沿轴线 s 任取 ds 段，如图 9-1 所示。应用理想流体欧拉运动微分方程，单位质量力 s 方向分力以 S 表示，就可得出：

$$S-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{dv_s}{dt}=\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{\partial v_s}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt}$$

对于恒定一元流动

$$\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{dp}{ds};\frac{\partial v_s}{\partial s}=\frac{dv_s}{ds};\frac{\partial v_s}{\partial t}=0$$

当质量力仅为重力，气体在同介质中流动，浮力和重力平衡，不计质量力 S，并去掉脚标 s，则得：

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}+v\frac{dv}{ds}=0$$

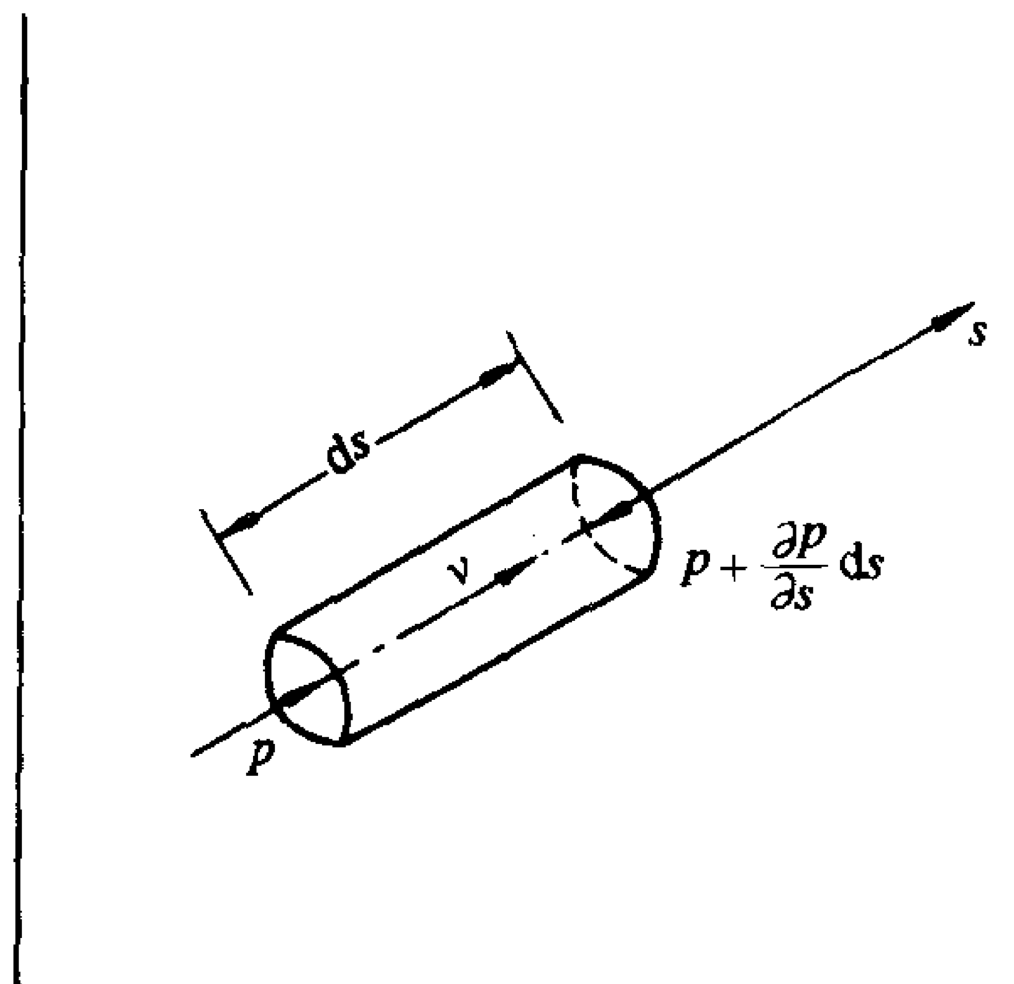


图 9-1　气体微元流动

于是

$$\frac{dp}{\rho}+v\,dv=0 \qquad (9\text{-}1\text{-}1)$$

$$\frac{dp}{\rho}+d\left(\frac{v^2}{2}\right)=0 \qquad (9\text{-}1\text{-}2)$$

上两式称为欧拉运动微分方程，又称为微分形式的伯努利方程。它确定了气体一元流动的 p、ρ、v 三者之间的关系。

积分上式，必须给出气体的 p、ρ 之间的函数关系，于是须借助热力学过程方程式。

一、气体一元定容流动

热力学中定容过程系指气体在容积不变，或比容 v 不变的条件下进行的热力过程。那么定容流动是指气体容积不变的流动。亦即密度 ρ 不变的流动。

在 $\rho=$常数下，积分(9-1-2)式

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{常数}$$

除以 g

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=\text{常数} \tag{9-1-3}$$

(9-1-3)式就是第三章中不可压缩理想流体元流能量方程式,忽略质量力的形式。其方程意义是:沿流各断面上单位质量(或重量)理想气体的压能与动能之和守恒,两者并可互相转换。

在元流任取两断面则可列出:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2} \tag{9-1-4}$$

二、气体一元等温流动

热力学中等温过程系指气体在温度 T 不变条件下所进行的热力过程。等温流动则是指气体温度 T 保持不变的流动。气体状态参数服从等温过程方程式:

$$T=\text{常数}$$

$$\frac{p}{\rho}=RT=c \tag{9-1-5}$$

将(9-1-5)式代入(9-1-2)式中,积分得:

$$c\ln p+\frac{v^2}{2}=\text{常量}$$

又知 $c=RT$ 代入上式

$$RT\ln p+\frac{v^2}{2}=\text{常量} \tag{9-1-6}$$

三、气体一元绝热流动

从热力学中得知,在无能量损失且与外界又无热量交换的情况下,为可逆的绝热过程,又称等熵过程。这样理想气体的绝热流动即为等熵流动。气体参数变化服从等熵过程方程式:

$$\frac{p}{\rho^{\mathrm{k}}}=c \tag{9-1-7}$$

所以

$$\rho=\left(\frac{p}{c}\right)^{\frac{1}{\mathrm{k}}}=p^{\frac{1}{\mathrm{k}}}\cdot c^{-\frac{1}{\mathrm{k}}} \tag{9-1-8}$$

式中 k——绝热指数,$k=\frac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}}$为定压比热与定容比热之比。

将(9-1-8)式代入(9-1-2)式中的第一项并积分

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=c^{\frac{1}{\mathrm{k}}}\int p^{-\frac{1}{\mathrm{k}}}\mathrm{d}p=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho} \tag{9-1-9}$$

上式代入(9-1-2)式中于是得出:

$$\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{常量} \tag{9-1-10}$$

对任意两断面有:

$$\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{v^2}{2}=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{v_2^2}{2} \tag{9-1-11}$$

将(9-1-10)式变化为:

$$\frac{1}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=常量 \tag{9-1-12}$$

与不可压缩理想气体方程比较,(9-1-12)式多出一项$\frac{1}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho}$。从热力学可知,该多出项正是绝热过程中,单位质量气体所具有的内能 u。

证明如下:从热力学第一定律知,对完全气体有:

$$u=c_v\cdot T$$

又从完全气体状态方程中,可得:

$$T=\frac{p}{R\rho}$$

气体常数 R 为

$$R=c_p-c_v$$

及

$$k=\frac{c_p}{c_v}$$

于是内能 u 为

$$u=c_v\cdot T=c_v\cdot\frac{p}{(c_p-c_v)\rho}=\frac{c_v}{c_p-c_v}\cdot\frac{p}{\rho}$$

$$=\frac{\frac{c_v}{c_v}}{\frac{c_p}{c_v}-\frac{c_v}{c_v}}\cdot\frac{p}{\rho}=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho}$$

将内能 u 代入(9-1-12)式中

$$u+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=常量 \tag{9-1-13}$$

上式表明:气体等熵流动,即理想气体绝热流动,沿流任意断面上,单位质量气体所具有的内能、压能、动能三项之和均为一常数。

因包括内能项,故又称(9-1-13)式为绝热流动的全能方程式。

气体动力学中,常用焓 i 这个热力学参数来表示绝热流动全能方程。

热力学给出 $i=u+\frac{p}{\rho}$,代入式(9-1-13)式便得出用焓表示的全能方程式。

$$i+\frac{v^2}{2}=常量 \tag{9-1-14}$$

又知 $i=c_p\times T$,则(9-1-14)式又可写为

$$c_pT+\frac{v^2}{2}=常量 \tag{9-1-15}$$

对任意两断面可列出

$$i_1+\frac{v_1^2}{2}=i_2+\frac{v_2^2}{2} \tag{9-1-16}$$

$$c_pT_1+\frac{v_1^2}{2}=c_pT_2+\frac{v_2^2}{2} \tag{9-1-17}$$

气体绝热指数 k 决定于气体分子结构，热力学中已详述。这里仅给出如下气体的 k 值。空气 $k=1.4$，干饱和蒸汽 $k=1.135$，过热蒸汽 $k=1.33$。

类似绝热运动，可得出多变流动的运动方程式

$$\frac{n}{n-1}\cdot\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{常量} \tag{9-1-18}$$

对任意两断面可写为

$$\frac{n}{n-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{v_2^2}{2} \tag{9-1-19}$$

式中，n 为多变指数。从热力学中知下列特殊流动时：

等温	$n=1$
绝热	$n=k$
定容	$n=\pm\infty$

但实际流动中，并不存在绝对的等温流动，绝热流动或定容流动。所以 n 值是在上述所给值的左右变化。

【例 9-1】 求空气绝热流动时，(无摩擦损失)两断面间流速与绝对温度的关系。已知：空气的绝热指数 $k=1.4$，气体常数 $k=287\text{J/kg·K}$。

【解】 应用 $\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{常数}$

将 k 值代入
$$3.5\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{常数}$$

又∵ $\frac{p}{\rho}=RT$ 代入上式

$$3.5\times287T+\frac{v^2}{2}=\text{常数}$$

列两端面方程为：$2010T_1+v_1^2=2010T_2+v_2^2$

$$\therefore\ v_2=\sqrt{2010(T_1-T_2)+v_1^2}$$

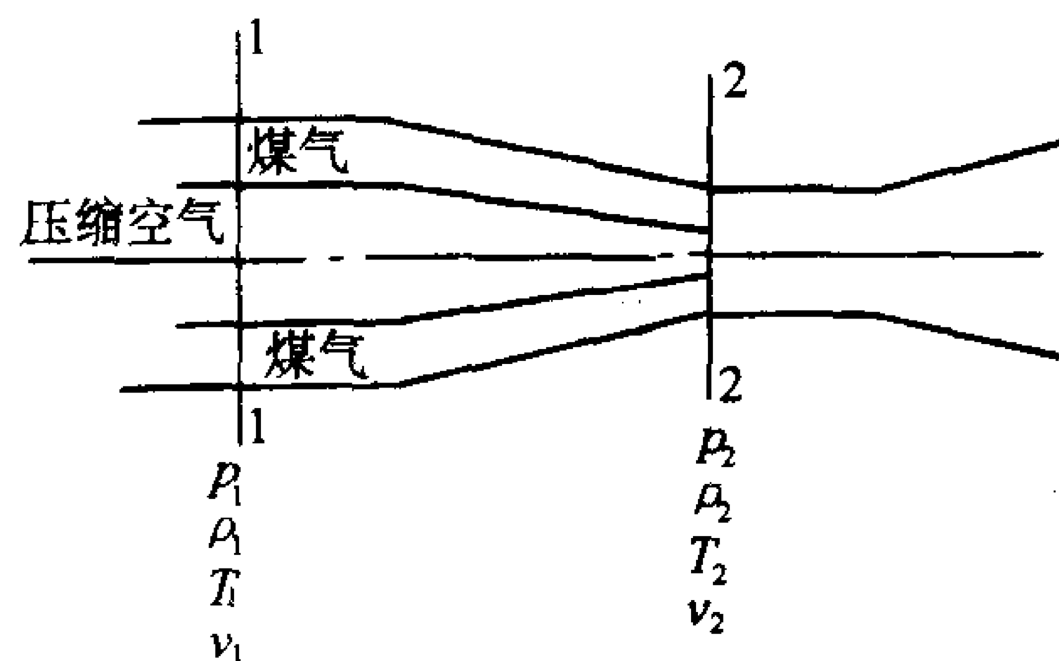


图 9-2 喷嘴计算例题

【例 9-2】 为获得较高空气流速，使煤气与空气充分混合，使压缩空气流经如图 9-2 所示喷嘴。在 1，2 两断面上测得高压空气参数为：$p_1=12\times98100\text{N/m}^2$，$p_2=10\times98100\text{N/m}^2$，$v_1=100\text{m/s}$，$t_1=27℃$。试求喷嘴出口速度 v_2 为若干？

【解】 因速度较高，气流来不及与外界进行热量交换，且当忽略能量损失时，可按等熵流动处理。

应用上例所得结果

$$v_2=\sqrt{2010(T_1-T_2)+v_1^2}$$
$$T_1=273+27=300\text{K}$$

$$\rho_1=\frac{p_1}{RT_1}=\frac{12\times98100}{287\times300}=13.67\text{kg/m}^3$$

$$\rho_2=\rho_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}=13.67\left(\frac{10}{12}\right)^{\frac{1}{1.4}}=12.01\text{kg/m}^3$$

$$T_2=\frac{p_2}{\rho_2 R}=\frac{10\times98100}{12.01\times287}=284\text{K}$$

将各数值代入 v_2 式中

$$v_2=\sqrt{2010(300-284)+100^2}=210\text{m/s}$$

理想气体绝热流动的伯努利方程(9-1-11),不仅适用于无摩阻的绝热流中,也适用于有粘性的实际气流中。这是因为管流中只要管材不导热,摩擦所产生的热量将保存在管路中。所消耗的机械能转化为内能,其总和则保持不变。

这里要注意绝热流动在两种不同情况下的不同处理方法。在喷管中的流动,具有较高流速,较短行程,因而气流与壁面接触时间短,来不及进行热交换,摩擦损失亦可忽略,因此可按无摩擦绝热流动处理,此时应将绝热流动能量方程和绝热过程方程联立求解。至于有保温层的管路,一般摩擦作用不能忽略,属于有摩擦绝热流动,则应用后面介绍的绝热管路公式求流量后,再与绝热流动能量方程联立求得出口流速和密度。

第二节 音速、滞止参数、马赫数

一、音速

流体中某处受外力作用,使其压力发生变化,称为压力扰动,压力扰动就会产生压力波,向四周传播。传播速度的快慢,与流体内在性质—压缩性(或弹性)和密度有关。

微小扰动在流体中的传播速度,就是声音在流体中的传播速度,以符号 c 表示音速。

c 是气体动力学重要参数,下面加以讨论。

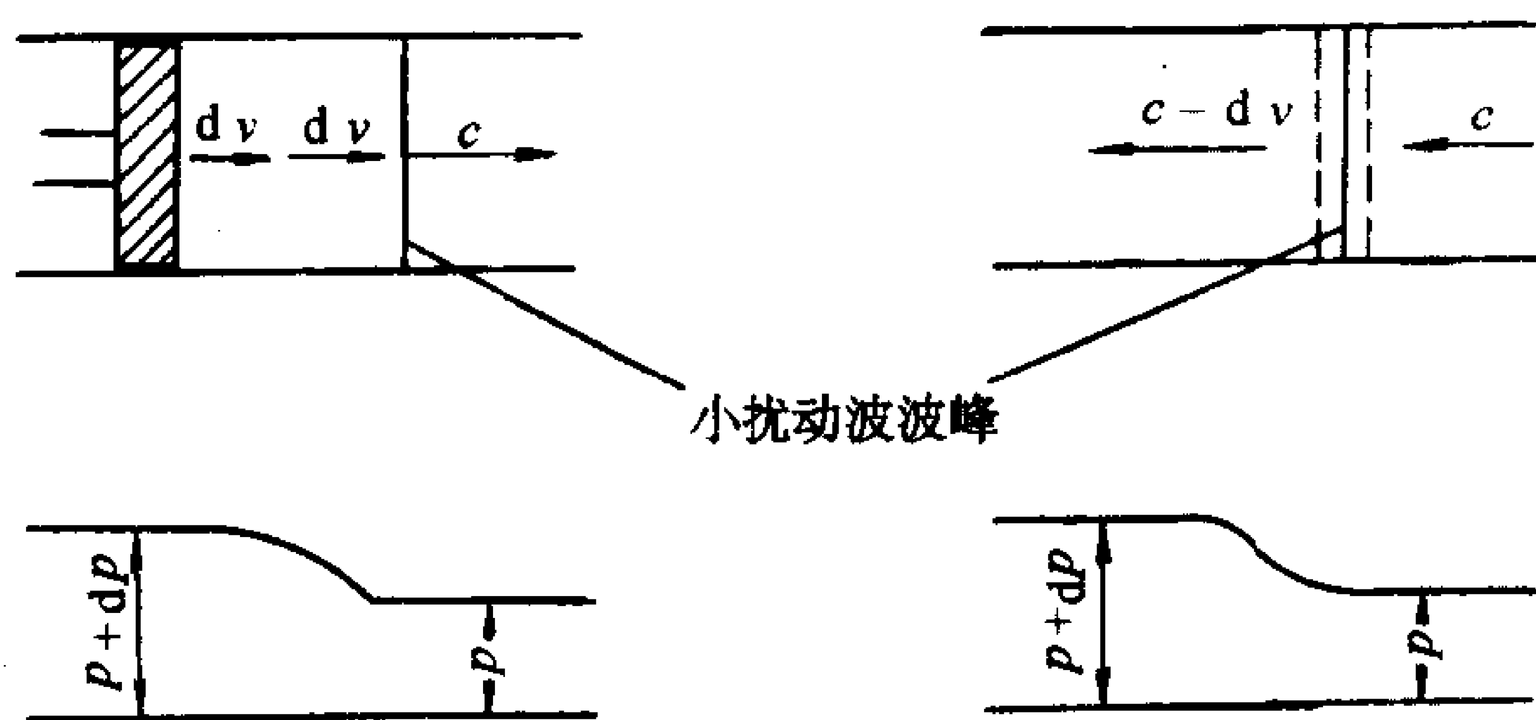


图 9-3 音速传播物理过程

取等断面直管(图 9-3),管中充满静止的可压缩气体。活塞在力的作用下,有一微小速度 $\mathrm{d}v$ 向右移动,产生一个微小扰动的平面波。若定义扰动与未扰动的分界面为波峰,则波峰传播速度就是声音的传播速度 c。波峰所到之处,流体压强变为 $p+\mathrm{d}p$,密度变为 $\rho+\mathrm{d}\rho$。波峰未到之处,流体仍处于静止,压强、密度仍为静止时的 p、ρ。

为了分析方便起见,将坐标固定在波峰上,如图 9-3 所示。于是观察到波峰右侧原来静止的流体将以速度 c 向左运动,压强为 p,密度为 ρ。左侧流体将以 $c-\mathrm{d}v$ 向左运动,其压强为 $p+\mathrm{d}p$,密度为 $\rho+\mathrm{d}\rho$。取图中虚线所示区域为控制体,波峰处于控制体中,当波峰两侧的控制面无限接近时,控制体体积趋近于零。

设管道截面积为 A,对控制体写出连续性方程

$$c\rho A=(c-\mathrm{d}v)(\rho+\mathrm{d}\rho)A$$

展开略去二阶小量,得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}v}{c} \tag{9-2-1}$$

对控制体建立动量方程,由于控制体的体积趋近于零,质量力为零。且可忽略切应力的作用,于是动量方程可写成

$$pA-(p+\mathrm{d}p)A=\rho cA[(c-\mathrm{d}v)-c]$$

整理可得

$$\mathrm{d}p=\rho\cdot c\mathrm{d}v \tag{9-2-2}$$

由式(9-2-1)及(9-2-2),消去 $\mathrm{d}v$ 可得音速公式

$$c^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{9-2-3}$$

$$c=\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} \tag{9-2-4}$$

(9-2-4)式虽然是从微小扰动平面波导出,但它也同样适用于球面波。

(9-2-4)式对气体、液体都适用。回顾第一章第二节关于压缩性论述中曾给出流体的弹性模量与压缩系数关系

$$E=\frac{1}{\beta}=\rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$$

将(9-2-4)式代入

$$E=\frac{1}{\beta}=\rho c^2$$

$$\therefore\ c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{9-2-5}$$

上式说明音速与流体弹性模量平方根成正比,与流体密度平方根成反比。音速在一定程度上反映出压缩性的大小。

音波传播速度很快,在传播过程中与外界来不及进行热量交换,且忽略切应力作用,无能量损失。所以整个传播过程可作为等熵过程。

应用气体等熵过程方程式

$$\frac{p}{\rho^{\mathrm{k}}}=c$$

微分上式

$$\mathrm{d}p=c\cdot k\rho^{\mathrm{k}-1}\mathrm{d}\rho$$

则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=c\cdot k\cdot\rho^{\mathrm{k}-1}=\frac{p}{\rho^{\mathrm{k}}}\cdot k\cdot\rho^{\mathrm{k}-1}=k\cdot\frac{p}{\rho}$$

再将完全气体状态方程 $\frac{p}{\rho}=RT$ 代入

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=k\frac{p}{\rho}=kRT \tag{9-2-6}$$

将(9-2-6)式代入音速公式中，于是得到气体中音速公式

$$c=\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}=\sqrt{k\frac{p}{\rho}}=\sqrt{kRT} \tag{9-2-7}$$

从(9-2-7)式中得出

(1) 不同的气体有不同的绝热指数 k，及不同的气体常数 R，所以各种气体有各自的音速值。

如常压下，15℃空气中的音速，因空气 $k=1.4$；$R=287\mathrm{J}/(\mathrm{kg\cdot K})=287\mathrm{N\cdot m}/(\mathrm{kg\cdot K})=287\mathrm{m^2}/(\mathrm{s^2\cdot K})$；$T=273+15=288\mathrm{K}$。

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times287\times288}=340\mathrm{m/s}$$

压力及温度与空气相同时，氢气中的音速为 $c=1295\mathrm{m/s}$。

(2) 同一气体中音速也不是固定不变的，它与气体的绝对温度平方根成正比。如常压下空气中音速

$$c=20.1\sqrt{T}\qquad(\mathrm{m/s}) \tag{9-2-8}$$

二、滞止参数

气流某断面的流速，设想以无摩擦绝热过程降低至零时，断面各参数所达到的值，称为气流在该断面的滞止参数。滞止参数以下标“0”表示。例如 p_0、ρ_0、T_0、i_0、c_0 等相应地称为滞止压强、滞止密度、滞止温度、滞止焓值、滞止音速。

断面滞止参数可根据能量方程及该断面参数值求出。用(9-1-11)及(9-1-16)式

$$\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}+0=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}$$

$$\frac{k}{k-1}RT_0=\frac{k}{k-1}RT+\frac{v^2}{2} \tag{9-2-9}$$

$$i_0=i+\frac{v^2}{2} \tag{9-2-10}$$

又因 $c=\sqrt{kRT}$称为当地音速；

则 $c_0=\sqrt{kRT_0}$称为滞止音速。

代入(9-2-9)式中得

$$\frac{c_0^2}{k-1}=\frac{c^2}{k-1}+\frac{v^2}{2} \tag{9-2-11}$$

(9-2-9)、(9-2-10)、(9-2-11)式表明：

(1) 等熵流动中，各断面滞止参数不变，其中 T_0、i_0、c_0 反映了包括热能在内的气流全部能量。

(2) 等熵流动中，气流速度若沿流增大，则气流温度 T、焓 i、音速 c，沿程降低。

(3) 由于当地气流速度 v 的存在，同一气流中当地音速 c 永远小于滞止音速 c_0。气流中最大音速是滞止时的音速 c_0。

气体绕物体流动时，其驻点速度为零，驻点处的参数就是滞止参数。

在有摩阻绝热气流中，各断面上滞止温度 T_0、滞止焓 i_0、滞止音速 c_0 值不变，表示总能量不变，但因摩阻消耗的一部分机械能量转化为热能，使滞止压强 p_0 沿程降低。

在有摩阻等温气流中，气流和外界不断交换热量，使滞止温度 T_0 沿程变化。

三、马赫数 M

如前述，音速大小在一定程度上反映气体可压缩性大小。当气流速度越大，则音速越小，压缩现象越显著。马赫首先将有关影响压缩效果的 v 与 c 两个参数联系起来，取指定点的当地速度 v 与该点当地音速 c 的比值为马赫数 M。

$$M=\frac{v}{c} \tag{9-2-12}$$

$M>1, v>c$，即气流本身速度大于音速，则气流中参数的变化不能向上游传播。这就是超音速流动。

$M<1, v<c$，气流本身速度小于音速，则气流中参数的变化能够各向传播，这就是亚音速流动。

M 数是气体动力学中一个重要无因次数，它反映惯性力与弹性力的相对比值。如同雷诺数一样，是确定气体流动状态的准数。

【例 9-3】 某飞机在海平面和 11000m 高空均以速度为 1150km/h 飞行，问这架飞机在海平面和在 11000m 高空的飞行 M 数是否相同？

【解】 飞机的飞行速度

$$v=1150\times\frac{1000}{3600}=319\text{m/s}$$

由于海平面上的音速为 340m/s，故在海平面上的 M 数为 $M=\frac{319}{340}=0.938$，即亚音速飞行。

在 11000m 高空的音速为 295m/s，故在 11000m 高空的 M 数为 $M=\frac{319}{295}=1.08$，即超音速飞行。

现将滞止参数与断面参数比表示为马赫数 M 的函数。利用 $\frac{k}{k-1}RT_0=\frac{k}{k-1}RT+\frac{v^2}{2}$ 求出：

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{k-1}{2}\cdot\frac{v^2}{kRT}=1+\frac{k-1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}=1+\frac{k-1}{2}M^2 \tag{9-2-13}$$

根据绝热过程方程及气体状态方程可推出

$$\left.\begin{aligned}
\frac{p_0}{p}&=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}\\
\frac{\rho_0}{\rho}&=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}\\
\frac{c_0}{c}&=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{9-2-14}$$

显然，已知滞止参数及该断面上的 M 数，即可求出该断面上的压强、密度、温度值。

四、气流按不可压缩处理的极限

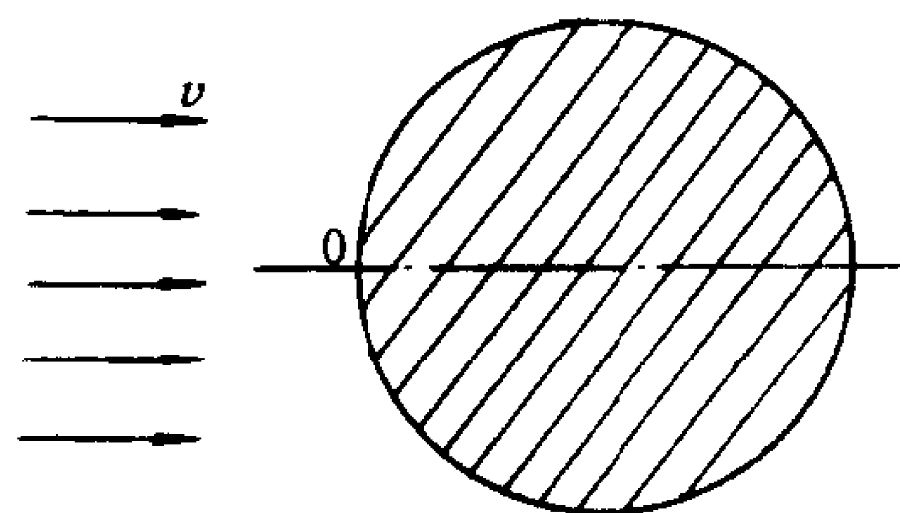


图 9-4 滞止点压强

从(9-2-14)式看出当 $M=0$ 时各参数比值均为 1,也就是流体处于静止状态,不存在压缩问题。当 $M>0$ 时,在不同速度 v 下都具有不同程度的压缩,那么 M 数在怎样限度以内才可以忽略压缩影响? 这要根据计算要求的精度来决定。

例如,计算滞止点 0 压强 p_0(如图 9-4),要求误差 $\Delta p_0/\frac{\rho v^2}{2}$ 小于 1%。求 M 数的限界范围。

当考虑压缩性时,计算滞止压强 p_0 用(9-2-14)式中

$$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{9-2-15}$$

不考虑压缩性时,可按不可压缩的能量方程计算,滞止压强用 p_0' 表示

$$p'_0=p+\frac{\rho v^2}{2} \tag{9-2-16}$$

将(9-2-15)式按二项式定理展开,取前三项,则有

$$\frac{p_0}{p}=1+\frac{k}{2}M^2+\frac{k}{8}M^4 \tag{9-2-17}$$

又因 $M=\frac{v}{c}=\sqrt{\frac{\rho v^2}{kp}}$,所以 $M^2=\frac{\rho v^2}{kp}$,代入上式中求出 p_0 为

$$p_0=p+\frac{\rho v^2}{2}+\frac{\rho v^2}{2}\cdot\frac{M^2}{4} \tag{9-2-18}$$

用(9-2-18)式减(9-2-16)式得出 $p_0-p'_0=\Delta p_0$,称为绝对误差

$$\Delta p_0=\frac{\rho v^2}{2}\cdot\frac{M^2}{4}$$

因而

$$\frac{\Delta p_0}{\frac{\rho v^2}{2}}=\frac{M^2}{4} \tag{9-2-19}$$

称 $\Delta p_0/\frac{\rho v^2}{2}$ 为相对误差。

当要求误差小于 1%,即

$$\frac{\Delta p_0}{\frac{\rho v^2}{2}}=\frac{M^2}{4}<0.01$$

$$\therefore\quad M^2<0.04\qquad M<0.2$$

这就是说,$M<0.2$ 时便满足了限定的相对误差小于 1%,因此 $M\leqslant 0.2$ 时可忽略气体的可压缩性,按不可压缩气体处理。

对于 15℃的空气，$c=340\text{m/s}$，则 $M\leqslant 0.2$ 时，相当气流速度 $v\leqslant M\cdot c=0.2\times 340\text{m/s}=68\text{m/s}$，这就是在第一章中提到的当气流速度 $v<68\text{m/s}$ 时，可按不可压缩处理的理由。

当要求相对误差小于 4%时，M 数为 0.4，其空气速度为 136m/s(计算从略)。

对 $M=0.2$ 及 $M=0.4$ 的两种情况，用(9-2-14)式中的密度比式

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

计算密度的相对变化$\frac{\rho_0-\rho}{\rho}$。

当 $M=0.2$，空气 $k=1.4$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times 0.2^2\right)^{\frac{1}{1.4-1}}=(1+0.008)^{2.5}=1.021$$

则密度相对变化为$\frac{\rho_0-\rho}{\rho}=\frac{1.021\rho-\rho}{\rho}=1.021-1=2.1\%$

当 $M=0.4$，其密度相对变化为

$$\frac{\rho_0-\rho}{\rho}=\frac{\rho_0}{\rho}-1=(1+0.32)^{2.5}-1=0.082=8.2\%$$

计算结果表明，当 M 数稍有增大，则密度相对变化就很显著，随着 M 数的增大(即气流速度加快)，则气流密度减小得越来越显著。

第三节　气体一元恒定流动的连续性方程

一、连续性微分方程

第三章已给出了连续性方程

$$\rho vA=\text{常量}$$

对管流任意两断面，

$$\rho_1 v_1 A_1=\rho_2 v_2 A_2$$

为了反映流速变化和断面变化的相互关系，对上式微分

$$\mathrm{d}(\rho vA)=\rho v\mathrm{d}A+vA\mathrm{d}\rho+\rho A\mathrm{d}v=0 \tag{9-3-1}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}+\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}A}{A}=0 \tag{9-3-2}$$

根据(9-1-1)式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+v\mathrm{d}v=0$$

消去密度 ρ，并将 $c^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$，$M=\frac{v}{c}$代入，则可将(9-3-2)式表为断面 A 与气流速度 v 之间的关系式

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}=(M^2-1)\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{9-3-3}$$

这是可压缩流体连续性微分方程的又一形式。

二、气流速度与断面的关系

讨论(9-3-3)式,可得下面重要结论:

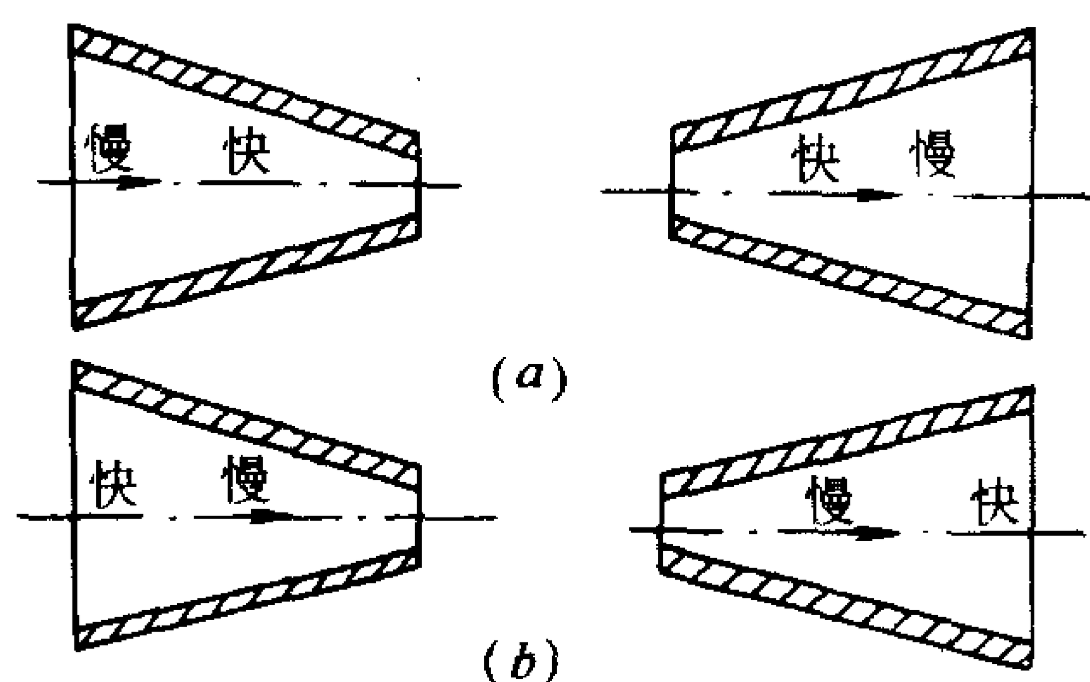


图 9-5 气流速度与断面关系
$(a)M<1$;$(b)\ M>1$

(一) $M<1$ 为亚音速流动,$v<c$ 因此(9-3-3)式中 $M^2-1<0$ 时,dv 与 dA 正负号相反,说明速度随断面的增大而减慢;随断面的减小而加快。这与不可压缩流体运动规律相同(如图 9-5a)。

(二) $M>1$ 为超音速流动,$v>c$ 式中 $M^2-1>0$,dv 与 dA 正负号相同,说明速度随断面的增大而加快;随断面的减小而减慢(如图 9-5b)。

为什么超音速流动和亚音速流动存在着上述截然相反的规律呢?

从可压缩流体在两种流动中,其膨胀程度与速度变化之间关系说明。

应用
$$\frac{dp}{\rho}+v\,dv=0$$

$$c^2=\frac{dp}{d\rho}\qquad dp=c^2 d\rho\qquad \text{代入上式}$$

且
$$M=\frac{v}{c}$$

得
$$\frac{d\rho}{\rho}=-M^2\frac{dv}{v}\tag{9-3-4}$$

(9-3-4)式中 $d\rho$ 与 dv 符号相反,表明速度增加,密度减小。但 $M<1$ 时 M^2 远远小于 1,于是$\frac{d\rho}{\rho}$远远小于$\frac{dv}{v}$。也就是说亚音速流动中,速度增加得快,而密度减小得慢,气体的膨胀程度很不显著。因此 ρv 乘积随 v 的增加而增加。若两断面上速度为 $v_1<v_2$,则 $\rho_1 v_1<\rho_2 v_2$,连续性方程 $\rho_1 v_1 A_1=\rho_2 v_2 A_2$,则必有 $A_1>A_2$。

反之亦然。所以亚音速流动中,存在着与不可压缩流体相同的速度与断面成反向变化的关系。

(9-3-4)式,当 $M>1$ 时,M^2 远远大于 1,于是$\frac{d\rho}{\rho}$远远大于$\frac{dv}{v}$。这说明超音速流动中,虽然速度增加得较慢,密度却减小得很快,气体的膨胀程度非常明显,这就是密度相对变化$\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)$的特性,在亚音速与超音速流动中的根本差别。

因此 ρv 乘积随 v 的增加而减小,若两断面速度为 $v_1<v_2$,则 $\rho_1 v_1>\rho_2 v_2$,同样根据 $\rho_1 v_1 A_1=\rho_2 v_2 A_2$,则必有 $A_1<A_2$。所以超音速流动中速度与断面成同向变化的关系,即通常所说,速度随断面一起增大。

根据上述分析,将 A、v、p、ρ 及 ρv 等与 M 数之间的关系,用图表来说明,如表 9-1 所示。

超音速与亚音速区别，各参数随 M 数的变化关系　　表 9-1

	流　向	面　积 (A)	流　速 (v)	压　力 (p)	密　度 (ρ)	单位面积质量流量 (ρv)
亚音速流动 $M<1$		增　大	减　小	增　大	增　大	减　小
		减　小	增　大	减　小	减　小	增　大
超音速流动 $M>1$		增　大	增　大	减　小	减　小	减　小
		减　小	减　小	增　大	增　大	增　大

（三）$M=1$ 即气流速度与当地音速相等，此时称气体处于临界状态。气体达到临界状态的断面，称为临界断面。临界断面 A_k 上的参数称为临界参数（用脚标"k"表示）。临界气流速度 v_k、临界当地音速 c_k，因 $M=1$，所以 $v_k=c_k$。还有 p_k、ρ_k、T_k 等临界参数。$M=1$ 时，(9-3-3)式中 $(M^2-1)=0$，则必有 $dA=0$，联系(9-3-4)式，当 $M=1$，说明临界断面上，密度的相对变化 $\frac{d\rho}{\rho}$ 增或减等于速度相对变化 $\frac{dv}{v}$ 的减或增，所以断面不需要变化。

从数学概念来说，临界断面的微分 $dA=0$，可以是极小断面，也可以是极大断面。下面证明，速度等于音速不可能在最大断面上达到，即临界断面只能是最小断面。如气流以超音速 $v>c$ 流入扩张管道，见图 9-6a，由于断面扩大，流速增大。因此速度仍为超音速，且越来越大，不会出现音速，也就不可能有最大临界断面；反之，如果气流以亚音速 $v<c$ 流入扩张管道如图 9-6b，由于断面扩大而流速降低。因此流速仍为亚音速；永远不会达到音速。于是证明了临界断面 A_k 只能是最小断面。

根据以上所述可得结论：对于初始断面为亚音速的一般收缩形气流，见图 9-7a，不可能得到超音速流动，最多是在收缩管出口断面上达到音速。因为在收缩管中间断面上，不可能有 $dA=0$ 的最小断面。

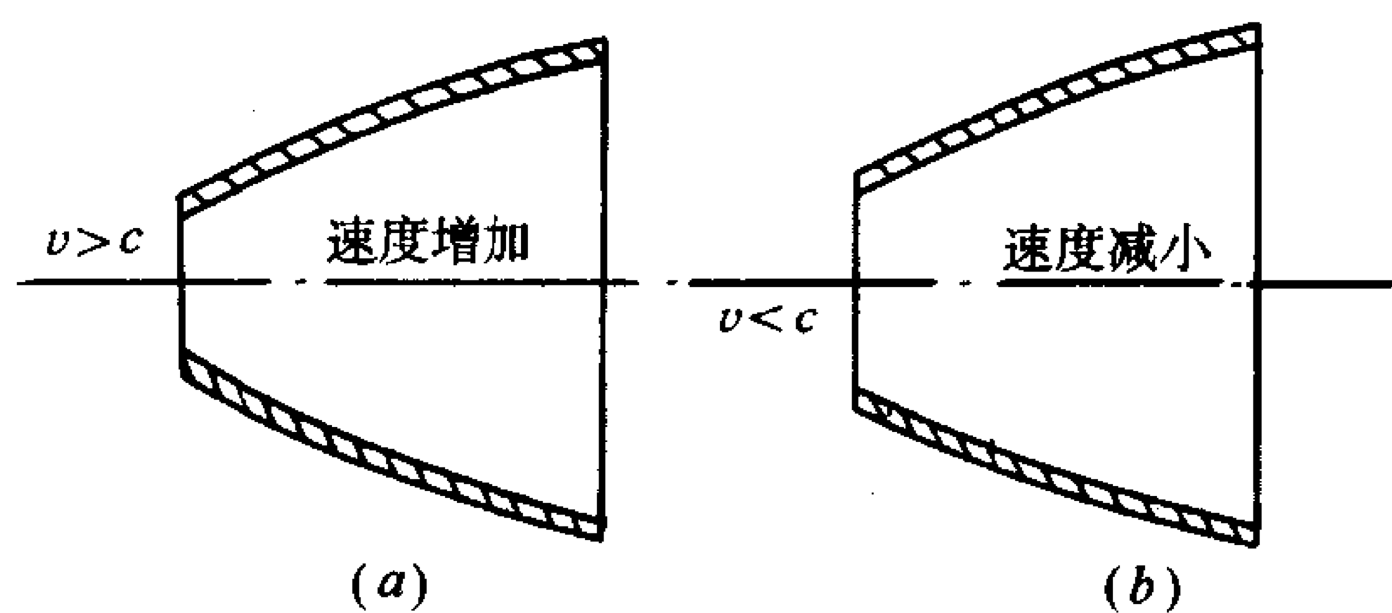


图 9-6　临界断面只能是最小断面

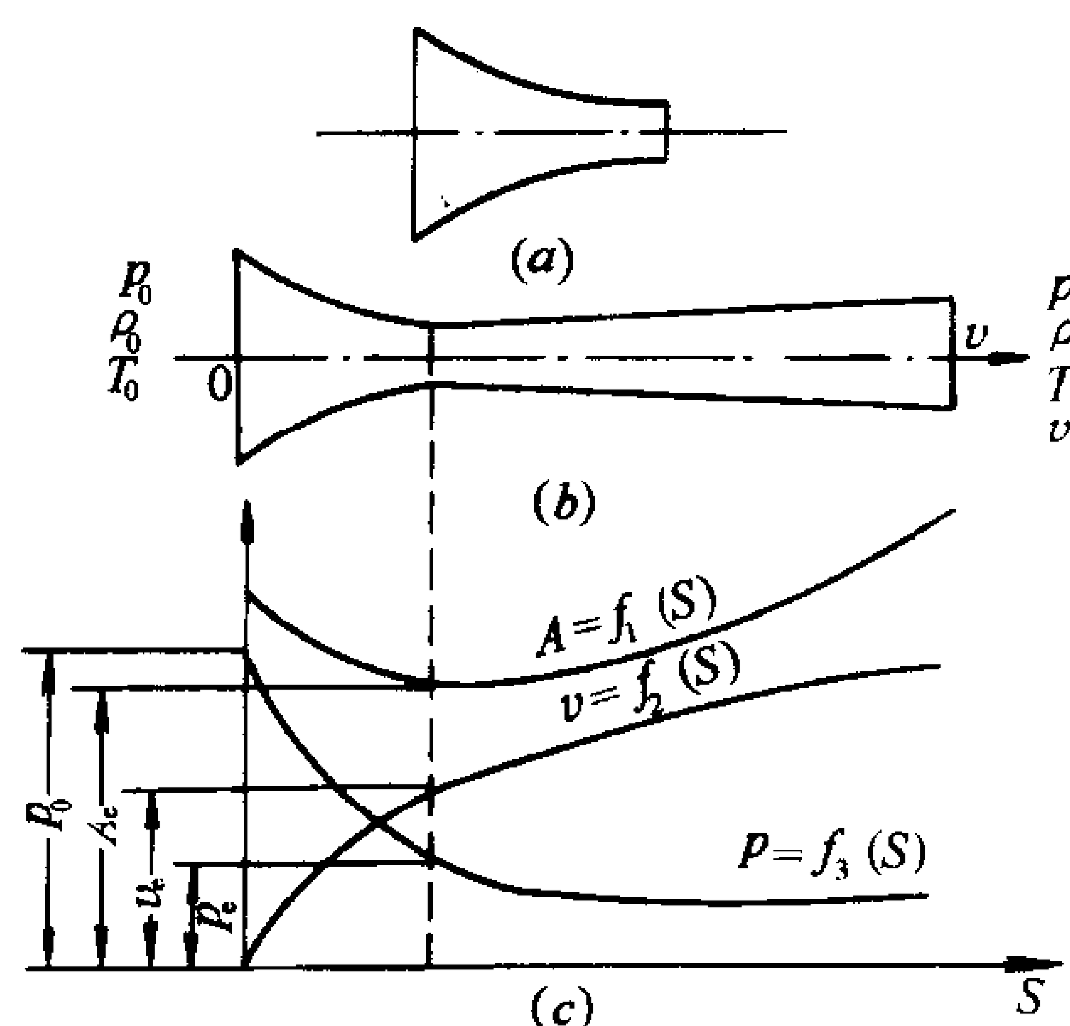


图 9-7　收缩管嘴、拉伐尔喷管

为了得到超音速气流，可使亚音速气流流经收缩管，并使其在最小断面上达到音速，然后再

进入扩张管，满足气流的进一步膨胀增速，便可获得超音速气流。这就确定了从亚音速获得超音速的喷管形状，见图9-7b，此种喷管称为拉伐尔喷管。在图 9-7c 上表示了沿拉伐尔喷管长度方向上，断面 A、速度 v、压力 p 的变化特性。

关于拉伐尔喷管及渐缩喷嘴的流动，仅作如上简介，因为热力学中已有详细讨论，不再重复。

第四节　等温管路中的流动

用管道输送气体，在工程中应用极为广泛，如高压蒸汽管道，煤气管道。这类问题都涉及气流在管路中的流动规律和有关设计计算的理论。本节在前三节基础上讨论等断面管路，等温流动有沿程摩擦损失时气体运动参数的变化。

一、气体管路运动微分方程

气体沿等断面管道流动时，由于摩擦阻力存在，使其压强、密度沿程有所改变，因而气流速度沿程也将变化，这样使计算摩擦阻力的达西公式不能用于全长 l 上，只能适用于 $\mathrm{d}l$ 微段上，于是微段 $\mathrm{d}l$ 上的单位质量气体摩擦损失为

$$\mathrm{d}h_{\mathrm{f}}=\lambda\cdot\frac{\mathrm{d}l}{D}\cdot\frac{v^{2}}{2} \tag{9-4-1}$$

将(9-4-1)式加到理想气体一元流动的欧拉微分方程(9-1-1)式中，便得到了实际气体的一元运动微分方程，即气体管路的运动微分方程式：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+v\mathrm{d}v+\frac{\lambda}{2D}\cdot v^{2}\mathrm{d}l=0 \tag{9-4-2}$$

或写为：

$$\frac{2\mathrm{d}p}{\rho v^{2}}+2\frac{\mathrm{d}v}{v}+\frac{\lambda}{D}\mathrm{d}l=0 \tag{9-4-3}$$

式中，λ 是气流中的摩擦阻力系数。λ 与 $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho vD}{\mu}$及相对粗糙度$\dfrac{\Delta}{D}$有关，(1)$D$ 是一个常数(等断面)，管材一定，则$\dfrac{\Delta}{D}$亦一定；(2)μ 是温度的函数，那么等温流动中 μ 是不变的。(绝热流动中 μ 随温度变化) (3) 等断面管道，A 是常数，从连续性方程知 $\rho vA=$常数，所以 $\rho v=$常数。

因此，在等温流动中，$\mathrm{Re}=\dfrac{\rho vD}{\mu}$是一个常数，管道上任何断面上的 Re 数都相等。因此，等温流动中，摩擦阻力系数 λ 是恒定不变的。

二、管中等温流动

工程实际中的管道很长，气体与外界有可能进行充分的热交换，使气流基本上保持着与周围环境相同的温度，此时，按等温流动处理，有足够的准确性。

根据连续性方程，质量流量 G 为

$$G=\rho_{1}v_{1}A_{1}=\rho_{2}v_{2}A_{2}=\rho vA$$

因 $A_{1}=A_{2}=A$

得出
$$\frac{v}{v_1}=\frac{\rho_1}{\rho} \tag{9-4-4}$$

等温流动有

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_1}{\rho_1}=RT=c$$

则
$$\frac{\rho_1}{\rho}=\frac{p_1}{p} \tag{9-4-5}$$

代入(9-4-4)式，于是
$$\frac{\rho_1}{\rho}=\frac{p_1}{p}=\frac{v}{v_1} \tag{9-4-6}$$

又可导出
$$\frac{1}{\rho v^2}=\frac{p}{\rho_1 v_1^2 p_1} \tag{9-4-7}$$

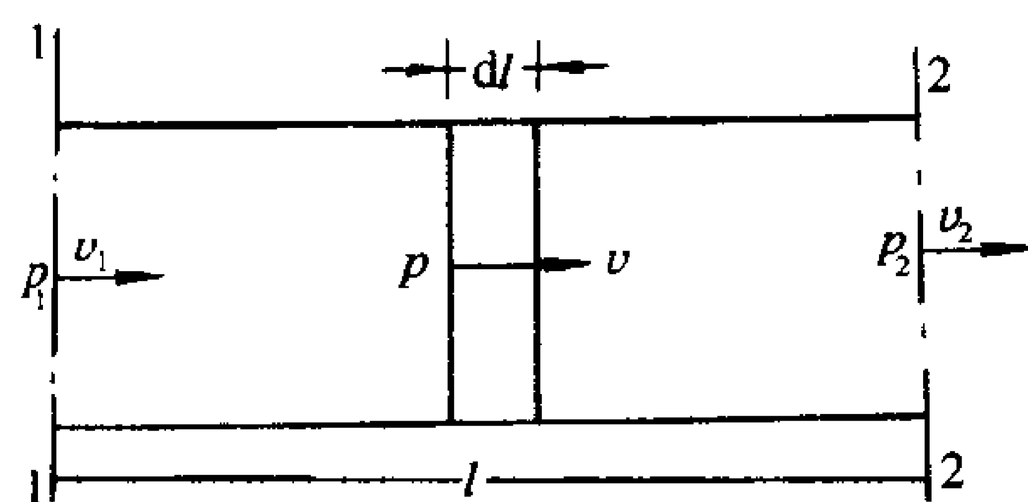


图 9-8　管流

将(9-4-7)式代入(9-4-3)式中，并对长度为 l 的 1、2 两断面进行积分(见图 9-8)

$$\frac{2}{\rho_1 v_1^2 p_1}\int_1^2 p\,\mathrm{d}p+2\int_1^2\frac{\mathrm{d}v}{v}+\frac{\lambda}{D}\int_1^2\mathrm{d}l=0$$

得出
$$p_1^2-p_2^2=\rho_1 v_1^2 p_1\left(2\ln\frac{v_2}{v_1}+\frac{\lambda l}{D}\right) \tag{9-4-8}$$

因管道较长

$$2\ln\frac{v_2}{v_1}\ll\frac{\lambda l}{D}$$

上式可写成

$$p_1^2-p_2^2=\rho_1 v_1^2 p_1\cdot\frac{\lambda l}{D} \tag{9-4-9}$$

$$p_2=\sqrt{p_1^2-\rho_1 v_1^2 p_1\frac{\lambda l}{D}}$$

$$p_2=p_1\sqrt{1-\frac{\rho_1 v_1^2}{p_1}\cdot\frac{\lambda l}{D}} \tag{9-4-10}$$

等温时

$$\frac{p_1}{\rho_1}=RT$$

$$p_2=p_1\sqrt{1-\frac{v_1^2}{RT}\cdot\frac{\lambda l}{D}} \tag{9-4-11}$$

式(9-4-8)、(9-4-9)、(9-4-10)、(9-4-11)就是等温管路的基本公式。

将 $\rho_1=\dfrac{p_1}{RT}$，$v_1=\dfrac{G}{\frac{\pi}{4}\rho_1 D^2}$代入(9-4-9)式中得：

$$p_1^2-p_2^2=\frac{16\lambda lRTG^2}{\pi^2D^5} \tag{9-4-12}$$

就 G 求得

$$G=\sqrt{\frac{\pi^2D^5}{16\lambda lRT}(p_1^2-p_2^2)}\,\mathrm{kg/s} \tag{9-4-13}$$

以上各式都是在等温管流中静压差较大，考虑了压缩性的情况下应用，故又称为大压差公式。(9-4-13)式是气体管路设计计算中常使用的公式。

三、等温管流的特征

气体管路运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+v\mathrm{d}v+\frac{\lambda}{2D}v^2\mathrm{d}l=0$$

将上式各项除以 $\frac{p}{\rho}$ 得：

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}+\frac{v\mathrm{d}v}{p/\rho}+\frac{v^2}{p/\rho}\cdot\frac{\lambda\mathrm{d}l}{2D}=0 \tag{9-4-14}$$

完全气体状态方程式的微分形式为：

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

等温时，

$$\mathrm{d}T=0,\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \tag{a}$$

连续性微分方程式当断面不变时 $\mathrm{d}A=0$，则为：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{b}$$

由(a)、(b)二式得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{9-4-15}$$

由音速公式得：

$$c^2=k\cdot\frac{p}{\rho} \tag{c}$$

将(a)、(b)、(c)三式代入(9-4-14)式中

$$-\frac{\mathrm{d}v}{v}+kM^2\frac{\mathrm{d}v}{v}+kM^2\frac{\lambda\mathrm{d}l}{2D}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{kM^2}{(1-kM^2)}\cdot\frac{\lambda\mathrm{d}l}{2D} \tag{9-4-16}$$

又可得出

$$-\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{kM^2}{(1-kM^2)}\cdot\frac{\lambda\mathrm{d}l}{2D} \tag{9-4-17}$$

讨论上两式：

(一) 当 l 增加,摩阻增加,将引起如下结果。

当 $kM^2<1$, $1-kM^2>0$, 使 v 增加, p 减小。

当 $kM^2>1$, $1-kM^2<0$, 使 v 减小, p 增加。

变化率随摩阻的增大而增大。

(二) 虽然在 $kM^2<1$ 时,摩阻沿流增加,使速度不断增加,由于 $1-kM^2$ 不能等于零,使流速无限增大,所以管路出口断面上 M 数不可能超过 $\sqrt{\frac{1}{k}}$,只能是 $M_2\leqslant\frac{1}{\sqrt{k}}$。

从(9-4-16)式可以得到证明:若摩阻使其流速不断增加,则式中 $\mathrm{d}v>0$

所以必然
$$1-kM^2>0$$

$$kM^2<1 \qquad \therefore M<\sqrt{\frac{1}{k}}$$

因此,在应用流量公式(9-4-13)式时,一定要用 M 是否小于 $\sqrt{\frac{1}{k}}$ 检验计算正确与否,如出口断面上 M 数大于 $\frac{1}{\sqrt{k}}$,则实际流量只能按 $M=\frac{1}{\sqrt{k}}$ 计算。只有当出口断面 M 数小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 时,计算才是有效的。

(三) 在 $M=\frac{1}{\sqrt{k}}$ 的 l 处求得的管长就是等温管流的最大管长,如实长超过最大管长,将使进口断面流速受阻滞。

【例 9-4】 有一直径 $D=100\text{mm}$ 的输气管道,在某一断面处测得压强 $p_1=980\text{kPa}$,温度 $t_1=20℃$,速度 $v_1=30\text{m/s}$。试问气流流过距离为 $l=100\text{m}$ 后,压强降为若干?

【解】 (1) 空气在 20℃时,查得运动粘滞系数值为 $\nu=15.7\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$

计算出雷诺数

$$\mathrm{Re}=\frac{vD}{\nu}=\frac{30\times0.1}{15.7\times10^{-6}}=1.92\times10^5>2320$$

故为紊流,采用 $\lambda=0.0155$

应用(9-4-11)式

$$p_2=p_1\sqrt{1-\frac{\lambda l v_1^2}{DRT}}=980\sqrt{1-\frac{0.0155\times100\times30^2}{0.1\times288\times293}}$$
$$=890\text{kN/m}^2$$

相应的压降 $\Delta p=p_1-p_2=980-890=90\text{kN/m}^2$

(2) 校核是否 $M\leqslant\frac{1}{\sqrt{k}}$

从(9-4-6)式得

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$\therefore \quad v_2 = v_1 \frac{p_1}{p_2} = 30 \times \frac{980}{890} \approx 33\text{m/s}$$

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 293} = 343\text{m/s}$$

$$M = \frac{v}{c} = \frac{33}{343} = 0.096$$

$$\sqrt{\frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{1}{1.4}} = 0.845$$

$$\therefore \quad M < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

这说明计算有效，并说明此时管路实长 $l = 100\text{m}$ 小于最大管长。

第五节　绝热管路中的流动

工程中有些气体管路，往往用绝热材料包裹；有些管路压差很小，流速较高，管路又较短，这样可以认为气流对外界不发生热量交换。这些管路可近似按绝热流动处理。

一、绝热管路运动方程

有摩阻绝热流动，如前述仍可应用无摩阻绝热流动的方程式，但需加上摩阻损失项。正如第三章实际液体伯努利方程推求一样，是在理想伯努利方程之中加入损失项。

应用(9-4-2)式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + v\mathrm{d}v + \frac{\lambda}{2D}v^2\mathrm{d}l = 0$$

式中摩擦阻力系数 λ，上节已论及，绝热流动时是随温度变化的，但可取其平均值 $\bar{\lambda}$：

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_0^l \lambda \mathrm{d}l}{l} \tag{9-5-1}$$

实用中仍可用不可压缩流体的 λ 近似。

上式中密度 ρ，应用等熵绝热过程方程式 $p/\rho^k = C$ 求得 $\rho = C^{-\frac{1}{k}} p^{\frac{1}{k}}$，近似代替有摩阻作用的非等熵绝热过程管路中的密度。

又 $v = \dfrac{G}{\rho A}$，代入上式，并用 v^2 除之得

$$\frac{A^2}{G^2} \cdot c^{-\frac{1}{k}} \cdot p^{\frac{1}{k}} \cdot \mathrm{d}p + \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\lambda}{2D}\mathrm{d}l = 0 \tag{9-5-2}$$

将上式对长度 l 的 1、2 两断面进行积分得：

$$\frac{A^2}{G^2} \cdot c^{-\frac{1}{k}} \int_{p_1}^{p_2} p^{\frac{1}{k}} \mathrm{d}p + \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\lambda}{2D}\int_0^l \mathrm{d}l = 0$$

$$\frac{k}{k+1}\cdot c^{-\frac{1}{k}}\left[p_1^{\frac{k+1}{k}}-p_2^{\frac{k+1}{k}}\right]=\frac{G^2}{A^2}\cdot\left[\ln\frac{v^2}{v_1}+\frac{\lambda}{2D}l\right] \tag{9-5-3}$$

在实际应用中,认为对数项较摩擦损失项小,可忽略。上式变为:

$$p_1^{\frac{k+1}{k}}-p_2^{\frac{k+1}{k}}=\frac{k+1}{k}\cdot c^{\frac{1}{k}}\cdot\frac{\lambda l G^2}{2DA^2} \tag{9-5-4}$$

质量流量公式为

$$G=\sqrt{\frac{2DA^2}{\lambda l}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{\rho_1}{p_1^{\frac{1}{k}}}\left[p_1^{\frac{k+1}{k}}-p_2^{\frac{k+1}{k}}\right]} \tag{9-5-5}$$

上两式即为绝热管路流动基本公式,是有摩擦阻力的绝热管流近似解[1]

二、绝热管流的特性

如同讨论等温管流一样,应用(9-4-14)式及(b)、(c)式

$$\frac{dp}{p}+\frac{vdv}{p/\rho}+\frac{v^2}{p/\rho}\cdot\frac{\lambda dl}{2D}=0 \tag{9-4-14}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{dv}{v} \tag{b}$$

$$c^2=k\frac{p}{\rho} \tag{c}$$

再用等熵过程方程式

$$\frac{p}{\rho^k}=c;p=c\cdot\rho^k;dp=c\cdot k\cdot\rho^{k-1}d\rho$$

$$\therefore\quad\frac{dp}{p}=k\cdot\frac{d\rho}{\rho} \tag{a}$$

将(a)、(b)、(c)代入(9-4-14)式中

$$-k\frac{dv}{v}+\frac{vdv}{c^2/k}+\frac{\lambda dl}{2D}\cdot\frac{v^2}{c^2/k}=0$$

$$-k\frac{dv}{v}+kM^2\frac{dv}{v}+kM^2\frac{\lambda dl}{2D}=0$$

$$\frac{dv}{v}(k-kM^2)=kM^2\frac{\lambda dl}{2D}$$

$$\therefore\quad\frac{dv}{v}=\frac{M^2}{1-M^2}\cdot\frac{\lambda dl}{2D} \tag{9-5-6}$$

或

$$-\frac{dp}{p}=\frac{kM^2}{1-M^2}\cdot\frac{\lambda dl}{2D} \tag{9-5-7}$$

讨论(9-5-6)、(9-5-7)式。

(一) 当 l 增加,摩阻增加,将引起下列结果:

---

[1] 有关精确解的讨论有1985年制冷学报第4期汪兴华撰写《气体绝热管路的流量计算理论》。

$M<1$	$1-M^2>0$	v 增加	p 减小
$M>1$	$1-M^2<0$	v 减小	p 增加

变化率随摩阻的增加而增加。

（二）$M<1$ 时摩阻增加，引起速度增加。正如等温管流一样，在管路中间绝不可能出现临界断面。至出口断面上，M 数只能是 $M_2\leqslant 1$。

如同等温管路证明：$M<1$ 时，且 $dv>0$，则(9-5-6)式中

$$1-M^2>0$$

$$\therefore\quad M<1$$

（三）在 $M=1$ 的 l 处求得的管长就是绝热管流动的最大管长。如管道实长超过最大管长时，与等温管流情况相同。

【例 9-5】 空气温度为 16℃，在 1at 压力下流出，管内径 D 为 10cm 的保温绝热管道。上游马赫数 $M=0.3$，压强比 $p_1/p_2=3.0$，求管长，并判断是否为可能的最大管长。

【解】 (1) 从马赫数 M_1 求 v_1

$$M_1=\frac{v_1}{\sqrt{kRT_1}}\qquad \therefore v_1=M_1\sqrt{kRT_1}$$

空气 $k=1.4$，$R=287\mathrm{m^2/s^2\cdot K}$，$T_1=273+16=289\mathrm{K}$，于是得：

$$v_1=0.3\sqrt{1.4\times 287\times 289}=102\mathrm{m/s}$$

(2) 钢管

$$\Delta=0.0046\mathrm{cm},\frac{\Delta}{D}=0.00046$$

当 16℃时，空气 $\nu=15.3\times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$

$$\mathrm{Re}=\frac{vD}{\nu}=\frac{102\times 0.1}{15.3\times 10^{-6}}=6.7\times 10^5$$

可从第四章莫迪图查得 $\lambda=0.0175$

(3) 应用绝热管流公式(9-5-5)

$$G^2=\frac{2DA^2}{\lambda l}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{\rho_1}{p_1^{\frac{1}{k}}}\left[p_1^{\frac{k+1}{k}}-p_2^{\frac{k+1}{k}}\right]$$

上式又可变为：

$$G^2=\frac{\pi^2D^5}{8\lambda l}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{p_1^2}{RT_1}-\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]$$

$$\left(\rho_1 v_1\frac{\pi}{4}D^2\right)^2=\frac{\pi^2D^5}{8\lambda l}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{p_1^2}{RT_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]$$

$$(\rho_1 v_1)^2=\frac{2D}{\lambda l}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{p_1^2}{RT_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]$$

$$\rho_1=\frac{p_1}{RT_1}=\frac{10^4\times 9.81}{287\times 289}=1.183$$

于是

$$(1.183\times102)^2=\frac{2\times0.1}{0.0175\times l}\cdot\frac{1.4}{2.4}\cdot\frac{(10^4\times9.81)^2}{287\times289}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2.4}{1.4}}\right]$$

$$14560=\frac{655590.98}{l}$$

$$\therefore\quad l\approx45\text{m}$$

(4) 判定是否为最大管长

求 $M_2=v_2/c_2$

式中 v_1 从绝热伯努利方程及流量 ρ_1v_1 求得：

$$\rho_1v_1=1.183\times102=120.666$$

$$\rho_2=\frac{120.666}{v_2}$$

伯努利方程

$$\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p^2}{\rho_2}+\frac{v_2^2}{2}$$

$$3.5\times\frac{10^4\times9.81}{1.183}+\frac{102^2}{2}=3.5\times\frac{\frac{1}{3}\times10^4\times9.81}{\frac{120.666}{v_2}}+\frac{v_2^2}{2}$$

$$295438.686=948.486v_2+\frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2^2+1896.972v_2-590877.372=0$$

$$v_2=\frac{-1896.972\pm\sqrt{1896.972^2+4\times590877.372}}{2}$$

取正值

$$v_2=\frac{-1896.972+2441.723}{2}=272.4\text{m/s}$$

$$\rho_2=\frac{120.666}{272.4}\approx0.443$$

$$C_2=\sqrt{1.4\times\frac{\frac{1}{3}\times10^4\times9.81}{0.443}}=321.5\text{m/s}$$

$$M_2=\frac{272.4}{321.5}=0.847$$

$M_2<1$，所以此管长不是可能的最大管长。

习　题

9-1　分析理想气体绝热流动伯努利方程各项意义。并与不可压缩流体伯努利方程相比较。

9-2　试分析理想气体一元恒定流动的连续性方程意义。并与不可压缩流体的连续性方程比较。

9-3　当地速度 v,当地音速 c,滞止音速 c_0,临界音速 c_k,说明各自的意义,及它们之间的关系。

9-4　为什么说亚音速气流在收缩形管路中,无论管路多长,也得不到超音速气流?

9-5　在超音速流动中,速度随断面积增大而增大的关系,其物理实质是什么?

9-6　在什么样的条件下,才可能把管流视为绝热流动?或等温流动?

9-7　试分析等断面实际气体等温流动时,沿流程速度 v、密度 ρ、压强 p、温度 T 是怎样变化的?

9-8　同上分析绝热管流沿程 v、ρ、p、T 如何变化?

9-9　为什么等温管流在出口断面上的马赫数 $M_2 \leqslant \sqrt{\frac{1}{k}}$?

9-10　为什么绝热管流在出口断面上的马赫数只能 $M_2 \leqslant 1$?

9-11　若要求 $\Delta p \Big/ \frac{\rho v^2}{2}$ 小于 0.05 时,对 20℃空气限定速度是多少?

9-12　有一收缩形喷嘴(如图 9-2),已知 $p_1 = 140\text{kPa(abs)}$, $p_2 = 100\text{kPa(abs)}$, $v_1 = 80\text{m/s}$, $T_1 = 293\text{K}$,求 2-2 断面上的速度 v_2。

9-13　某一绝热气流的马赫数 $M = 0.8$,并已知其滞止压力 $p_0 = 5 \times 98100\text{N/m}^2$,温度 $t_0 = 20℃$,试求滞止音速 c_0,当地音速 c,气流速度 v 和气流绝对压强 p 各为多少?

9-14　有一台风机进口的空气速度为 v_1,温度为 T_1,出口空气压力为 p_2,温度为 T_2,出口断面面积为 A_2,若输入风机的轴功率为 N,试求风机质量流量 G(空气定压比热为 c_p)。

9-15　空气在直径为 10.16cm 的管道中流动,其质量流量是 1kg/s,滞止温度为 38℃,在管路某断面处的静压为 41360N/m^2,试求该断面处的马赫数、速度及滞止压强。

9-16　在管道中流动的空气,流量为 0.227kg/s。某处绝对压强为 137900N/m^2,马赫数 $M = 0.6$,断面面积为 6.45cm^2。试求气流的滞止温度。

9-17　毕托管测得静压为 35850N/m^2(r)(表压),驻点压强与静压差为 65.861kPa,由气压计读得大气压为 100.66kPa,而空气流的滞止温度为 27℃。分别按不可压缩和可压缩情况计算空气流的速度。

9-18　空气管道某一断面上 $v = 106\text{m/s}$, $p = 7 \times 98100\text{N/m}^2\text{(abs)}$, $t = 16℃$,管径 $D = 1.03\text{m}$。试计算该断面上的马赫数及雷诺数。(提示:设动力粘滞系数 μ 在通常压强下不变)

9-19　16℃的空气在 $D = 20\text{cm}$ 的钢管中作等温流动,沿管长 3600m 压降为 1at,假若初始压强为 5at(abs),设 $\lambda = 0.032$,求质量流量。

9-20　已知煤气管路的直径为 20cm,长度为 3000m,气流绝对压强 $P_1 = 980\text{kPa}$, $T_1 = 300\text{K}$,摩阻系数 $\lambda = 0.012$,煤气的 $R = 490\text{J/(kg·K)}$,绝热指数 $k = 1.3$,当出口的外界压力为 490kPa 时,求质量流量(煤气管路不保温)。

9-21　空气自 $p_0 = 1960\text{kPa}$,温度为 293K 的气罐中流出,沿流长度为 20m,直径为 2cm 的管道流入 $p_2 = 392\text{kPa}$ 的介质中,设流动为等温流动,摩阻系数 $\lambda = 0.015$,不计局部阻力损失,求出口质量流量。

9-22　空气在光滑水平管中输送,管长 200m,管径 5cm,摩阻系数 $\lambda = 0.016$,进口处绝对压强为 10^6N/m^2,温度 20℃,流速 30m/s,求沿此管压降为多少?

若 (1) 气体作为不可压缩流体;

(2) 可压缩等温流动;

(3) 可压缩绝热流动;

试分别计算之。

第十章　相似性原理和因次分析

流体力学实验，是发展流体力学理论，验证流体力学假说，理解流体力学现象，解决流体力学工程问题的一个重要手段。

“没有理论的实践是盲目的实践”。用什么理论来指导实验，用什么准则来设计实验，用什么参数来整理成果，不仅对流体力学实验是重要的，而且对于理解实验结果，评价实验数据，运用实验成果，发展实验技术也是重要的。

这里，简单阐述和实验有关的一些理论性的基本知识。其中，包括作为模型实验理论根据的相似性原理，阐述原型和模型相互关系的模型律，以及有助于选择实验参数的因次分析法。

第一节　力学相似性原理

如果两个同一类的物理现象，在对应的时空点，各标量物理量的大小成比例，各向量物理量除大小成比例外，且方向相同，则称两个现象是相似的。要保证两个流动问题的力学相似，必须是两个流动几何相似，运动相似，动力相似，以及两个流动的边界条件和起始条件相似。

一、几何相似

几何相似是指流动空间几何相似。即形成此空间任意相应两线段夹角相同，任意相应线段长度保持一定的比例。

在图 10-1 所示的两管流中，模型管流和原型管流几何相似。要求两渐扩管空间几何相似，必须相应线段夹角相同，即

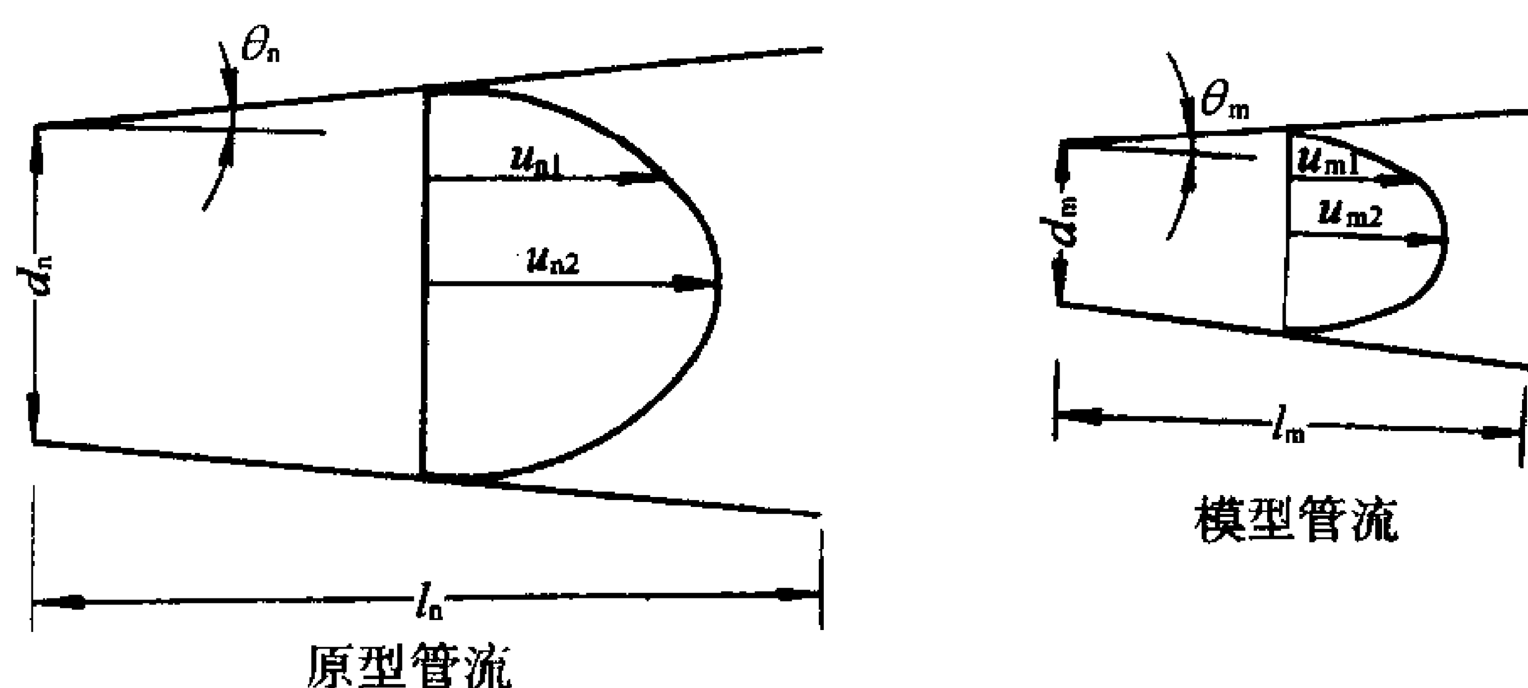


图 10-1　模型管流与原型管流

$$\theta_n = \theta_m$$

相应的线性长度保持一定的比例。

$$\frac{d_n}{d_m} = \frac{l_n}{l_m} = \lambda_l \qquad (10\text{-}1\text{-}1)$$

这个比例常数，称为长度比例常数。显然，两相应面积之比，为长度比例的平方。

$$\frac{A_n}{A_m}=\lambda_A=\lambda_l^2$$

而相应体积之比，为长度比例的立方。

$$\frac{V_n}{V_m}=\lambda_v=\lambda_l^3$$

几何相似，是力学相似的前提。有了几何相似，才有可能在模型流动和原型流动之间，存在着相应点，相应线段，相应断面和相应体积这一系列互相对应的几何要素。才有可能在两流动之间存在着相应流速，相应加速度，相应作用力等一系列互相对应的力学量。才有可能通过模型流动的相应点，相应断面的力学量测定，来预测原型流动的流体力学状态。

二、运动相似

两流动运动相似，要求两流动的相应流线几何相似，或说，相应点的流速大小成比例，方向相同。参照图 10-1。

$$\frac{u_{n1}}{u_{m1}}=\frac{u_{n2}}{u_{m2}}=\frac{v_n}{v_m}=\lambda_v \tag{10-1-2}$$

λ_v 称为速度比例常数。

有了速度比例常数，和长度比例常数，显然可以根据简单的 $t=l/v$ 的关系，得出时间比例常数 λ_t。

$$\lambda_t=\lambda_l/\lambda_v \tag{10-1-3}$$

即时间比例常数是长度比例常数和速度比例常数之比。这个比例常数表明，原型流动和模型流动实现一个特定流动过程所需时间之比。

不难证明，加速度比例常数是速度比例常数除以时间比例常数。

$$\lambda_a=\frac{\lambda_v}{\lambda_t}=\lambda_v{}^2/\lambda_l \tag{10-1-4}$$

由此可见，只要速度相似，加速度也必然相似。反之亦然。

$$\lambda_v=\sqrt{\lambda_a\lambda_l} \tag{10-1-5}$$

由于流速场的研究是流体力学的首要任务，运动相似通常是模型实验的目的。

三、动力相似

流动的动力相似，要求同名力作用，相应的同名力成比例。

这里所提的同名力，指的是同一物理性质的力。例如重力、粘性力、压力、惯性力、弹性力。所谓同名力作用，是指原型流动中，如果作用着粘性力、压力、重力、惯性力、弹性力，则模型流动中也同样的作用着粘性力、压力、重力、惯性力、弹性力。相应的同名力成比例，是指原型流动和模型流动的同名力成比例。

$$\frac{F_{\nu n}}{F_{\nu m}}=\frac{F_{pn}}{F_{pm}}=\frac{F_{Gn}}{F_{Gm}}=\frac{F_{In}}{F_{Im}}=\frac{F_{En}}{F_{Em}} \tag{10-1-6}$$

式中，ν、P、G、I、E 分别表示粘性力、压力、重力、惯性力、弹性力。

动力相似在力学相似中起着什么作用呢？两惯性力相似是其它合力作用相似的结果。所以动力相似是运动相似的保证。

第二节　相　似　准　数

一、由动力相似的定义推导相似准则

怎样来达到流动的动力相似以保证流动相似呢?

设想在两相似水流中(图 10-2),取两个相应质点 n 和 m,研究两质点所受粘、压、重、惯各力。认为水不可压缩,不存在弹性力相似的问题。根据动力相似条件,

$$\frac{F_{vn}}{F_{vm}}=\frac{F_{Pn}}{F_{Pm}}=\frac{F_{Gn}}{F_{Gm}}=\frac{F_{In}}{F_{Im}}$$

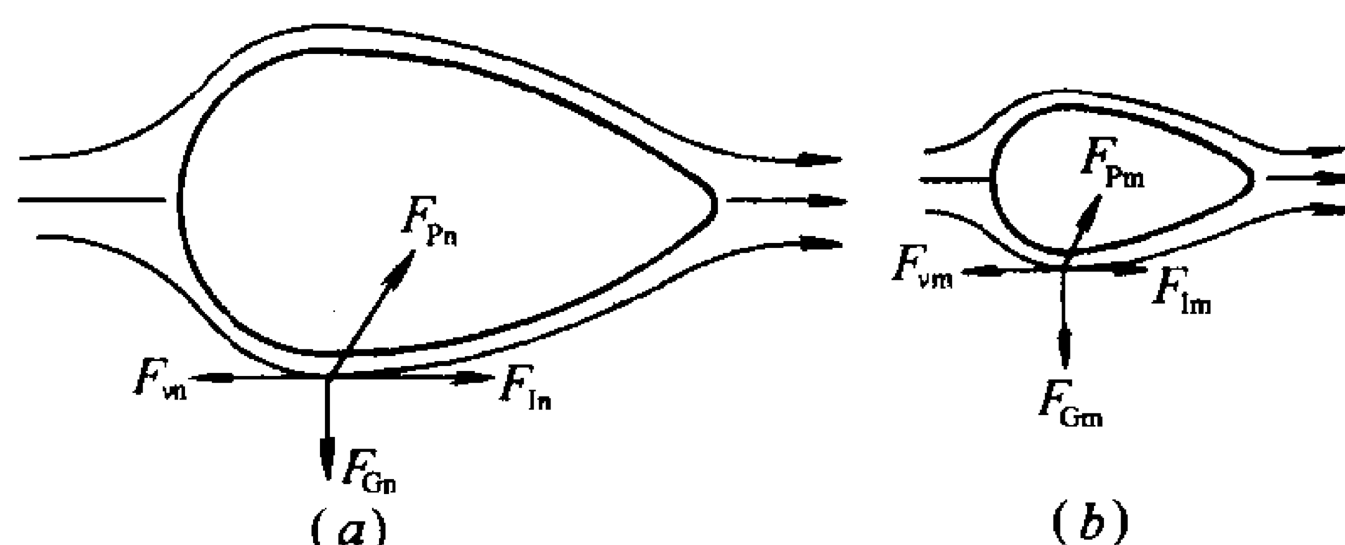


图 10-2　相似流动

(a)原型流动;(b)模型流动

由于惯性力相似与运动相似直接相关,我们把以上的关系分写为和惯性力相联系的下列等式:

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_{Pn}}{F_{Pm}}&=\frac{F_{In}}{F_{Im}} &&(a)\\ \frac{F_{Gn}}{F_{Gm}}&=\frac{F_{In}}{F_{Im}} &&(b)\\ \frac{F_{vn}}{F_{vm}}&=\frac{F_{In}}{F_{Im}} &&(c)\end{aligned}\right\}\tag{10-2-1}$$

现在改变(10-2-1a)式,将它写成

$$\frac{F_{Pn}}{F_{In}}=\frac{F_{Pm}}{F_{Im}}\tag{10-2-2}$$

这样改变的特点,在于使力的比值属于同一原型或模型流动。

假定在原型水流中所取的质点是边长为 l_n 的立方体,模型水流中所取的相应质点是边长为 l_m 的立方体,则两水流质点所受压差作用分别为 $\Delta p_n l_n^2$ 和 $\Delta p_m l^2$。这里采用压差 Δp 而不用压强,是因为压力是表面力。作用于质点的有效压力是质点两表面的压差而不是压力。

作用于此两立方体的惯性力为 $\rho Q_n v_n=\rho v_n^2 l^2$ 和 $\rho Q_m v_m=\rho v_m^2 l_m^2$

将以上两力代入上式

$$\frac{\Delta p_n l_n^2}{\rho v_n^2 l_n^2}=\frac{\Delta p_m l_m^2}{\rho v_m^2 l_m^2}$$

即

$$\frac{\Delta p_n}{\rho v_n^2}=\frac{\Delta p_m}{\rho v_m^2}$$

以符号 E_u 表比值

$$E_u=\frac{\Delta p}{\rho v^2} \tag{10-2-3}$$

称为流动的欧拉数。欧拉数是压差和惯性力的相对比值。

原型水流和模型水流压力和惯性力的相似关系可以写为：

$$Eu_n=Eu_m$$

即原型和模型流动的欧拉数相等。

现在以同样方法改变(10-2-1b)式

$$\frac{F_{In}}{F_{Gn}}=\frac{F_{Im}}{F_{Gm}}$$

两立方体质点的重力，为两质点的容重和体积的相乘积。

$$F_{Gn}=\gamma l_n^3 \qquad F_{Gm}=\gamma l_m^3$$

连同惯性力关系代入上式

$$\frac{\rho v_n^2 l_n^2}{\gamma l_n^2}=\frac{\rho v_m^2 l_m^2}{\gamma l_m^3}$$

但$\frac{\gamma}{\rho}=g$，得出

$$\frac{v_n^2}{gl_n}=\frac{v_n^2}{gl_m}$$

以符号 Fr 表此比值

$$Fr=\frac{v^2}{gl} \tag{10-2-4}$$

称为流动的弗诺得数。弗诺得数是惯性力与重力的相对比值。

原型水流和模型水流惯性力和重力的相似关系，可以写为

$$Fr_n=Fr_m \tag{10-2-5}$$

即原型流动和模型流动的弗诺得数相等。

(10-2-1c)式经过变换后成为

$$\frac{F_{In}}{F_{\nu n}}=\frac{F_{Im}}{F_{\nu m}}$$

是惯性力和粘性力的比值。这已在阻力理论中提出，称为雷诺数。

$$Re=\frac{vl}{\nu} \tag{10-2-6}$$

则原型水流和模型水流粘性力和惯性力的相似关系可以写为

$$Re_n=Re_m \tag{10-2-7}$$

即原型流动和模型流动的雷诺数相等。

在高速气流中，弹性力起主导作用。惯性力和弹性力的比值，以 $\rho v^2 l^2/El^2$ 来表证。式中 E 为气体的体积弹性模量。则原型和模型的弹性力相似，在消去 l^2 之后，得出

$$\frac{\rho_n v_n^2}{E_n}=\frac{\rho_n v_m^2}{E_m}$$

但根据气体动力学，我们知道

$$\sqrt{E/\rho}=a$$

则

$$E/\rho=a^2$$

相似关系简化为

$$\left(\frac{v_n}{a_n}\right)^2=\left(\frac{v_m}{a_m}\right)^2$$

即

$$\frac{v_n}{a_n}=\frac{v_m}{a_m}$$

这个速度的比值就是马赫数 M。

由此可见，弹性力相似，原型流动和模型流动的马赫数相等。

$$M_n=M_m \tag{10-2-8}$$

以上所提出的一系列数：欧拉数，弗诺得数，雷诺数，马赫数都是反映动力相似的相似准数。欧拉数是压力的相似准数，弗诺得数是重力的相似准数，雷诺数是粘性力的相似准数，马赫数是弹性力的相似准数。

怎样来计算相似准数的具体数值？

这些相似准数包含有物理常数 ρ、ν、g，流速 v 和长度 l 等。除了物理常数外，在实际计算时需要采用对整个流动有代表性的量。例如，在管流中，断面平均流速是有代表性的速度，而管径则是长度的代表性的量。一般地，对某一流动，具有代表性的物理量称为定性量，或称为特征物理量。平均流速就是速度的定性量，称为定性流速。管径称为定性长度。定性量可以有不同的选取。例如，定性长度可取管的直径、半径，或水力半径。所得到的相似准数值也因此而不同。所以，定性量一经选定（通常按惯例选择）之后，在研究同一问题时，不能中途变更。在管流计算雷诺数时，习惯上分别选平均流速 v 和管径 d 作为定性流速和定性长度。

这样，我们根据动力相似的定义导出了相似准数，而且，结果表明，两个流动现象如果是动力相似的，那末，它们的同名准则数相等。

二、由运动微分方程式推导相似准数

由于流体的运动微分方程式反映着惯性力、质量力、压力、粘性力和弹性力等诸力的平衡关系，因此，我们也可以从运动微分方程式导出相似准数。

为简单起见，我们以重力作用下的粘性不可压缩流体恒定流动为例。此时，基本方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0\\ u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_x}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)\\ u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_y}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)\\ u_x\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=-g-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)\end{cases} \tag{10-2-9}$$

引入无量纲量 x'、y'、z'、u'_x、u'_y、u'_z和 p'。它们与相应的有量纲量之间的关系为

$$\begin{cases} x = Lx', \ y = Ly', \ z = Lz' \\ u_x = Vu'_x, \ u_y = Vu'_y, \ u_z = Vu'_z \\ p = Pp' \end{cases} \tag{10-2-10}$$

式中 L、V、P 均为定性量。

将方程组无量纲化，也即将(10-2-10)式代入(10-2-9)式，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(Vu''_x)}{\partial(Lx')}+\dfrac{\partial(Vu'_y)}{\partial(Ly')}+\dfrac{\partial(Vu'_z)}{\partial(Lz')}=0 \\ (Vu'_x)\dfrac{\partial(Vu'_x)}{\partial(Lx')}+(Vu'_y)\dfrac{\partial(Vu'_x)}{\partial(Ly')}+(Vu'_z)\dfrac{\partial(Vu'_x)}{\partial(Lz')} \\ =-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(Pp')}{\partial(Lx')}+\nu\left(\dfrac{\partial^2(Vu'_x)}{\partial(Lx')^2}+\dfrac{\partial^2(Vu'_x)}{\partial(Ly')^2}+\dfrac{\partial^2(Vu'_x)}{\partial(Lz')^2}\right) \\ \cdots\cdots \\ (Vu'_x)\dfrac{\partial(Vu'_z)}{\partial(Lx')}+(Vu'_y)\dfrac{\partial(Vu'_z)}{\partial(Ly')}+(Vu'_z)\dfrac{\partial(Vu'_z)}{\partial(Lz')} \\ =-g-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(Pp')}{\partial(Lz')}+\nu\left(\dfrac{\partial^2(Vu'_z)}{\partial(Lx')^2}+\dfrac{\partial^2(Vu'_z)}{\partial(Ly')^2}+\dfrac{\partial^2(Vu'_z)}{\partial(Lz')^2}\right) \end{cases}$$

由于 L, V, P 均为常数，且注意到

$$\frac{\partial^2}{\partial(Lx')^2}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2},\ \frac{\partial^2}{\partial(Ly')^2}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial y'^2},\ \frac{\partial^2}{\partial(Lz')^2}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

上式可化成

$$\begin{cases} \dfrac{V}{L}\dfrac{\partial u'_x}{\partial x'}+\dfrac{V}{L}\dfrac{\partial u'_y}{\partial y'}+\dfrac{V}{L}\dfrac{\partial u'_z}{\partial z'}=0 \\ \dfrac{V^2}{L}u'_x\dfrac{\partial u'_x}{\partial x'}+\dfrac{V^2}{L}u'_y\dfrac{\partial u'_x}{\partial y'}+\dfrac{V^2}{L}u'_z\dfrac{\partial u'_z}{\partial z'} \\ =-\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{P}{L}\dfrac{\partial p'}{\partial x'}+\nu\dfrac{V}{L^2}\left(\dfrac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2}+\dfrac{\partial^2 u'_x}{\partial z'^2}\right) \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{V^2}{L}u'_x\dfrac{\partial u'_z}{\partial x'}+\dfrac{V^2}{L}u'_y\dfrac{\partial u'_z}{\partial y'}+\dfrac{V^2}{L}u'_z\dfrac{\partial u'_z}{\partial z'} \\ =-g-\dfrac{P}{\rho L}\dfrac{\partial p}{\partial z'}+\nu\dfrac{V}{L^2}\left(\dfrac{\partial^2 u'_z}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 u'_z}{\partial y'^2}+\dfrac{\partial^2 u'_z}{\sigma z'^2}\right) \end{cases} \tag{a}$$

式(a-1)两边除以 V/L，式(a-2)～(a-4)两边除以 V^2/L，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'_x}{\partial x'}+\dfrac{\partial u'_y}{\partial y'}+\dfrac{\partial u'_z}{\partial z'}=0 \\ u'_x\dfrac{\partial u'_x}{\partial x'}+u'_y\dfrac{\partial u'_x}{\partial y'}+u'_z\dfrac{\partial u'_x}{\partial z'}=-\dfrac{P}{\rho V^2}\dfrac{\partial p'}{\partial x'}+\dfrac{\nu}{VL}\left(\dfrac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2}+\dfrac{\partial^2 u'_x}{\partial z'^2}\right) \\ \cdots\cdots \\ u'_x\dfrac{\partial u'_z}{\partial x'}+u'_y\dfrac{\partial u'_z}{\partial y'}+u'_z\dfrac{\partial u'_z}{\partial z'}=-\dfrac{gL}{V^2}-\dfrac{P}{\rho V^2}\dfrac{\partial p'}{\partial z'}+\dfrac{\nu}{VL}\left(\dfrac{\partial^2 u'_z}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 u'_z}{\partial y'^2}+\dfrac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2}\right) \end{cases}$$

此式又可写成

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_x'}{\partial x'}+\dfrac{\partial u_y'}{\partial y'}+\dfrac{\partial u_z'}{\partial z'}=0 \\
u_x'\dfrac{\partial u_x'}{\partial x'}+u_y'\dfrac{\partial u_x'}{\partial y'}+u_z'\dfrac{\partial u_x'}{\partial z'}=-\mathrm{Eu}\dfrac{\partial p'}{\partial x'}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial y'^2}+\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial z'^2}\right) \\
\cdots\cdots \\
u_x'\dfrac{\partial u_z'}{\partial x'}+u_y'\dfrac{\partial u_z'}{\partial y'}+u_z'\dfrac{\partial u_z'}{\partial z'}=-\dfrac{1}{\mathrm{Fr}}-\mathrm{Eu}\dfrac{\partial p'}{\partial z'}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_z'}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 u_z'}{\partial y'^2}+\dfrac{\partial^2 u_z'}{\partial z'^2}\right)
\end{cases}
\qquad (10\text{-}2\text{-}11)
$$

式中 Eu,Re,Fr 即分别为上述的准则数欧拉数,雷诺数和弗诺得数。自然,如果我们考虑的是可压缩流体,还将出现马赫数 M。式(10-2-11)就是式(10-2-9)的无量纲形式,即无量纲方程组。

如果两个流动是相似的,也即它们的无量纲量分别相等

$$u_{xn}'=u_{xm}',\ u_{yn}'=u_{ym}',\ u_{zn}'=u_{zm}',\ p_n'=p_m'$$

此时,对于两个流动的无量纲量而言,必然满足同一方程组。因此,必须有

$$\mathrm{Eu}_n=\mathrm{Eu}_m,\ \mathrm{Re}_n=\mathrm{Re}_m,\ \mathrm{Fr}_n=\mathrm{Fr}_m$$

这样,我们由运动微分方程式同样导出了相似准数,以及得到相似流动同名准则数必须相等的结论。这一结论是具有普遍性的。相似理论中的第一定理表明:两个相似的现象,它们的同名相似准数必定相等,即相同名称的相似准数分别相等。

同名相似准数相等仅仅是相似的必要条件。相似第三定理告诉我们:两个现象相似的充分必要条件除了由基本规律导得的相似准数相等外,还包括单值性条件相似。所谓单值性条件是指把某一现象从无数个同类现象中区分开来的条件。单值性条件相似包括几何相似,边界条件和初始条件相似,以及由单值性条件所导得的相似准数相等。

其实,从两个流动的数学模型来看,从无量纲方程组导得的准则数相等,意味着两个流动的无量纲方程组相同,因而它们具有相同的通解;而边界条件相似和初始条件相似,保证了具有相同的特解。当将无量纲量重新转化为有量纲量后,两个流动的同名物理量在时空对应点上的比值保持为常数,换句话说,两个流动是相似的。自然,几何相似是必须满足的,不然,至少不存在对应点,更谈不上两个流动相似。

我们从运动微分方程式(或说从动力相似)导得相应的准则数,这是仅就流动问题的力学相似而言的。以上的相似性原理和方法可应用于任意的物理现象。譬如,传热问题。从热相似的边界条件导得努塞尔特准则数 Nu 等,就是从边界条件导得准则数的典型例子。

那末准则数之间是否是毫无关系的呢?

相似第二定理阐明:由定性物理量组成的相似准数,相互间存在着函数关系。在考虑不可压缩流体流动的动力相似时,决定流动平衡的四种力,粘滞力、压力、重力和惯性力并非都是独立的,根据图 10-2 中力多边形相似法则,其中必有一力是被动的,只要三个力分别相似,则第四个力必然相似。因此,在决定动力相似的三个准则数 Eu,Fr,Re 中,也必有一个是被动的,相互之间存在着依赖关系

$$\mathrm{Eu}=f(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}) \qquad (10\text{-}2\text{-}12)$$

在大多数流动问题中,通常欧拉数 Eu 是被动的准则数。我们将对流动起决定作用的准则数称为决定性相似准数,或称为定型相似准数;被动的准则数称为被决定的相似准数,

或非定型相似准数。准则数之间的函数关系称为准则方程。例如(10-2-12)式。

相似第二定理为我们解决了实验数据的整理方法和实验结果的应用，对实验的安排同样具有指导意义。

第三节 模 型 律

在安排模型实验前进行模型设计时，怎样根据原型的定性物理量确定模型的定性量值呢？譬如确定模型管流中的平均流速，以便决定实验所需的流量。这主要是根据准则数相等来确定的。但问题是在模型几何尺寸和流动介质等发生变化，不同于原型值时，事实上很难保证所有的准则数都分别相等。例如，不可压缩流体的恒定流，只有当弗诺得数和雷诺数相等时，才能达到动力相似。

但是，雷诺数和弗诺得数中都出现了定性长度和定性速度。因此，雷诺数和弗诺得数相等，就要求原型和模型在长度和速度的比例上要保持一定的关系。

例如，对于雷诺数相等的(10-2-7)式，

$$\mathrm{Re}_n = \mathrm{Re}_m$$

即

$$\frac{l_n v_n}{\nu_n} = \frac{l_m v_m}{\nu_m}$$

则长度和速度的比例关系为：

$$\frac{v_n}{v_m} = \frac{\nu_n}{\nu_m} \Big/ \frac{l_n}{l_m}$$

即

$$\lambda_v = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_l} \tag{10-3-1}$$

在多数情况下，模型和原型采用同一种类流体，则

$$\lambda_v = \frac{1}{\lambda_l} \tag{10-3-2}$$

雷诺数相等，表示粘性力相似。原型和模型流动雷诺数相等这个相似条件，称为雷诺模型律。按照上述比例关系调整原型流动和模型流动的流速比例和长度比例，就是根据雷诺模型律进行设计。

另一方面，对于弗诺得数相等的(10-2-5)式，

$$\mathrm{Fr}_n = \mathrm{Fr}_m$$

也就是

$$\frac{v_n^2}{g_n l_n} = \frac{v_m^2}{g_m l_m}$$

由于

$$g_n = g_m$$

则长度和速度的比例关系，

$$\frac{l_n}{l_m} = \left(\frac{v_n}{v_m}\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_l &= \lambda_v^2 \\ \lambda_v &= \sqrt{\lambda_l} \end{aligned}\right\} \tag{10-3-3}$$

弗诺得数，表示重力相似。原型和模型流动弗诺得数相等的这个相似条件，称为弗诺得模型律。按照上述比例关系调整原型流动和模型流动的长度比例和速度比例，就是根据弗诺得模型律进行设计。

从雷诺模型律和弗诺得模型律的对比可以看出，要同时满足两模型律来设计模型基本上是不可能的。因为这要求流速比例尺对于长度比例尺既是倒数关系，又是平方根关系，这显然不可能。若调整运动粘滞系数比例尺 λ_ν，使同时满足式(10-3-1)和式(10-3-3)，则

$$\lambda_\nu = \lambda_l^{3/2}$$

要求在模型流动中，采用一定粘度的流体，这在实际上也是很不容易实现的。

因此，在模型设计时，应该抓住对流动起决定性作用的力，保持原型和模型的该力相应的准则数相等。这种只满足主要相似准数相等的相似称为局部(或部分)相似。在几何相似的前提下，所有的相似准数都相同的相似称为完全相似。我们把仅考虑某一种外力的动力相似条件称为相似准则或特种模型定律。例如，仅考虑粘滞力时，应保持 $Re_n = Re_m$，就称为雷诺模型律；考虑重力时，$Fr_n = Fr_m$，称为弗诺得模型律等。对局部相似的模型实验结果原则上应进行修正。但这往往是较困难的。

除了在研究新的流动问题时，我们需探求其模型律外，在学习相似理论时，也应该掌握常见流动的模型律。

水在管中受两端水头差的作用而流动，水流的平均流速，根据连续性方程，只受断面大小及其沿程变化的制约。断面流速分布和沿程水头损失，在同一水头差的条件下，与管道本身是否倾斜，及倾斜大小无关，这说明重力不起作用，影响流速分布的因素是粘性力，因此采用雷诺模型律。

当管流雷诺数相当大时，断面流速接近均匀分布，紊流达到成熟阶段，进入阻力平方区。说明阻力与惯性力均与流速平方成正比。这样，模型设计不受模型律的制约，只是要求尽可能提高模型流动的雷诺数，使它也进入阻力平方区。由于这个缘故，阻力平方区也称为自动模型区。所谓自动模型区(或称自模拟区)，就是说，当某一相似准数在一定的数值范围内，流动的相似性和该准则数无关，也就是即使原型和模型的该准则数值不相等，流动仍保持相似，准则数的这一范围就称为自动模型区，并说流动进入了该准则数的自动模型区。

管中流动，由于管壁摩擦作用成为重要因素，在几何相似的设计中，还要注意管壁粗糙度的相似。即管壁绝对粗糙度 K 也应保持同样的长度比例常数：

$$\frac{K_n}{K_m} = \frac{d_n}{d_m} = \lambda_l$$

写成相似准则的形式，

$$\frac{K_n}{d_n} = \frac{K_m}{d_m}$$

$$\left(\frac{K}{d}\right)_n = \left(\frac{K}{d}\right)_m$$

即原型相对粗糙度与模型相对粗糙度相等。

具有自由面的液体急变流动，无论是流速的变化或水面的波动，都强烈地受重力的作用，一般采用弗诺得模型律。

气体从静压箱经孔口淹没出流，如果是空气流出至同温度的空气中，则重力和浮力相平衡。在静压箱压差一定的条件下，孔口朝上或朝下，不影响流速及其分布。如果流速大，粘性力的影响也可以忽略的话，则流速的比值可以任意选取，与长度比例常数无关。这时，为了计算原型孔口出流速度，可以采用欧拉数相等。

$$\frac{\Delta p_n}{\rho v_n^2}=\frac{\Delta p_m}{\rho v_m^2}$$

$$v_n=v_m\sqrt{\frac{\Delta p_n}{\Delta p_m}}$$

式中，Δp_n 和 Δp_m 为原型和模型静压箱与外界的压差。

液体的孔口淹没出流也遵循同一规律。

紊流淹没射流，重力和浮力平衡，不显示作用。流体以较高的流速流出，摩擦力作用又处于自动模型区。这时，模型设计不受模型律制约，只要求模型流动有较高的雷诺数，就可以实现原型流动和模型流动在流速分布上的相似。正是这样，无限空间紊流射流的理论就是以这个前提为基础的。

但是，非等温射流，却受温度不同所产生的密度差异的影响，这种影响表现为重力和浮力的不平衡。这时，有效重力就是重力和浮力之差，所以采用阿基米德数 Ar 来代替表征重力相似的弗诺得数。它们在重力作用上，相差一个乘数$\frac{\Delta\rho}{\rho}$，式中，$\Delta\rho$ 为流体密度和外界介质密度之差。ρ 为流体的密度。由于这项密度差是温度差引起的，不难根据状态方程证明，

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta T_0}{T_u}$$

则阿基米德数

$$\mathrm{Ar}=\frac{gd_0}{v_0^2}\cdot\frac{\Delta T_0}{T_u}$$

式中 d_0——风口直径；

v_0——风口速度；

ΔT_0——风口气流相对于室内空气的温差；

T_u——室内绝对温度。

阿基米德数对非等温射流的影响，已反映在射流轴线的理论推导公式上。

【例 10-1】 某车间长 30m，宽 15m，高 10m，用直径为 0.6m 的风口送风。风口风速为 8m/s。如长度比例常数取为 5，确定模型的尺寸及出口风速。

【解】 (1) 模型尺寸

由于 $\lambda_1=5$，模型长为$\frac{30}{5}=6\text{m}$，模型宽为$\frac{15}{5}=3\text{m}$，模型高为$\frac{10}{5}=2\text{m}$，风口直径$\frac{0.6}{5}=0.12\text{m}$。

(2) 模型出口风速

原型雷诺数，用空气 $\nu=0.0000157\text{m}^2/\text{s}$

$$\mathrm{Re}_n=\frac{0.6\times 8}{0.0000157}=3.06\times 10^7$$

气流处于阻力平方区，采用粗糙度较大的管子。阻力平方区的最低雷诺数 Re = 50000，与此相应的模型气流出口流速 v_m 为：

$$\frac{v_m \times 0.12}{0.0000157} = 50000$$

$$v_m = 6.5\text{m/s}$$

流速比例尺

$$\lambda_v = \frac{8}{6.5} = 1.23$$

（3）假定在模型空间内所测得的流速为 4m/s，则原型相应点的流速为，

$$v_n = v_m \times \lambda_v = 4 \times 1.23 = 4.92\text{m/s}$$

【例 10-2】 数据同上例。车间温度为 15℃，射流温度为 18℃，在上例的模型尺寸和风速的基础上，模型空间温度也取 15℃，确定模型射流的温度。

【解】 由于是非等温射流，要求原型和模型阿基米德数相等。

原型阿基米德数

$$\text{Ar}_n = \left(\frac{gD_0}{v_0^2} \cdot \frac{\Delta T_0}{T_u}\right)_n = \frac{9.8 \times 0.6}{8^2} \times \frac{18-15}{273+15} = 0.000956$$

应等于模型阿基米德数

$$\text{Ar}_m = \left(\frac{gD_0}{v_0^2} \cdot \frac{\Delta T_0}{T_u}\right)_m = \frac{9.8 \times 0.12}{6.5^2} \times \frac{\Delta T}{273+15} = 0.0000967\Delta T$$

两数相等得出 $\Delta T = 10℃$

即模型射流温度应为 15℃ + 10℃ = 25℃

第四节 因次分析法

一、因次分析的概念和原理

因次是指物理量的性质和类别。例如长度和质量，它们分别用[L]，[M]表达。而单位除表示物理量的性质外，还包含着物理量的大小，如同为长度因次的米，厘米等单位。因次又称为量纲。

因次分析法就是通过对现象中物理量的因次以及因次之间相互联系的各种性质的分析来研究现象相似性的方法。它是以方程式的因次和谐性为基础的。

所谓方程式的因次和谐性，是说完整的物理方程式中各项的因次应相同的性质。例如，开敞容器中静水压强分布公式 $p = \gamma h$，两边的因次均为 $[p] = [\gamma h] = ML^{-1}T^{-2}$。

在因次分析中常用到基本因次和导出因次的概念。某一类物理现象中，不存在任何联系的性质不同的因次称为基本因次；而那些可以由基本因次导出的因次称为导出因次。在流体力学中，对可压缩流体流动，常采用 $M - L - T - \Theta$ 基本因次系统。

质量 $[m] = M$　　长度 $[l] = L$

时间 $[t] = T$　　温度 $[T] = \Theta$

基本因次的选取并非唯一。表 10-1 列出了流体力学常用的各种物理量的因次。

常用物理量的因次　　表 10-1

序号	物理量名称	符号	性质	因次	关系式
1	长度	l	几何学	L	l
2	面积惯性矩	J	几何学	L^4	$J=Al^2=l^4$
3	时间	t	运动学	T	t
4	速度	v	运动学	LT^{-1}	$V=\Delta l/\Delta t$
5	速度势	φ	运动学	L^2T^{-1}	$\varphi=\int\Delta\varphi\cdot dl$
6	角速度	ω	运动学	T^{-1}	$\omega=\Delta a/\Delta t$
7	流函数	Ψ	运动学	L^2T^{-1}	$\psi=\int(-v dx+u dy)$
8	环量	Γ	运动学	L^2T^{-1}	$\Gamma=\oint v\cdot dl$
9	旋度	Ω	运动学	T^{-1}	$\Omega=\nabla\times v$
10	运动粘性系数	ν	运动学	L^2T^{-1}	$\nu=\mu/\rho$
11	质量	m	动力学	M	$m=F/a$
12	密度	ρ	动力学	ML^{-3}	$\rho=\Delta m/\Delta\tau$
13	力	F	动力学	MLT^{-2}	$F=ma$
14	应力	$p_{i,j}$	动力学	$ML^{-1}T^{-2}$	$p_{i,j}=F_{i,j}/A$
15	容重	γ	动力学	$ML^{-2}T^{-2}$	$\gamma=\rho g$
16	动力粘性系数	μ	动力学	$ML^{-1}T^{-1}$	$\mu=p_{i,j}/\partial u/\partial y$
17	能、功	W	动力学	ML^2T^{-2}	$W=Fl$
18	温度	T	热力学	Θ	T

二、因次分析法

我们先介绍两种因次分析法的内容，再总结它们在模型实验中的功用及特点。

1. π 定理(又称巴金汉法)：对某一流动问题，设影响该流动的物理量有 n 个：$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$；而在这些物理量中的基本因次为 m 个，于是就可以把这些量排列成 $n-m$ 个独立的无因次参数 $\pi_1,\pi_2,\cdots\cdots,\pi_{n-m}$。它们的函数关系分别为

$$f_1(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)=0 \tag{10-4-1}$$

和

$$f_2(\pi_1,\pi_2,\cdots\cdots,\pi_{n-m})=0 \tag{10-4-2}$$

然后，在变量 $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ 中选择 m 个因次独立的量作为重复变量，连同其它的 x_i 量中的一个变量组合成每个 π_i；

例如，设 $m=3,x_1,x_2,x_3$ 为重复变量，于是有

$$\begin{cases}\pi_1=x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_1}x_3^{\gamma_1}x_4\\ \pi_2=x_1^{\alpha_2}x_2^{\beta_2}x_3^{\gamma_2}x_5\\ \cdots\cdots\\ \pi_{n-m}=x_1^{\alpha_{n-m}}x_2^{\beta_{n-m}}x_3^{\gamma_{n-m}}x_n\end{cases} \tag{10-4-3}$$

将(10-4-1)式变换成(10-4-2)式的作用及 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ 的求法通过下例说明。定理的证明请参阅有关参考书。

【例 10-3】 有压管流中的压强损失。

根据实验，知道压强损失与管长 l，管径 d，管壁粗糙度 K，流体运动粘性系数 ν，密度 ρ 和平均流速 v 有关，即

$$\Delta p=f(l,d,K,\nu,\rho,v) \tag{10-4-4}$$

在这 7 个量中，基本因次数为 3，因而可选择三个重复变量，不妨取

管径 d　　　$[d]=L$

平均流速 v　　$[v]=LT^{-1}$

密度 ρ　　$[\rho]=ML^{-3}$

用未知指数写出无因次参数 $\pi_i[i:1\sim(n-m)=7-3=4]$:

$$\begin{cases}\pi_1=v^{\alpha_1}d^{\beta_1}\rho^{\gamma_1}\nu\\ \pi_2=v^{\alpha_2}d^{\beta_2}\rho^{\gamma_2}\Delta p\\ \pi_3=v^{\alpha_3}d^{\beta_3}\rho^{\gamma_3}l\\ \pi_4=v^{\alpha_4}d^{\beta_4}\rho^{\gamma_4}K\end{cases} \tag{10-4-5}$$

将各量的因次代入,写出因次公式:

$$\begin{cases}[\pi_1]=(LT^{-1})^{\alpha_1}(L)^{\beta_1}(ML^{-3})^{\gamma_1}(L^2T^{-1})=1\\ [\pi_2]=(LT^{-1})^{\alpha_2}(L)^{\beta_2}(ML^{-3})^{\gamma_2}(ML^{-1}T^{-2})=1\\ [\pi_3]=(LT^{-1})^{\alpha_3}(L)^{\beta_3}(ML^{-3})^{\gamma_3}(L)=1\\ [\pi_4]=(LT^{-1})^{\alpha_4}(L)^{\beta_4}(ML^{-3})^{\gamma_4}(L)=1\end{cases}$$

对每一个 π_i 写出因次和谐方程组:

$$\pi_1\begin{cases}L:\alpha_1+\beta_1-3\gamma_1+2=0\\ T:\quad -\alpha_1\qquad -1=0\\ M:\qquad\qquad \gamma_1=0\end{cases}\qquad \pi_2\begin{cases}L:\alpha_2+\beta_2-3\gamma_2-1=0\\ T:\quad -\alpha_2\qquad -2=0\\ M:\qquad\qquad \gamma_2+1=0\end{cases}$$

$$\pi_3\begin{cases}L:\alpha_3+\beta_3-3\gamma_3+1=0\\ T:-\alpha_3\qquad\qquad =0\\ M:\qquad\qquad \gamma_3=0\end{cases}\qquad \pi_4\begin{cases}L:\alpha_4+\beta_4-3\gamma_4+1=0\\ T:-\alpha_4\qquad\qquad =0\\ M:\qquad\qquad \gamma_4=0\end{cases}$$

分别解得

$\alpha_1=-1\quad \beta_1=-1\quad \gamma_1=0;\quad \alpha_2=-2\quad \beta_2=0\quad \gamma_2=-1;$

$\alpha_3=0\quad \beta_3=-1\quad \gamma_3=0;\quad \alpha_4=0\quad \beta_4=-1\quad \gamma_4=0$

代入(10-4-5)式,得

$$\begin{cases}\pi_1=v^{-1}d^{-1}\rho^0_\nu=\dfrac{\nu}{vd}=\dfrac{1}{\text{Re}}\\ \pi_2=v^{-2}d^0\rho^{-1}\Delta p=\Delta p/(\rho v^2)=\text{Eu}\\ \pi_3=l/d\qquad\qquad \pi_4=K/d\end{cases}$$

根据 π 定理中(10-4-2)式,有

$$\text{Eu}=\Delta p/(\rho v^2)=F(l/d,K/d,\text{Re})$$

式中函数的具体形式由实验确定。实验得知,压差 Δp 与管长 l 成正比,因此

$$\Delta p=\lambda(K/d,\text{Re})l/d\cdot\rho v^2/2$$

这样,我们运用 π 定理,结合实验,得到了大家熟知的管流沿程损失公式。

2. 瑞利法

定理。假定物理量 y 是物理量 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_m$ 的一个函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_m) \tag{10-4-6}$$

则 y 的因次等于 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_m$ 的因次的幂乘积,即

$$[y]=[x_1]^{c_1}[x_2]^{c_2}\cdots\cdots[x_m]^{c_m} \tag{10-4-7}$$

推论：

$$y=c_0x_1^{c_1}x_2^{c_2}\cdots\cdots x_m^{c_m} \tag{10-4-8}$$

式中 c_0——无因次比例常数。

我们仍以例 10-3 为例说明瑞利法的应用。

根据瑞利法，单位管长上的压强降

$$\Delta p/l=c_0K^{c_1}d^{c_2}v^{c_3}\nu^{c_4}\rho^{c_5} \tag{10-4-9}$$

而方程式的因次和谐性表明

$$(ML^{-1}T^{-2})\cdot L^{-1}=L^{c_1}L^{c_2}(LT^{-1})^{c_3}(L^2T^{-1})^{c_4}(ML^{-3})^{c_5}$$

于是，有

$$\begin{cases}L: c_1+c_2+c_3+2c_4-3c_5=-2\\ T: \quad -c_3-c_4=-2\\ M: \quad c_5=1\end{cases}$$

在这 3 个方程中，包含 5 个未知数。因此其中 2 个可选作待定指数。例如选 c_1, c_4 作为待定指数，则解得

$$\begin{cases}c_2=-c_1-c_4-1\\ c_3=-c_4+2\\ c_5=1\end{cases}$$

代入(10-4-9)式，得

$$\begin{aligned}\Delta p/l&=c_0K^{c_1}d^{-c_1-c_4-1}v^{-c_4+2}\nu^{c_4}\rho\\&=c_0(\nu/dv)^{c_4}(K/d)^{c_1}v^2\rho\frac{1}{d}\end{aligned}$$

$$h_L=\Delta p/\gamma=\lambda(\mathrm{Re},K/d)\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

相似理论是在描述物理现象的用物理方程式表达的客观规律已知的情况下，探求两现象相似的条件；而因次分析法只要在决定某物理现象的诸因素已知的条件下，根据因次和谐性就能推导出描述该现象的物理方程。这种方程就是由准则数构成的隐式准则方程。

由因次分析法确定的物理方程的具体形式需要通过实验加以确定。譬如例 10-3 中的 $\lambda(\mathrm{Re},K/d)$，就需通过类似尼古拉兹实验这样的研究加以确定。

因次分析法不仅可导出相似准数和结合实验得到准则方程，它同样地可用于实验方案的确定，模型的设计和实验数据的整理等。

但是，在无法获得某现象的物理规律时，要确定影响该现象的所有因素，往往存在很大的困难。这又是因次分析法的局限性。研究人员在应用因次分析法时，如何正确选定所有有影响的因素是一个至关重要的问题。如果选进了不必要的因素，将人为地使研究复杂化；如果漏选了不能忽略的影响因素，无论因次分析法运用得多么正确，所得的物理规律都是错误的。所以，因次分析法的有效使用尚依赖于研究人员对所研究现象的透彻和全面的了解。

使用瑞利法，当影响流动的参数个数较多时，有较多的待定指数，要确定它们，将给实验带来较大的麻烦。

相似理论和因次分析法在实验流体力学中得到广泛的应用，内容是十分丰富的。本章仅就其基本内容作了简单介绍。要真正掌握它们，最好的方法是亲自参加实验的全过程，包

括从制定实验方案,模型设计直到实验数据的整理和应用,在实践中不断学习、体会和提高。

习　题

10-1　弦长为3m的飞机机翼以300km/h的速度,在温度为20℃,压强为1at(n)的静止空气中飞行,用比例为20的模型在风洞中作试验,要求实现动力相似。(*a*)如果风洞中空气的温度、压强和飞行中的相同,风洞中空气的速度应当怎样?(*b*)如果在可变密度的风洞中作实验,温度仍为20℃,而压强为30at(n),则速度应是怎样?(*c*)如果模型在水中实验,水温为20℃,则速度应是怎样?

10-2　长1.5m,宽0.3m的平板,在温度为20℃的水内拖曳。当速度为3m/s时,阻力为14N。计算相似板的尺寸,它在速度为18m/s,绝对压强为101.4kN/m^2,温度为15℃的空气气流中形成动力相似条件,它的阻力估计为若干?

10-3　当水温为20℃,平均速度为4.5m/s时,直径为0.3m水平管线某段的压强降为68.95kN/m^2。如果用比例为6的模型管线,以空气为工作流体,当平均流速为30m/s时,要求在相应段产生55.2kN/m^{2}的压强降。计算力学相似所要求的空气压强,设空气温度为20℃。

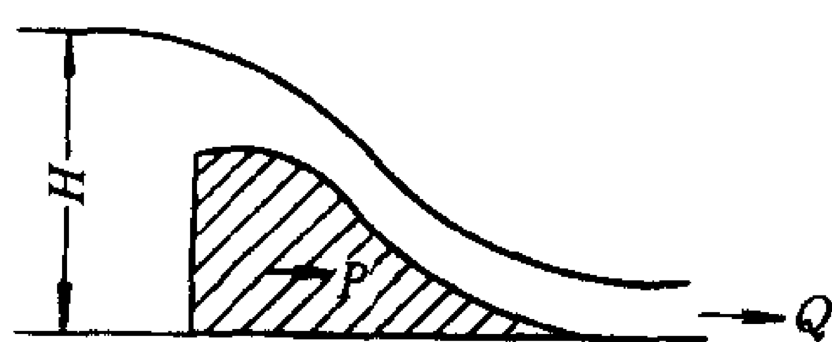
10-4　拖曳比例为50的船模型以4.8km/h航行所需的力为9N。如果原型航行主要受(*a*)密度和重力;(*b*)密度和表面张力;(*c*)密度和粘性力的作用,试计算原型相应的速度和所需的力。

10-5　小型水面船只和溢水建筑的原型和模型所受重力、粘性力和表面张力可能有同样的重要性。为了实现动力相似,粘性力、表面张力和模型尺寸之间,应当存在什么关系?

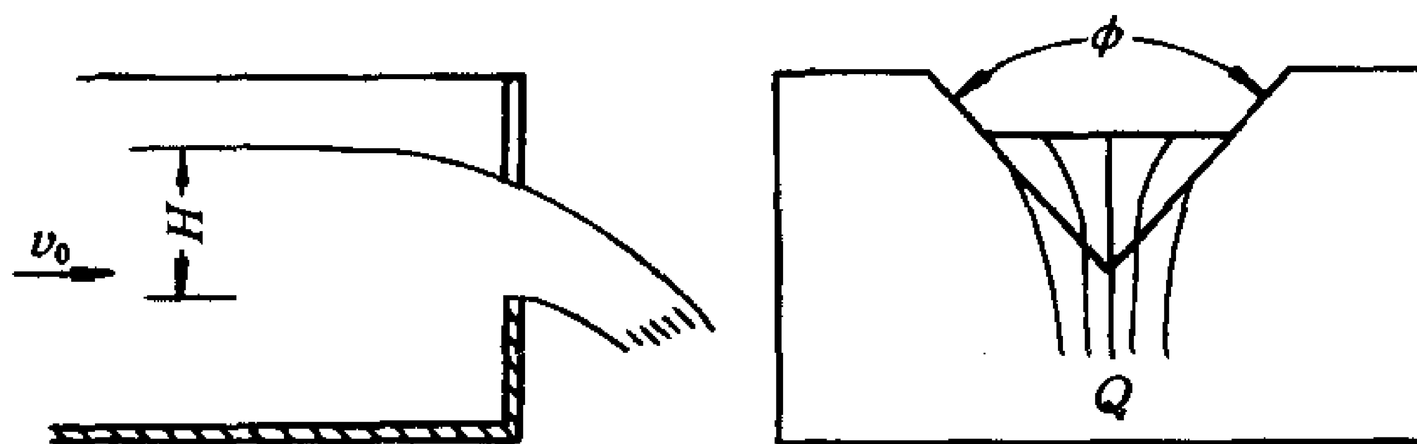
10-6　为了决定吸风口附近的流速分布,取比例为10作模型设计。模型吸风口的流速为13m/s,距风口轴线0.2m处测得流速为0.5m/s。若实际风口速度为18m/s,怎样换算为原型流动的流速?

10-7　在风速为8m/s的条件下,在模型上测得建筑物模型背风面压强为-24N/m^2,迎风面压强为$+40$N/m^2。试估计在实际风速为10m/s的条件下,原型建筑物背风面和迎风面的压强为多少?

10-8　溢水堰模型设计比例为20。当在模型上测得模型流量为$Q_m=300$L/s时,水流推力为$p_m=300$N,求实际流量Q_n和推力p_n?

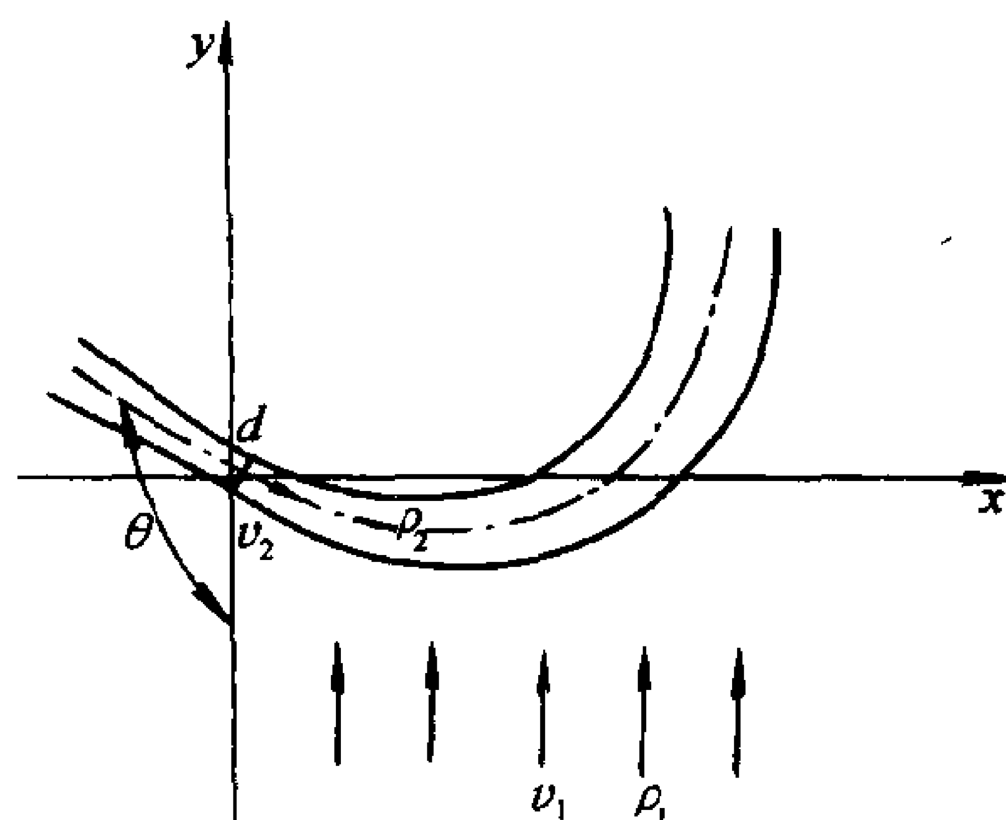


题10-8　图



题10-10　图

10-9　两个共轴圆筒,外筒固定,内筒旋转。两筒筒壁间隙充满不可压缩的粘性流体。写出维持内筒以不变角速度旋转所需转矩的无因次方程式。假定这种转矩只与筒的长度和直径,流体的密度和粘滞性,以及内筒的旋转角速度有关。



题10-12　图

10-10　角度为ϕ的三角堰的溢流流量Q是堰上水头H,堰前流速v_0和重力加速度g的函数。分别以(*a*)H、g;(*b*)H、v_0为基本物理量,写出Q的无因次表达式。

10-11　流动的压强降Δp是速度v,密度ρ,线性尺度l,l_1,l_2,重力加速度g,粘滞系数μ,表面张力σ,体积弹性模量E的函数。即

$$\Delta p=F(v、\rho、l、l_1\ l_2、g、\mu、\sigma、E)$$

取v、ρ、l作为基本物理量,利用因次分析法,将上述函数写为无因次式。

10-12　射流从喷嘴中射入另一均匀流动，按图取 x、y 坐标。已知射流轴线轨迹可以用下列形式的函数表征：

$$y=f(x、d、\theta、\alpha、\rho_1、\rho_2、v_1、v_2)$$

式中，d 为喷嘴出口直径；v_1、v_2 为气流出口流速和外部均匀流速；ρ_1、ρ_2 为气流密度和外部流动介质密度；θ 为射流角度；a 为紊流系数(无因次量)。试用因次分析：(1) 以 d、ρ_1、v_1 为基本物理量，将上述函数写为无因次式。(2) 从几何相似和惯性力相似出发，将上述函数写为无因次式。

下篇　泵　与　风　机

泵与风机是利用外加能量输送流体的流体机械。它们大量地应用于燃气及供热与通风专业。

根据泵与风机的工作原理，通常可以将它们分类如下。

（一）容积式

容积式泵与风机在运转时，机械内部的工作容积不断发生变化，从而吸入或排出流体。按其结构不同，又可再分为：

1．往复式　这种机械借活塞在汽缸内的往复作用使缸内容积反复变化，以吸入和排出流体，如蒸汽活塞泵等；

2．回转式　机壳内的转子或转动部件旋转时，转子与机壳之间的工作容积发生变化，借以吸入和排出流体，如齿轮泵、罗茨鼓风机、滑板泵等。

（二）叶片式

叶片式泵与风机的主要结构是可旋转的、带叶片的叶轮和固定的机壳。通过叶轮的旋转对流体作功，从而使流体获得能量。

根据流体的流动情况，可将它们再分为下列数种：

1．离心式泵与风机；

2．轴流式泵与风机；

3．混流式泵与风机；

4．贯流式风机。

（三）其它类型的泵与风机

如引射器、旋涡泵、真空泵等。

本篇介绍和研讨本专业常用的泵与风机的理论、性能、运行、调节和选用方法等知识。由于本专业常用泵是以不可压缩的流体为工作对象的，而风机的增压程度不高（通常只有9807Pa 或 $1000mmH_2O$ 以下），所以本篇内容都按不可压缩流体进行论述。

第十一章　叶片式泵与风机的理论基础

第一节　工作原理及性能参数

离心式泵和风机的主要结构部件是叶轮和机壳。机壳内的叶轮固装于由原动机拖动的

转轴上。当原动机带动叶轮旋转时，机内流体便获得能量。

以图 11-1 所示的离心式风机为例。叶轮是由叶片 3 和连接叶片的前盘 2 及后盘 4 所组成，叶轮后盘装在转轴上(图中未绘出)。机壳 5 一般是用钢制成的阿基米德螺线状箱体，支承于支架 8 上。

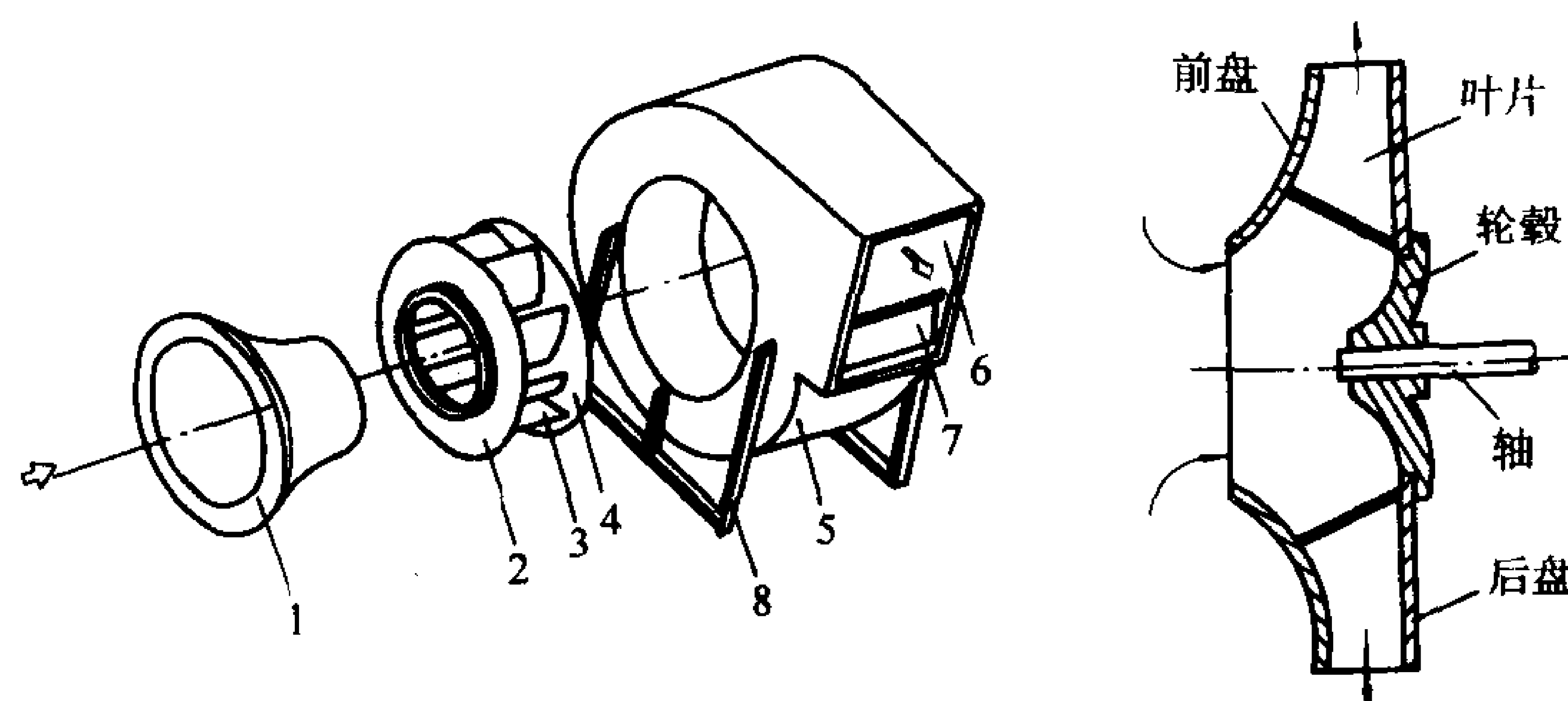


图 11-1 离心式风机主要结构分解示意图

1—吸入口；2—叶轮前盘；3—叶片；4—后盘；5—机壳；6—出口；7—截流板，即风舌；8—支架

当叶轮随轴旋转时，叶片间的气体也随叶轮旋转而获得离心力，并使气体从叶片之间的出口处甩出。被甩出的气体挤入机壳，于是机壳内的气体压强增高，最后被导向出口排出。气体被甩出后，叶轮中心部分的压强降低。外界气体就能从风机的吸入口通过叶轮前盘中央的孔口吸入，源源不断地输送气体。

离心式泵的工作原理与上述离心式风机相同。它们在结构上的特点将在第十三章中介绍。

一、泵的扬程 H 与风机的全压 p 和静压 p_j

泵的扬程 H 的定义是：泵所输送的单位重量流量的流体从进口至出口的能量增值。也就是单位重量流量的流体通过泵所获得的有效能量。单位是 m。

显然，单位重量流量的流体所获得的能量增量可用能量方程来计算。如分别取泵或风机的入口与出口为计算断面，列出它们的表达式可得：

$$H_1 = Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$H_2 = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

式中 p ——压强，Pa；

γ ——水的容重，N/m^3；

v ——水流速度，m/s。

下角“1”和“2”分别表示设备的入口与出口断面的参数。两式相减，就可以求出叶轮工作时单位重量流量的流体所获得的能量增量：

$$H = Z_2 - Z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad (m) \qquad (11\text{-}1\text{-}1)$$

风机的压头(全压) p 系指单位体积气体通过风机所获得的能量增量。单位为 Pa，由于 $1Pa = \frac{1N}{m^2}$，故风机的 p 表示压强又称全压。

风机的静压 p_j 定义为风机全压，减去风机出口动压，即假设 $Z_2=Z_1$ 时有：

$$P_j=(p_2-p_1)-\frac{\rho v_1^2}{2}$$

式中　ρ——气体密度，kg/m^3。

从上式看出：风机静压，不是风机出口的静压 p_2，也不是风机出口与进口静压差 p_2-p_1。

二、流量 Q

单位时间内泵或风机所输送的流体量称为流量。常用体积流量表示，单位为"m^3/s"或"m^3/h"。严格讲，风机的容积流量，特指风机进口处的容积流量。

三、功率及效率

如前所述，泵的扬程 H 是指单位重量流体通过泵所获得的有效能量。所以在单位时间内通过泵的流体所获得的总能量叫有效功率，以符号 N_e 表示

$$N_e=\gamma QH/1000 \quad (\text{kW}) \tag{11-1-2}$$

而风机的全压 p 是指单位体积气体通过风机所获得的有效能量。所以其 N_e 等于：

$$N_e=Qp/1000 \quad (\text{kW}) \tag{11-1-3}$$

式中　γ——被输送液体的容重，N/m^3，流量 Q 用 m^3/s 计，扬程 H 以 m，压头 p 以 N/m^2 为单位。

为表示输入的轴功率 N 被流体的利用程度，用泵或风机的全效率（简称效率）η 来计量。即：

$$\eta=N_e/N \tag{11-1-4}$$

将式(11-1-4)加以变换，并用式(11-1-2)代入可以得到轴功率的计算式：

$$N=\frac{N_e}{\eta}=\frac{\gamma QH}{1000\eta}=\frac{Qp}{1000\eta} \quad (\text{kW}) \tag{11-1-5}$$

同理，其静压效率 $\eta_j=\eta\dfrac{p_j}{p}$。通常泵或风机的效率，是由实验确定的。

四、转速 n

它指泵或风机叶轮每分钟的转数即"r/min"。

第二节　离心式泵与风机的基本方程——欧拉方程

本节将从分析流体在叶轮中运动入手，得出外加轴功率与流体所获得的能量之间关系的理论依据。

一、流体在叶轮中的运动

叶轮流道的几何形状，常用图 11-2a 的轴面投影图和平面投影图（图 11-2b）表示。

其中，D_0 为叶轮进口直径，D_1、D_2 为叶片的进出口直径，b_1、b_2 为叶片的进出口宽度，β_1、β_2 为叶片进、出口的安装角度。它指叶片进、出口处的切线与圆周速度反方向线之间的夹角，用来表明叶片的弯曲方向。

鉴于流体在叶轮流道中的运动十分复杂，为便于应用一元流动理论来分析其流动规律，欧拉在其透平理论中提出了如下的"理想叶轮"：

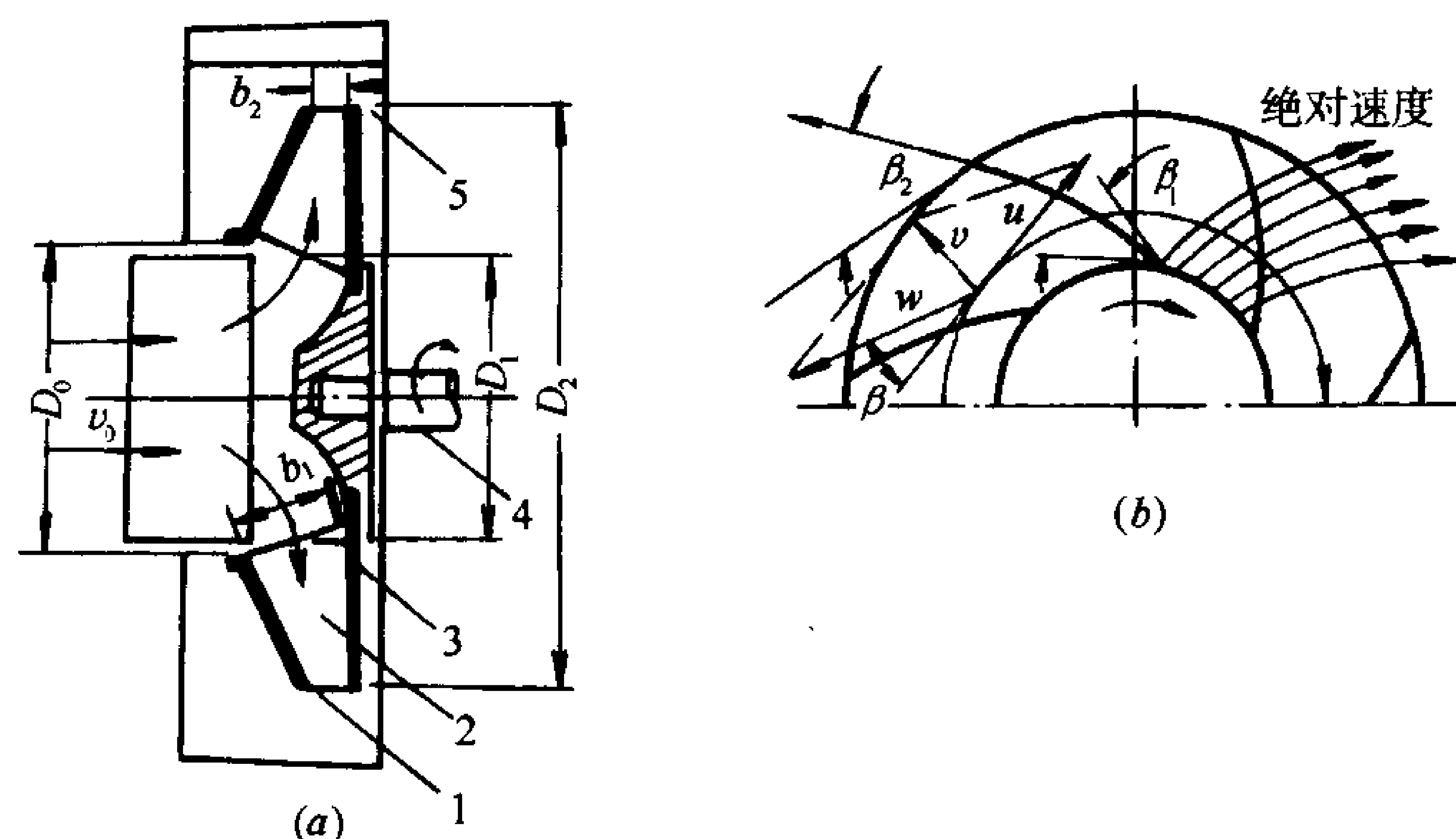


图 11-2　流体在叶轮流道中的流动

(a)风机的叶轮;(b)流体在叶轮中的速度

1—叶轮前盘;2—叶片;3—后盘;4—轴;5—机壳

1．假设流体通过叶轮的流动是恒定的,且可看成是无数层垂直于转动轴线的流面之总和,在层与层的流面之间其流动互不干扰。

2．假设叶轮具有无限多的叶片,叶片厚度无限薄。因此流体在叶片间流道作相对流动时,其流线与叶片形状一致,且当流体进、出叶片流道时,与叶片进、出口的几何安装角 β_1、β_2 一致,即流体"进入和流出时无冲击"。

3．假设流经叶轮的流体是理想不可压缩流体,即在流动过程中,不计能量损失。

下面将结合图 11-3 来分析叶片进、出口处的流体运动情况。

当叶轮旋转时,在叶片进口"1"处,流体一方面随叶轮旋转作圆周牵连运动,其圆周速度为 u_1;另一方面又沿叶片方向作相对流动,其相对速度为 w_1。因此,流体在进口处的绝对速度 v_1 应为 u_1 与 w_1 两者之矢量和。同理,在叶片出口"2"处,流体的圆周速度 u_2 与相对速度 w_2 之矢量和为绝对速度 v_2。

为了便于分析,常常将绝对速度 v 分解为与流量有关的径向分速 v_r 和与压头有关的切向分速 v_n。前者的方向与叶轮的半径方向相同,后者与叶轮的圆周运动方向相同。

将上述流体质点诸速度共同绘在一张速度图上(图 11-4),就是流体质点的速度三角形图。

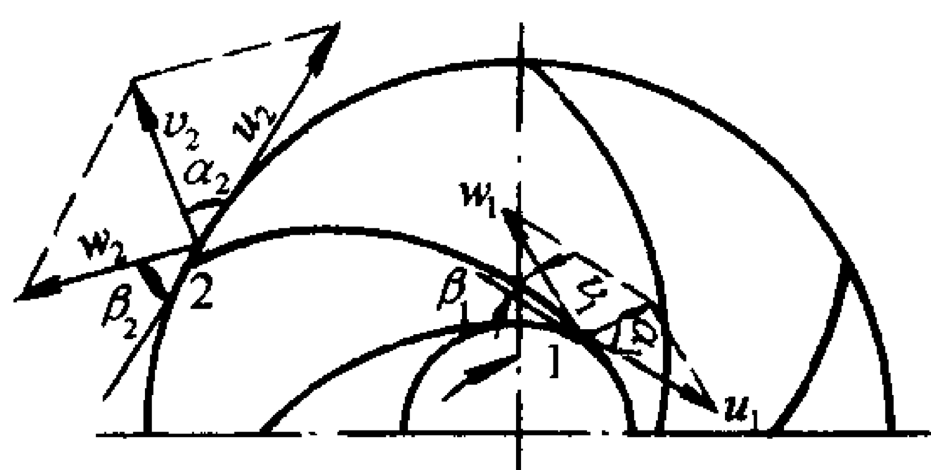


图 11-3　叶片进口和出口处的流体速度图

1—进口;2—出口;u—圆周速度;w—相对速度;v—绝对速度

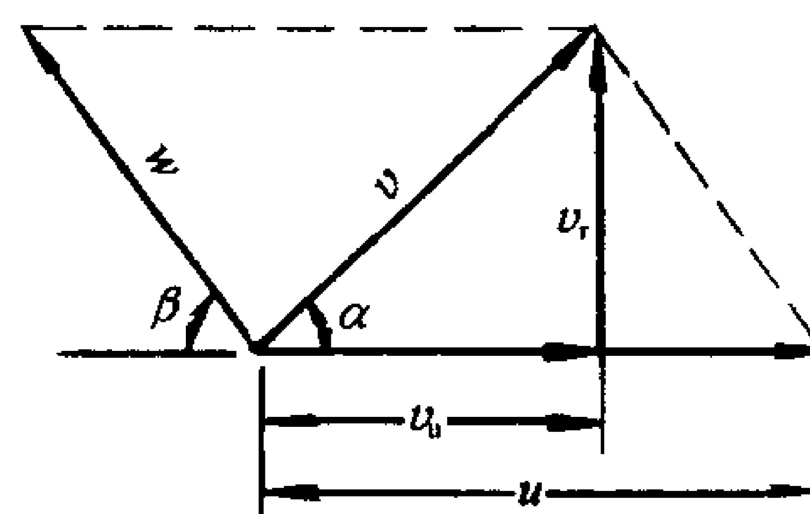


图 11-4　流体在叶轮中运动的速度三角形

速度 v 和 u 之间的夹角 α 叫做叶片的工作角。α_1 是叶片进口工作角,α_2 是叶片出口工作角。显然,工作角与计算径向分速及切向分速有关。

速度三角形除清楚地表达了流体在叶轮流道中的流动情况外,它又是研究泵或风机的

一个重要手段。

值得说明，当叶轮流道几何形状(安装角 β 已定)及尺寸确定后，如已知叶轮转速 n 和流量 Q_T，即可求得叶轮内任何半径 r 上的某点的速度三角形。

这里，流体的圆周速度 u 为：

$$u=\omega\cdot r=\frac{\pi dn}{60}$$

由于叶轮流量 Q_T 等于径向分速度 v_r，乘以垂直于 v_r 的过流断面积 F，即 $Q_T=v_r\cdot F$，由此可求出，径向分速度 v_r。其中 F 是一个环周面积，可近似认为它是以半径 r 处的叶轮宽度 b 作母线，绕轴心线旋转一周所形成的曲面，故有：

$$F=2\pi rb\varepsilon$$

式中，ε 为叶片排挤系数，它反映了叶片厚度对流道过流面积的遮挡程度。

既然 u 和 v_r 已求得，又已知 β 角，则此速度三角形就不难绘出了，请读者自行试作之。

二、欧拉方程

根据上述欧拉对“理想叶轮”之假设，当流体进入此种叶轮之后，叶轮从外界向流体所供给的能量，就应不折不扣地全部被流体获得。

用“动量矩”定理可以简便地导出这种能量关系。力学中的动量矩定理告诉我们：质点系对某一转轴的动量矩对时间的变化率，等于作用于该质点系的外力对该轴的力矩 M。这里，如将流体的有关参数都注以“$T\infty$”角标，例如 $Q_{T\infty}$、$H_{T\infty}$ 等，其中“T”表示理想流体，“∞”表示叶轮叶片为无限多。于是，以 $Q_{T\infty}$ 表示流经叶轮的体积流量，则在叶片进口“1”处的每秒动量矩就是 $\rho Q_{T\infty}v_{u1T\infty}r_1$；而出口“2”处的每秒动量矩，在连续流动的条件下，就应为 $\rho Q_{T\infty}v_{u2T\infty}r_2$。故对于流量为 $Q_{T\infty}$ 的流体，其动量矩的变化率应为：

$$\rho Q_{T\infty}(r_2\cdot v_{u2T\infty}-r_1v_{u1T\infty})$$

它就应等于作用于流体的外力矩 M(同时，它又恰好等于外力施加于叶轮转轴上的力矩)。故有：

$$M=\rho Q_{T\infty}(r_2v_{u2T\infty}-r_1v_{u1T\infty})$$

由于外力矩 M 乘以叶轮角速度 ω 就正是加在转轴上的外加功率 $N=M\cdot\omega$；而在单位时间内叶轮对流体所作的功 N，在理想条件下，又全部转化为流体的能量，即 $N=\gamma Q_{T\infty}H_{T\infty}$，再将 $u=r\omega$ 的关系代入上式，便得：

$$N=M\omega=\gamma Q_{T\infty}H_{T\infty}=\rho Q_{T\infty}(u_{2T\infty}v_{u2T\infty}-u_{1T\infty}v_{u1T\infty})$$

经移项，就可以得到理想化条件下单位重量流体的能量增量与流体在叶轮中运动的关系，即欧拉方程：

$$H_{T\infty}=\frac{1}{g}(u_{2T\infty}\cdot v_{u2T\infty}-u_{1T\infty}\cdot v_{u1T\infty})\qquad(11\text{-}2\text{-}1)$$

直观(11-2-1)式可以看出欧拉方程有如下特点：

1. 用动量矩定理推导基本能量方程时，并未分析流体在叶轮流道中途的运动过程，于是，流体所获得的理论扬程 $H_{T\infty}$，仅与流体在叶片进、出口处的运动速度有关，而与流动过程无关；

2. 流体所获得的理论扬程 $H_{T\infty}$，与被输送流体的种类无关。也就是说无论被输送的流体是水或是空气，乃至其它密度不同的流体；只要叶片进、出口处的速度三角形相同，都可

以得到相同的液柱或气柱高度(扬程)。

三、叶片片数有限对欧拉方程之修正

欧拉方程是在叶片无限多和不计流动损失等条件下得出的,此时,流道中任何点的相对流速 w 均沿着叶片的切线方向。然而,实际上叶片数目只有几片或几十片,叶片对流束的约束就相对减小了,使理论扬程有所降低。

在有限数目叶片的流道中,除有前述的流量为 Q_T 的均匀相对流动之外,还有一个因流体惯性而产生的轴向相对涡流运动。它可用图 11-5 及图 11-6 来说明。

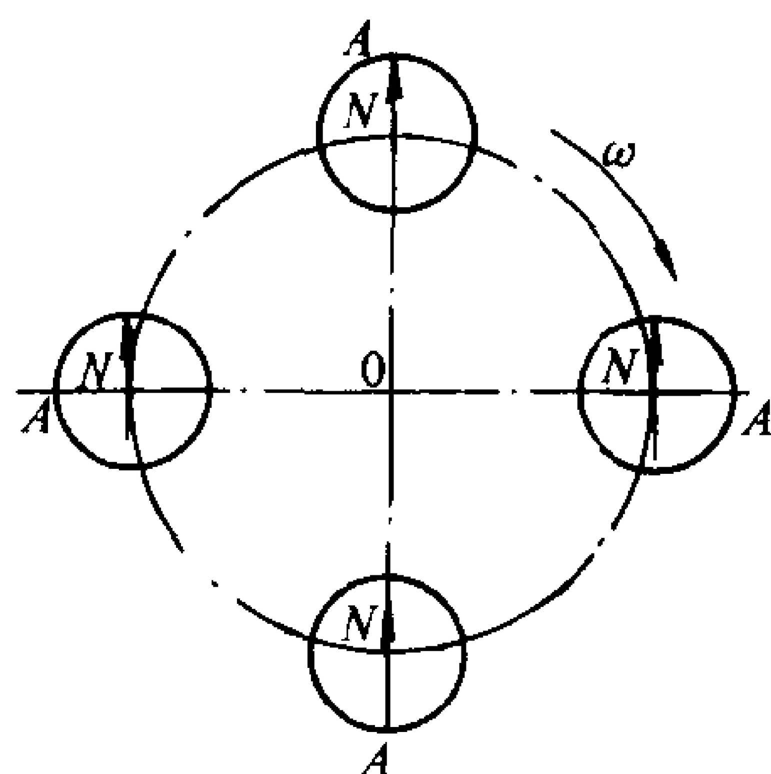


图 11-5 圆形容器内的相对流动

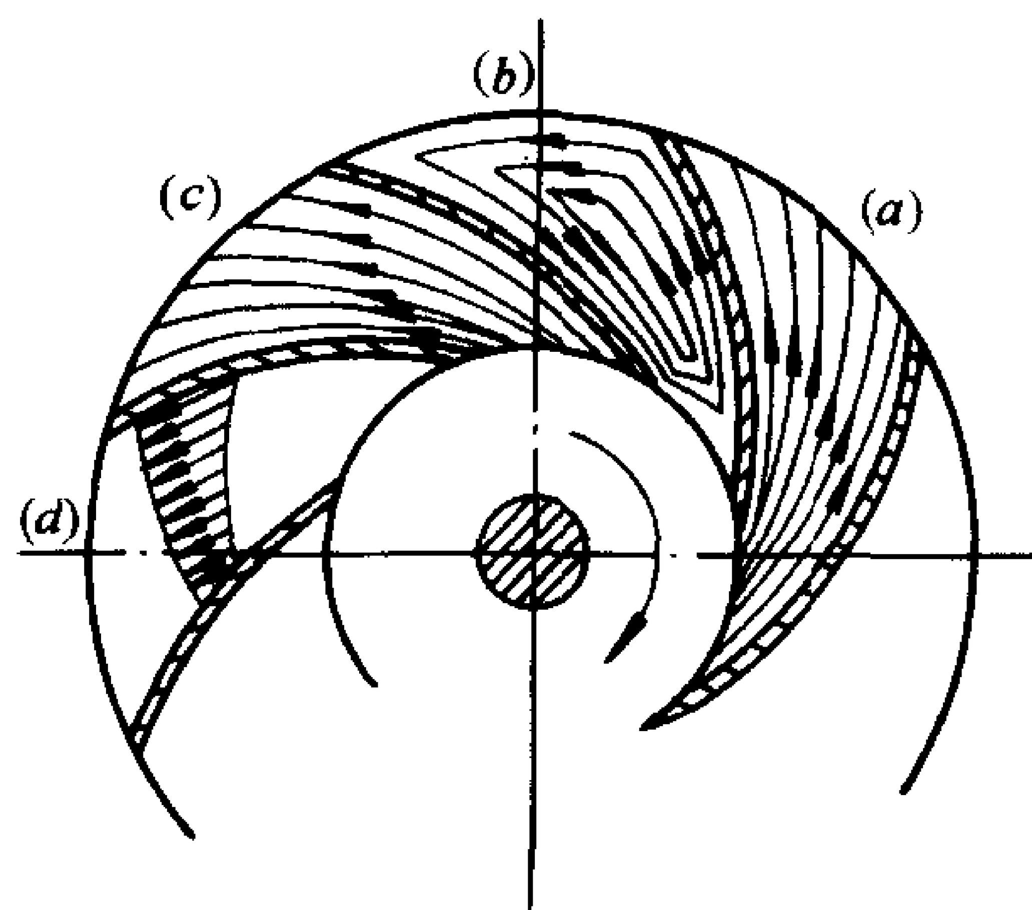


图 11-6 流道内的相对旋涡运动

今有一个充满理想流体的圆形容器,以角速度 ω 绕中心 0 旋转,A 点为容器的尖顶点,同时浮在流体上的指针,指向固定坐标系统的 N 点。当容器绕 0 旋转时,流体因其本身的惯性而要保持原来的状态,即箭头指向 N 点,这就相当于流体逆容器转向有一个角速度为 ω 的实际叶轮,其中就会形成如图 11-6 和 11-7 所示的相对涡流。

此涡流运动与原来的均匀相对流合成之后,在顺叶轮转动方向的流道前部,相对涡流助长了原有的相对流速;而在后部,则抑制原有的相对流速。结果,相对流速在同一半径的圆周上分布不均匀,如图 11-7a 所示,它一方面使叶片两面形成压力差,作为作用于轮轴上的阻力矩,需原动机克服此力矩而耗能;另一方面,在叶轮出口处,相对速度将朝旋转的反方向偏离于切线,如图 11-7a 中由 $w_{2T\infty}$变为 w_{2T}。这种影响还能在图 11-7b 所示的速度三角形中看到,原来的切向分速度 $v_{u2T\infty}$将减小为 v_{u2T}。

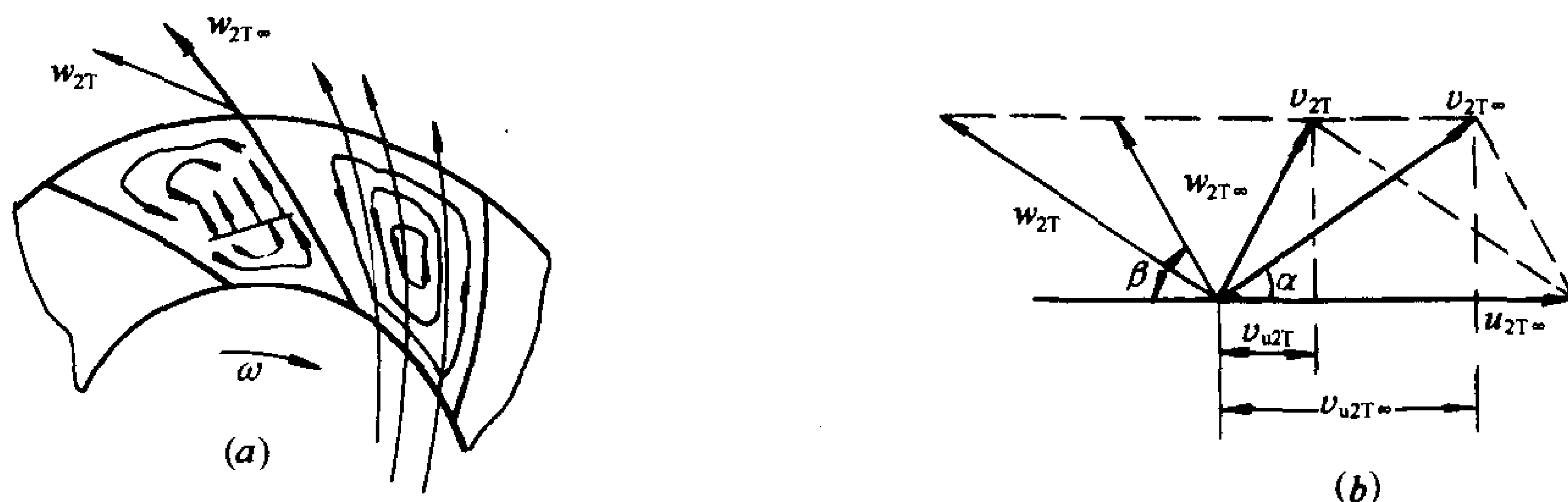


图 11-7 流体在叶轮中的相对涡流与出口速度的偏移
(a)相对涡流;(b)出口速度的偏移

根据同样分析,叶片进口处相对速度将朝叶轮转动方向偏移,从而使进口切向分速由原有的 $v_{u1T\infty}$增加到 v_{u1T}。

由于上述影响,按式(11-2-1)计算的叶片无限多的扬程 $H_{T\infty}$要降低到叶片有限多的

H_T 值。无限多叶片的欧拉方程式表达的 $H_{T\infty}$ 与有限多叶片实际叶轮的欧拉方程式得出的 H_T 之间的关系至今还只能以经验公式来表明，而这些经验公式的适用范围也极其有限。这里用小于 1 的涡流修正系数 K（英美等国则称滑差因子）来联系，即：

$$H_T = kH_{T\infty} = \frac{k}{g}(u_{2T\infty} v_{u2T\infty} - u_{1T\infty} v_{u1T\infty})$$

对离心机来说，k 一般在 0.78～0.85 之间，k 是离心式叶轮设计的重要系数。

或

$$H_T = \frac{1}{g}(u_{2T} v_{u2T} - u_{1T} v_{u1T})$$

为了简明起见，将流体运动诸量中用来表示理想条件的下角“T”取消，可得：

$$H_T = \frac{1}{g}(u_2 v_{u2} - u_1 v_{u1}) \tag{11-2-2}$$

此式表达了实际叶轮工作时，流体从外加能量所获得的理论扬程值。这个公式也叫做理论扬程方程式。

应当指出，这里 $H_T < H_{T\infty}$ 的后果，并非由于任何流动损失所引起，仅仅是由于叶片有限，不能很好地控制流动，产生了相对涡流所致。

四、理论扬程 H_T 之组成

我们用动量矩定理推导出了计算理论扬程 H_T 的公式(11-2-2)。为了说明 H_T 与哪些运动因素有关，以及总扬程中动压水头和静压水头所占的比例。现将图 11-3 中的两个速度三角形按三角形的余弦定理展开：

$$w_2^2 = u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2 \cos\alpha_2 = u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_{u2}$$
$$w_1^2 = u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos\alpha_1 = u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_{u1}$$

两式移项后代入式(11-2-2)，经整理可得出理论扬程方程式的另一种形式：

$$H_T = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \tag{11-2-3}$$

可见流体所获得的总扬程系由以下三部分组成：

1. 第三项是单位重量流体的动能增量，也叫动压水头增量，即：

$$H_{Td} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \tag{11-2-4}$$

通常在总扬程相同的条件下，该项动压水头的增量不宜过大。虽然，人们利用导流器及蜗壳的扩压作用，可使一部分动压头转化为静压水头，但其流动的水力损失也会增大。

为了理解其余两项的物理意义，将(11-2-3)式与(11-1-1)式比较，因叶轮进出口断面是同轴的圆筒面，其平均位能相等，所以公式(11-1-1)中 $z_2 - z_1 = 0$，故公式(11-2-3)的其余两项是总扬程中压力势能的增量，也叫静压水头增量，用 H_{Tj} 表示。

$$H_{Tj} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} \tag{11-2-5}$$

2. 上式的第一项$(u_2^2 - u_1^2)/2g$ 是单位重量流体在叶轮旋转时所产生的离心力所作的功L，使流体自进口（r_1 处）到出口（r_2 处）产生一个向外的压能（静压水头）增量 ΔH_{jR}。因流体的离心力 $= mr\omega^2$，而单位重量离心力为$\frac{1}{g}r\omega^2$，故有：

$$\Delta H_{jR} = L = \int_{r1}^{r2} \frac{1}{g}\omega^2 r \mathrm{d}r = \frac{1}{2g}(\omega^2 r_2^2 - \omega^2 r_1^2) = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$$

该式说明，因离心机中流体呈径向流动，且圆周速度 $u_2 > u_1$，故其离心力作用很强，但对轴流机来说，因流体沿轴向流动故此时 $u_2 = u_1$，所以不受离心力作用。

3. 公式(11-2-5)的第二项$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$是由于叶片间流道展宽，以致相对速度有所降低而获得的静压水头增量，它代表着流体经过叶轮时动能转化为压能的份量。由于此相对速度变化不大，故其增量较小。

第三节　叶型及其对性能的影响

当进口切向分速 $v_{u1} = v_1\cos\alpha_1 = 0$ 时，根据式(11-2-2)计算的理论扬程 H_T 将达到最大值。因此，在设计泵或风机时，总是使进口绝对速度 v_1 与圆周速度 u_1 间的工作角 $\alpha_1 = 90°$。这时流体按径向进入叶片间的流道，理论扬程方程式就简化为：

$$H_T = \frac{1}{g}u_2 v_{u2} \tag{11-3-1}$$

要使流体径向地进入叶片间的流道，可以适当设计叶片的进口方向来保证，因叶片的方向取决于安装角。当叶片进口安装角在设计流量下保证流体径向进入流道后，剩下的问题是以式(11-3-1)表达的理论扬程 H_T 与出口安装角 β_2 有什么样的关系？

将图 11-4 所示的速度三角形按叶片出口 2 处的参数进行讨论，可得：

$$v_{u2} = u_2 - v_{r2}\text{ctg}\beta_2$$

代入式(11-3-1)，就有：

$$H_T = \frac{1}{g}(u_2^2 - u_2 v_{r2}\text{ctg}\beta_2) \tag{11-3-2}$$

就叶轮直径固定不变的某一设备而论，在相同的转速下，从式(11-3-2)可以发现叶片出口安装角 β_2 的大小对理论扬程 H_T 是有直接影响的。

图 11-8 绘有三种不同出口安装角 β_2 的叶轮叶型示意图。

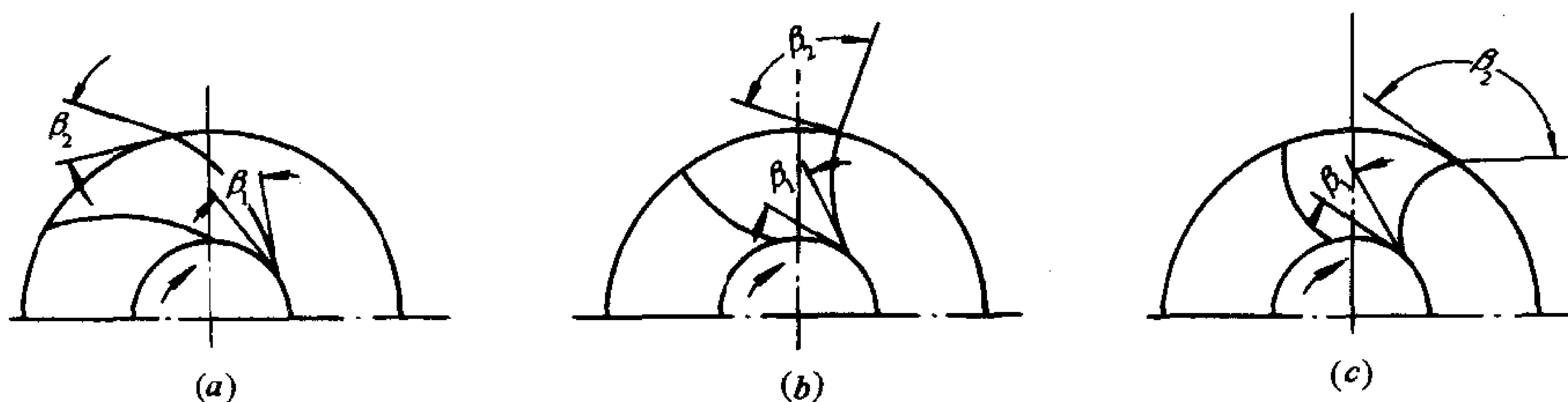


图 11-8　叶轮叶型与出口安装角

(a)后向叶型，$\beta_2 < 90°$；(b)径向叶型，$\beta_2 = 90°$；(c)前向叶型，$\beta_2 > 90°$

当 $\beta_2 = 90°$时，$\text{ctg}\beta_2 = 0$，这时 $H_T = \frac{u_2^2}{g}$，叶片出口按径向装设，这种叶型叫做径向叶型，如该图中之(b)；

当 $\beta_2 < 90°$时，$\text{ctg}\beta_2 > 0$，这时 $H_T < \frac{u_2^2}{g}$，叶片出口方向和叶轮旋转方向相反，这种叶型叫做后向叶型，如该图之(a)；

当 $\beta_2>90°$时，$ctg\beta_2<0$，这时 $H_T>\frac{u_2^2}{g}$，叶片出口方向和叶轮旋转方向相同，这种叶型叫做前向叶型，如该图之(c)。

根据以上分析，似乎可以得出如下结论：具有前向叶型的叶轮所获得的扬程最大，其次为径向叶型，而后向叶型的叶轮所获得的扬程最小，因此似乎具有前向叶型的泵或风机的效果最好。

但是，这种看法是不全面的，这是因为在全部理论扬程中，存在着动压和静压分配的问题(参看第二节之四)。为此，有必要结合叶型来进一步研究这个问题。

下面首先研究分析总能中的动压头情况。

通常在离心泵和风机的设计中，除使流体径向进入流道外，常令叶片进口截面积等于出口截面积。以 A 代表这些截面积时，根据连续性原理可得出：

$$v_1A=v_{r1}A=v_{r2}A$$

则

$$v_1=v_{r1}=v_{r2}$$

将此式代入式(11-2-4)，并按速度三角形(图 11-4)可得到动压头 H_{Td}与出口切向分速 v_{u2}之间的关系：

$$H_{Td}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}=\frac{v_2^2-v_{r2}^2}{2g}=\frac{v_{u2}^2}{2g} \tag{11-3-3}$$

由此可见，理论扬程 H_T 中的动压水头成分 H_{Td}是与出口速度的切向分速 v_{u2}的平方成正比的。试观图 11-9，在同一叶轮直径和叶轮转速固定的条件下，具有 $\beta_2<90°$的后向叶型叶轮($\triangle ABC$)的出口切向分速 v_{u2}较小，因而全部理论扬程中的动压水头成分较少；具有 $\beta_2>90°$的前向叶型叶轮($\triangle ABC'$)的出口切向分速 v'_{u2} 较大，所以动压水头成分较多而静压水头成分有所减少。

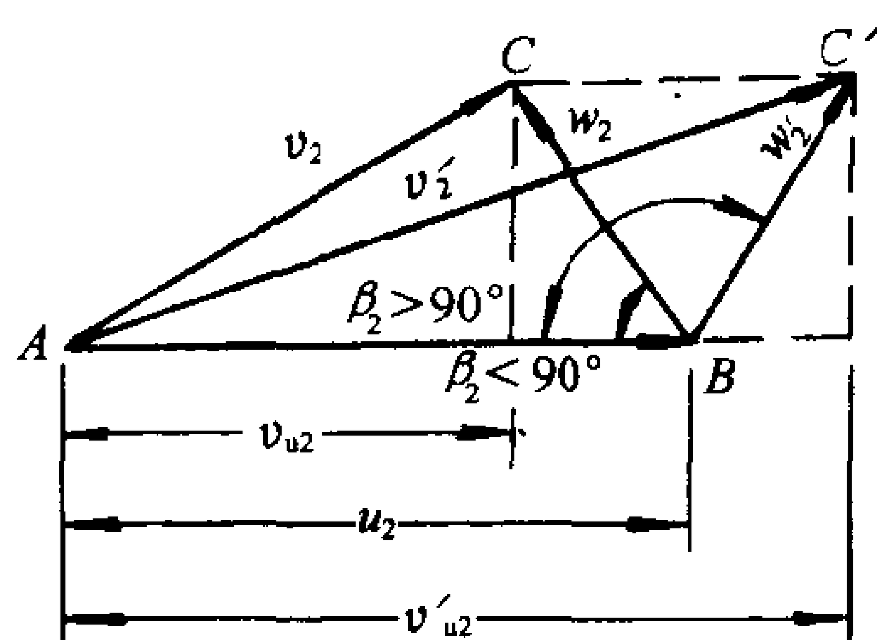


图 11-9　不同叶型的出口切向分速

如前所述，动压水头成分大，流体在蜗壳及扩压器中的流速大，从而动静压转换损失必然较大，实践证明，了解这种情况是很有意义的。因为在其它条件相同时，尽管前向叶型的泵和风机的总的扬程较大，但能量损失也大，效率较低。因此，离心式泵全都采用后向叶轮。在大型风机中，为了增加效率或降低噪声水平，也几乎都采用后向叶型。但就中小型风机而论，效率不是主要考虑因素，也有采用前向叶型的，这是因为叶轮是前向叶型的风机，在相同的压头下，轮径和外形可以做得较小。根据这个原理，在微型风机中，大都采用前向叶型的多叶叶轮。至于径向叶型叶轮的泵或风机的性能，显然介于两者之间。

第四节　理论的流量—压头曲线和流量—功率曲线

本节研究泵或风机所具备的技术性能的表达方式。

由于泵和风机的扬程、流量以及所需的功率等性能是互相影响的，所以通常用以下三种形式来表示这些性能之间的关系：

1. 泵或风机所提供的流量和扬程之间的关系，用 $H=f_1(Q)$来表示；

2．泵或风机所提供的流量和所需外加轴功率之间的关系，用 $N=f_2(Q)$来表示；

3．泵或风机所提供的流量与设备本身效率之间的关系，用 $\eta=f_3(Q)$来表示。

上述三种关系常以曲线形式绘在以流量 Q 为横坐标的图上。这些曲线叫做性能曲线。

前面在推导欧拉方程时，我们曾引入了无限多且无限薄叶片和不计流动损失的理想条件。对叶片数有限的叶轮，已采用涡流修正系数 k 加以修正。于是剩下的问题，就是如何从理论扬程 H_T 中扣除其流动损失了。由于目前对机器内部流动损失的计算，还停留在半理论半经验的估算阶段，尚难通过精确计算来决定泵或风机的实际扬程，故其实际性能曲线也只好凭借实验获取了。

从欧拉方程出发，我们可以研究无损失流动这一理想条件下 $H_T=f_1(Q_T)$及 $N_T=f_2(Q_T)$的关系。

如叶轮出口前盘与后盘之间的轮宽为 b_2，则叶轮在工作时所排出的理论流量应为：

$$Q_T=\varepsilon\pi D_2 b_2 v_{r2} \tag{11-4-1}$$

式中符号同前。将式(11-4-1)变换后代入(11-3-2)可得：

$$H_T=\frac{u_2^2}{g}-\frac{u_2}{g}\cdot\frac{Q_T}{\varepsilon\pi D_2 b_2}\mathrm{ctg}\beta_2$$

就大小一定的泵或风机来说，转速不变时，上式中 u_2、g、ε、D_2 及 b_2 均为定值，故上式可改写为：

$$H_T=A-B\mathrm{ctg}\beta_2\cdot Q_T \tag{11-4-2}$$

式中，$A=\frac{u_2^2}{g}$，$B=\frac{u_2}{g}\ \frac{1}{\varepsilon\pi D_2 b_2}$，均为常数，而 $\mathrm{ctg}\beta_2$ 代表叶型种类，也是常量。此式说明在固定转速下，不论叶型如何，泵或风机理论上的流量与扬程关系是线性的。同时还可以看出，当 $Q_T=0$ 时，$H_T=A=\frac{u_2^2}{g}$。图 11-10 绘出了三种不同叶型的泵和风机理论上的流量——扬程曲线。显然由 $B\mathrm{ctg}\beta_2$ 所代表的曲线斜率是不同的，因而三种叶型具有各自的曲线倾向。

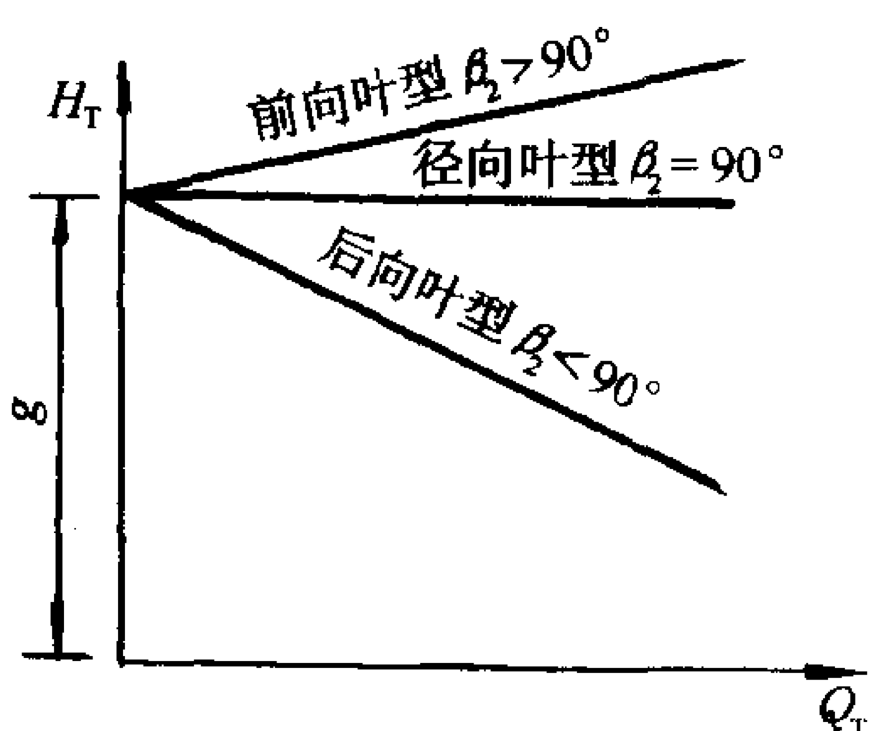


图 11-10　三种叶型的 $Q_T—H_T$ 曲线

下面研究理论上的流量与外加功率的关系。

在无损失流动条件下，理论上的有效功率就是轴功率，可按式(11-2-1)计算，即：

$$N_e=N_T=\gamma Q_T H_T$$

当输送某种流体时，γ = 常数。用式(11-4-2)代入此式可得：

$$N_T=\gamma Q_T(A-BQ_T\mathrm{ctg}\beta_2) \tag{11-4-3}$$

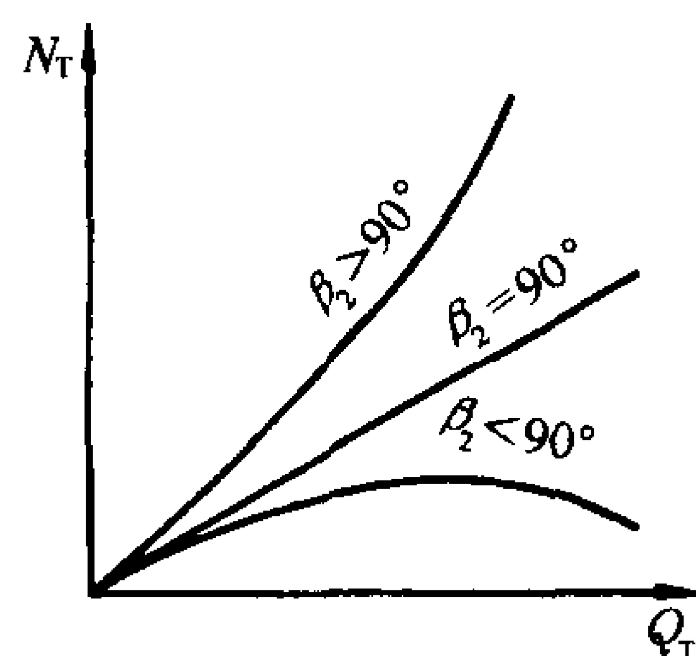


图 11-11　三种叶型的 $Q_T—N_T$ 曲线

可见对于不同的 β_2 值具有不同形状的曲线。但当 $Q_T=0$ 时，三种叶型的理论轴功率都等于零，三条曲线同交于原点(图 11-11)。

对于具有径向叶型的叶轮来说，$\beta_2=90°$，$\mathrm{ctg}\beta_2=0$，功率曲线为一条直线。

当叶轮为前向叶型时，$\beta_2>90°$，$\mathrm{ctg}\beta_2<0$，式中括号内第二项为正，功率曲线是一条向上凹的二次曲线。

后向叶型的叶轮中，$\beta_2<90°$，$\mathrm{ctg}\beta_2>0$，括号内第二项为负，功率曲线为一条向下凹的曲线。

根据以上分析，可以定性地（只能是定性地）说明不同叶型的曲线倾向。这对以后研究泵或风机的实际性能曲线是很有意义的。因为从图 11-11 中的 Q_T—N 曲线可以看出，前向叶型的风机所需的轴功率随流量的增加而增长得很快。因此，这种风机在运行中增加流量时，原动机超载的可能性要比径向叶型风机的大得多，而后向叶型的风机几乎不会发生原动机超载的现象。

应当指出，这一节内容都是在无能量损失条件下进行分析的，因此所得出的 Q_T—H_T 曲线和 Q_T—N_T 曲线都属于泵或风机的理论性能曲线。只有在计入各项损失的情况下，才能得出它们的实际性能曲线。

第五节　泵与风机的实际性能曲线

现在研究机内损失问题。进一步将上述泵或风机的理论性能曲线过渡到实际的性能曲线。最后将得出泵或风机的流量—效率曲线，即 Q—η 曲线来表明 $\eta=f_3(Q)$ 的关系。这是泵或风机的实际性能曲线之一。上述所有的实际性能曲线，今后通称为性能曲线。

应当着重指出，由于流动情况十分复杂，现在还不能用分析方法精确地计算这些损失。当运行工况偏离设计工况时，尤其如此。所以各制造工厂目前都只能采用实验方法直接得出性能曲线。但是从理论上研究这些损失并将这些损失加以分类整理，指出它们的基本概况，可以找出减少损失的途径。

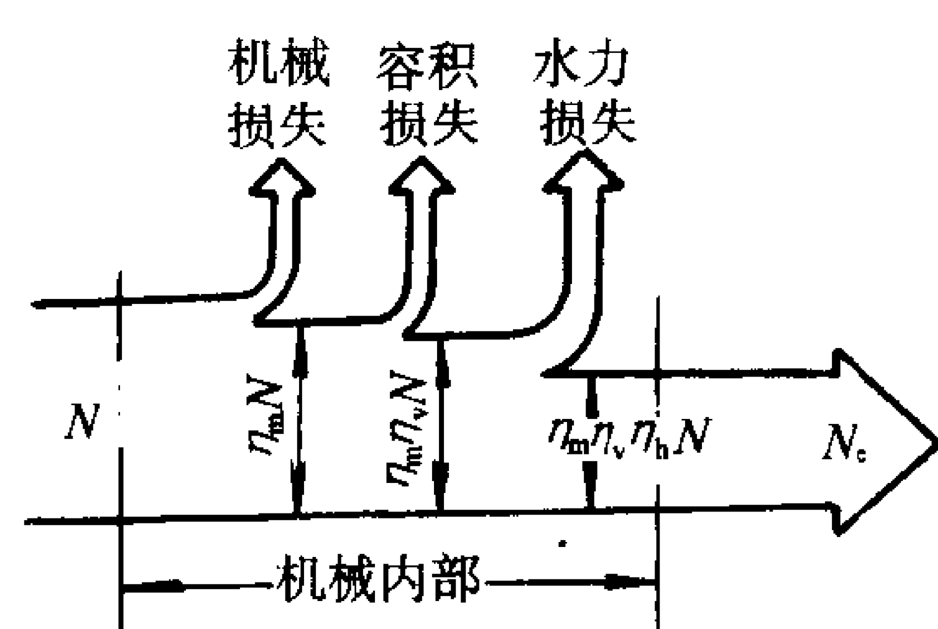


图 11-12　轴功率与机内损失的关系图

泵或风机损失可分为流动水力损失（降低实际压力），容积损失（减少流量），机械损失。

图 11-12 是外加于机轴上的轴功率扣除机内诸损失以后和实际得到的有效功率之间的关系图。

一、水力损失

流体流经泵或风机时，必然产生水力损失。这种损失同样也包括局部阻力损失和沿程阻力损失。水力损失的大小与过流部件的几何形状、壁面粗糙度以及流体的粘性密切相关。

机内阻力损失发生于以下几个部分。

第一、进口损失 ΔH_1。流体经泵或风机入口进入叶片进口之前，发生摩擦及 90°转弯所引起的水力损失。此项损失，因流速不高而不致太大；

第二、撞击损失 ΔH_2。当机器实际运行流量与设计额定流量不同时，相对速度的方向就不再同叶片进口安装角的切线相一致，从而发生撞击损失，其大小与运行流量和设计流量差值之平方成正比；

第三、叶轮中的水力损失 ΔH_3。它包括：叶轮中的摩擦损失和流道中流体速度大小、方向变化及离开叶片出口等局部阻力损失；

第四、动压转换和机壳出口损失 ΔH_4。流体离开叶轮进入机壳后，有动压转换为静压的转换损失。以及机壳出口损失。

于是，水力损失的总和 $\Sigma\Delta H=\Delta H_1+\Delta H_2+\Delta H_3+\Delta H_4$ 上述四部分水力损失都遵循流

体力学中流动阻力的规律。

撞击损失和其它水力损失与流量的关系以及总水力损失与流量的关系示于图 11-13,图中 Q_d 表示设计流量。

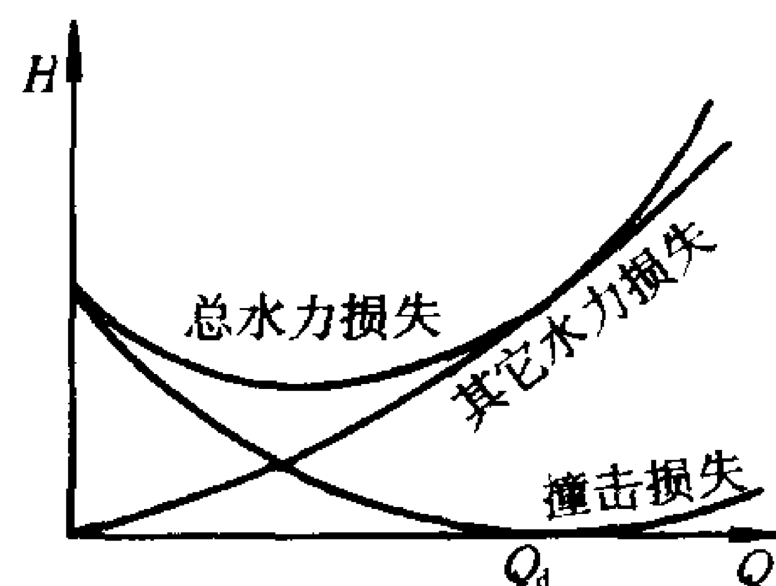


图 11-13 撞击损失、其它水力损失和总水力损失与流量的关系

水力损失常以水力效率 η_h 来估计。当用 $\Sigma\Delta h$ 表示各过流部件水力损失的总和,则 η_h 可以下式表示:

$$\eta_h = \frac{(H_T - \Sigma\Delta H)}{H_T} = \frac{H}{H_T} \tag{11-5-1}$$

式中 $H = H_T - \Sigma\Delta H$ 为泵或风机的实际扬程。

二、容积损失

叶轮工作时,机内存在压力较高和压力较低的两部分。同时,由于结构上有运动部件和固定部件之分,这两种部件之间必然存在着缝隙。这就使流体有从高压区通过缝隙泄漏到低压区的可能性(图 11-14)。这部分回流到低压区的流体流经叶轮时,显然也获得能量,但未能有效利用。回流量的多少取决于叶轮增压大小,取决于固定部件与运动部件间的密封性能和缝隙的几何形状。除此而外,对于离心泵来说,还有流过为平衡轴向推力而设置的平衡孔的泄漏回流量等。

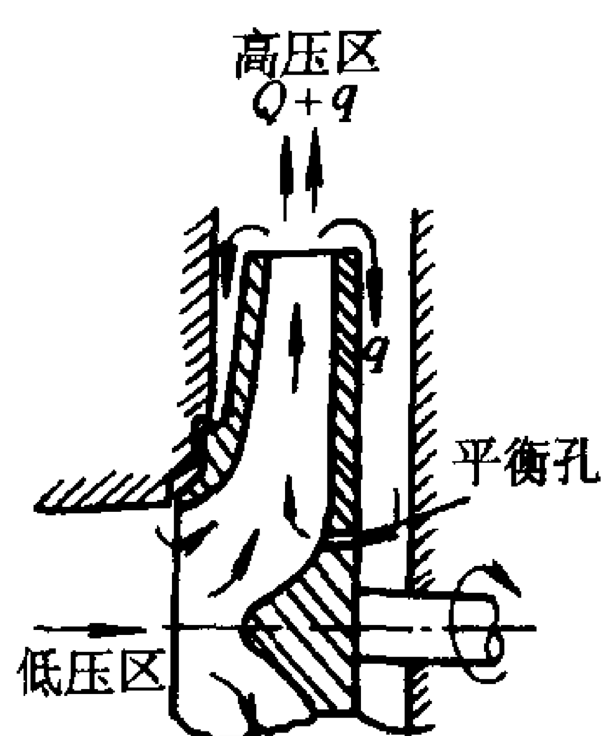


图 11-14 机内流体泄漏回流示意图

通常用容积效率 η_v 来表示容积损失的大小。如以 q 表示泄漏的总回流量,则:

$$\eta_v = \frac{Q_T - q}{Q_T} = \frac{Q}{Q_T} \tag{11-5-2}$$

式中,$Q = Q_T - q$ 为泵与风机的实际流量。由此可见要提高容积效率 η_v,就必须减少回流量。

减少回流量可以采取以下两方面的措施。一是尽可能增加密封装置的阻力,例如将密封环的间隙做得较小,且可做成曲折形状(参看第十三章第一节);二是密封环的直径尽可能缩小,从而降低其周长使流通面积减少。实践还证明大流量泵或风机的回流量相对地较少,因而 η_v 值较高。离心式风机通常没有消除轴向力的平衡孔,且高压区与低压区之间的压差也较小,因而它们的 η_v 值也较高。

三、机械损失

泵和风机的机械损失包括轴承和轴封的摩擦损失,还包括叶轮转动时其外表与机壳内流体之间发生的所谓圆盘摩擦损失。

泵的机械损失中圆盘摩擦损失常占主要部分。但泵的轴封如采用填料密封结构时,当压盖压装很紧,会使机械损失大增。这是填料发热的主要原因,在小型泵中甚至因而难以启动。

根据经验,正常情况下泵的轴承和轴封摩擦损失的功率 ΔN_1 可以达到以下程度:

$$\Delta N_1 = (0.01 \sim 0.03)N \tag{11-5-3}$$

泵的圆盘摩擦损失的功率 ΔN_2 为:

$$\Delta N_2 = kn^3 D_2^5 \tag{11-5-4}$$

式中,N 是泵的轴功率,k 为实验系数,其余符号同前。

当泵的扬程一定时,增加叶轮转速可以相应地减小轮径。根据式(11-5-4),这意味着增加转速后,圆盘损失仍可能有所降低。这是目前泵的转速逐渐提高的原因。

机械损失的总的功率 ΔN_m 为：

$$\Delta N_m = \Delta N_1 + \Delta N_2$$

据此，泵或风机的机械损失可以用机械效率 η_m 由下式表示：

$$\eta_m = \frac{N - \Delta N_m}{N} \tag{11-5-5}$$

四、泵与风机的全效率

现在研究泵或风机的全效率 η 及其与式(11-5-1)、(11-5-2)及(11-5-5)所表达的各分效率之间的关系。

当只考虑机械效率时，供给泵或风机的轴功率应为：

$$N = \frac{\gamma Q_T H_T}{\eta_m}$$

而泵或风机实际所得的有效功率是由式(11-1-2)表示的，即：

$$N_e = \gamma Q H$$

因此，按照效率的定义结合式(11-5-1)与(11-5-2)，泵和风机的全效率可以由下式导出：

$$\eta = \frac{N_e}{N} = \frac{\gamma Q H}{\gamma Q_T H_T} \cdot \eta_m = \eta_v \eta_h \eta_m \tag{11-5-6}$$

由此可见泵和风机的全效率等于容积效率，水力效率及机械效率的乘积。

五、泵与风机的性能曲线

前面已经研究了离心式泵与风机的工作原理和流体在叶轮中的流动情况，导出了理论扬程方程式和 Q_T—H_T 及 Q_T—N_T 图像，并揭示了泵与风机内部的各种能量损失。现在可以进一步研究各工作参数之间的实际关系，并据此得出泵或风机的实际性能曲线。

在图 11-15 中采用流量 Q 与扬程 H 组成直角坐标系，纵坐标轴上还标注了功率 N 和效率 η 的尺度。

根据理论流量和扬程的关系式(11-4-2)可以绘出一条 Q_T—H_T 曲线。以后向叶型的叶轮为例，这是一条下倾的直线，如图中之Ⅱ。当 $Q_T = 0$ 时，$H_T = \frac{u_2^2}{g}$。

显然，如按无限多叶片的欧拉方程，可以绘制一条 $Q_{T\infty}$—$H_{T\infty}$ 的关系曲线，这是一条位于曲线Ⅱ上方的曲线Ⅰ。

当机内存在水力损失时，流体必将消耗部分能量用来克服流动阻力(见图 11-13)。这部分损失应从曲线Ⅱ中扣除，于是就得出如曲线Ⅲ的曲线。所扣除的包括以直影线部分代表的撞击损失和以倾斜影线部分代表的其它水力损失。

除水力损失之外，还应从曲线Ⅲ扣除泵与风机的容积损失。容积损失是以泄漏流量 q 的大小来估算的。可以证明当泵或风机的结构不变时，q 值与扬程的平方根成比例，因而能够作出一条 q—H 的关系曲线，示于图 11-15 的左侧。曲线Ⅳ就是从曲线Ⅲ扣除相应的 q 值后得出的泵或风机的实际性能曲线，即 Q—H 曲线。

流量—功率曲线表明泵或风机的流量与轴功率之间的关系。因为轴功率 N 是理论功率 $N_T = \gamma Q_T H_T$ 与机械损失功率 ΔN_m 之和，即：

$$N = N_T + \Delta N_m = \gamma Q_T H_T + \Delta N_m \tag{11-5-7}$$

根据这一关系式，可以在图 11-15 上绘制一条 Q—N 曲线。如图上之 V。

有了 $Q—N$ 和 $Q—H$ 两曲线，按式(11-1-4)计算在不同流量下的 η 值，从而得出 $Q—\eta$ 曲线，如图中的Ⅵ。$Q—\eta$ 曲线的最高点表明为最大效率，它的位置与设计流量是相对应的。

$Q—H$、$Q—N$ 和 $Q—\eta$ 三条曲线是泵或风机在一定转速下的基本性能曲线。其中最重要的是 $Q—H$ 曲线，因为它揭示了泵或风机的两个最重要、最有实用意义的性能参数之间的关系。

通常按照 $Q—H$ 曲线的大致倾向可将其分为下列三种：(1)平坦型，(2)陡降型，(3)驼峰型。如图 11-16。

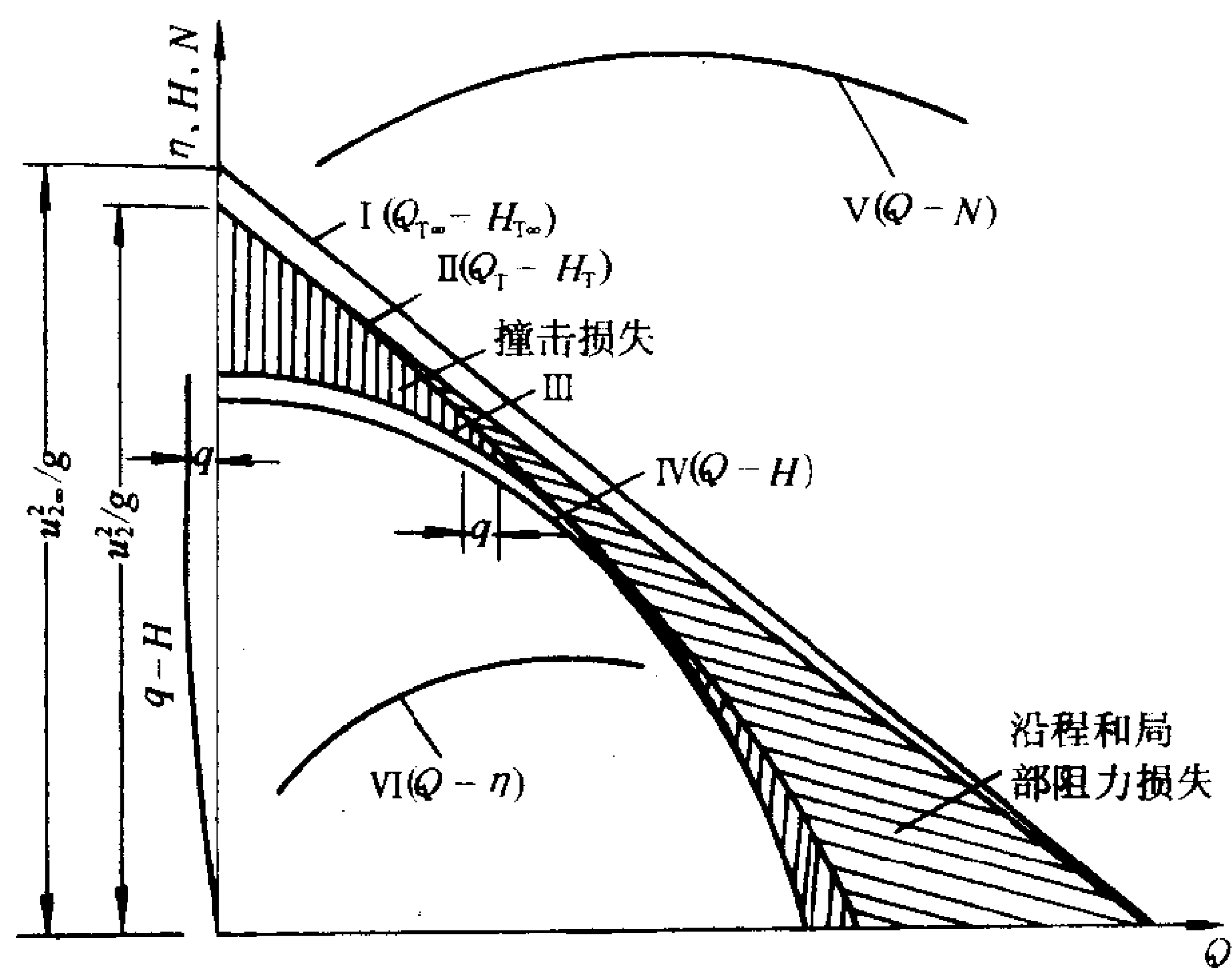


图 11-15　离心式泵或风机的性能曲线分析

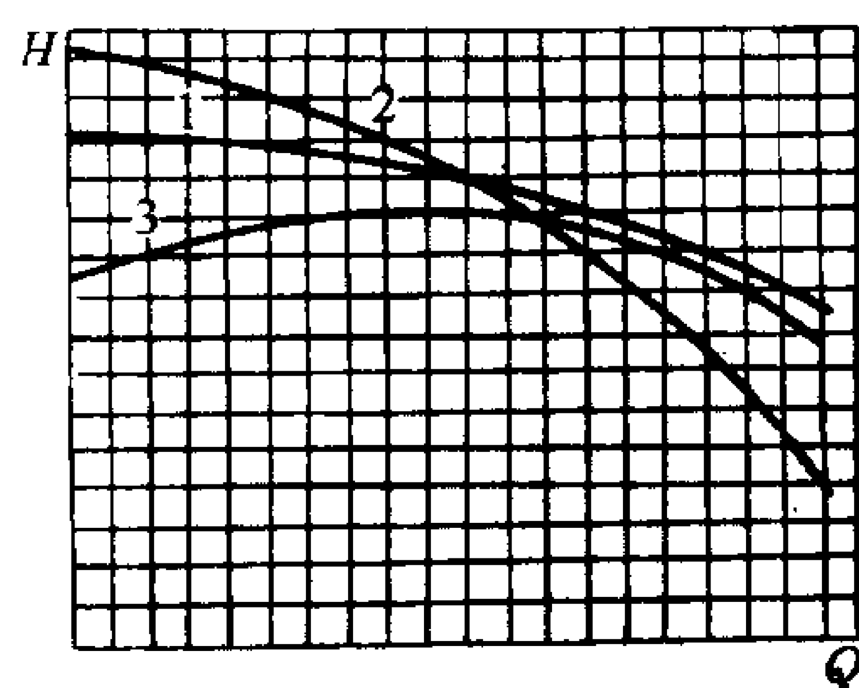


图 11-16　三种不同的 $Q—H$ 曲线

1—平坦型；2—陡降型；3—驼峰型

具有平坦型 $Q—H$ 曲线的泵或风机，当流量变动很大时能保持基本恒定的扬程。陡降型曲线的泵或风机则相反，即流量变化时，扬程的变化相对地较大。至于驼峰型曲线的泵或风机，当流量自零逐渐增加时，相应的扬程最初上升，达到最高值后开始下降。具有驼峰性能的泵或风机在一定的运行条件下可能出现不稳定工作。这种不稳定工作，是应当避免的。

如前所述，泵和风机的性能曲线实际上都是由制造厂根据实验得出的。这些性能曲线是选用泵或风机和分析其运行工况的根据。尽管在实用中还有其它类型的性能曲线，如选择性能曲线和通用性能曲线等，也都是以本节所述的性能曲线为基础演化出来的。

作为示例，图 11-17 绘出了型号为 1½BA-6 水泵的性能曲线。此图是在 $n=2900$ r/min

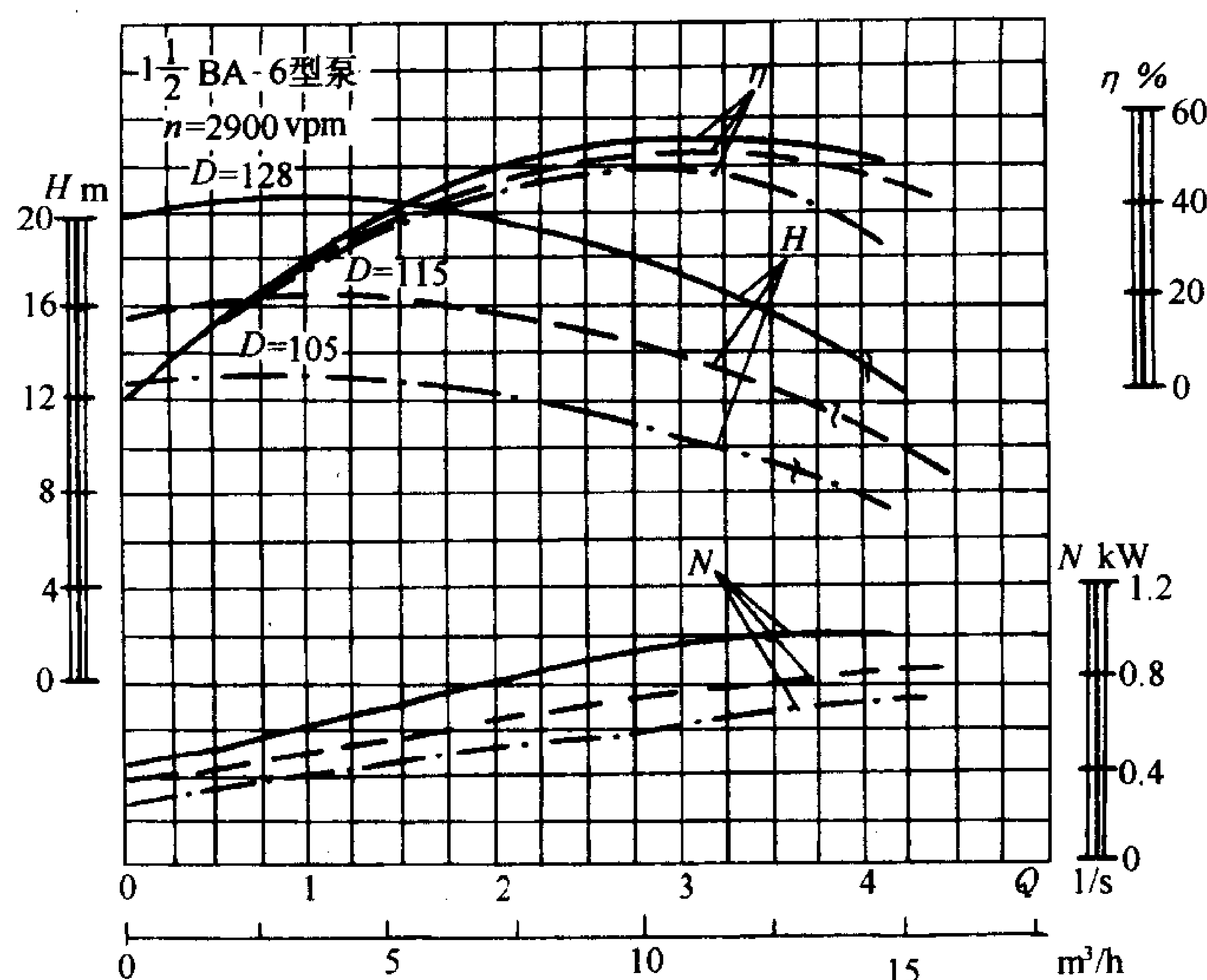


图 11-17　1½BA-6 型离心式水泵的性能曲线

的条件下得出的。该泵的标准叶轮直径为 128mm。制造厂还可以提供两种经过切削的较小直径的叶轮,直径分别为 115 及 105mm。经过切削的叶轮的泵的性能曲线也绘于同一图上关于叶轮切削的问题,请参看第十二章第三节。

第六节 轴流式泵与风机

当工程需要大流量和较低压头时,离心机将难当此任,而轴流式泵与风机则恰能满足此种要求。

图 11-18 是纺织厂空气调节用的 50A11-11 型轴流式风机。空气按轴向流过风机。叶轮装在圆形风筒 1 内,钟罩形入口 2 用来避免进气的突然收缩。这种风机的电动机 3 是装在适当形式的轮毂罩 4 内的,轮毂罩有改善气流进入叶片的作用。

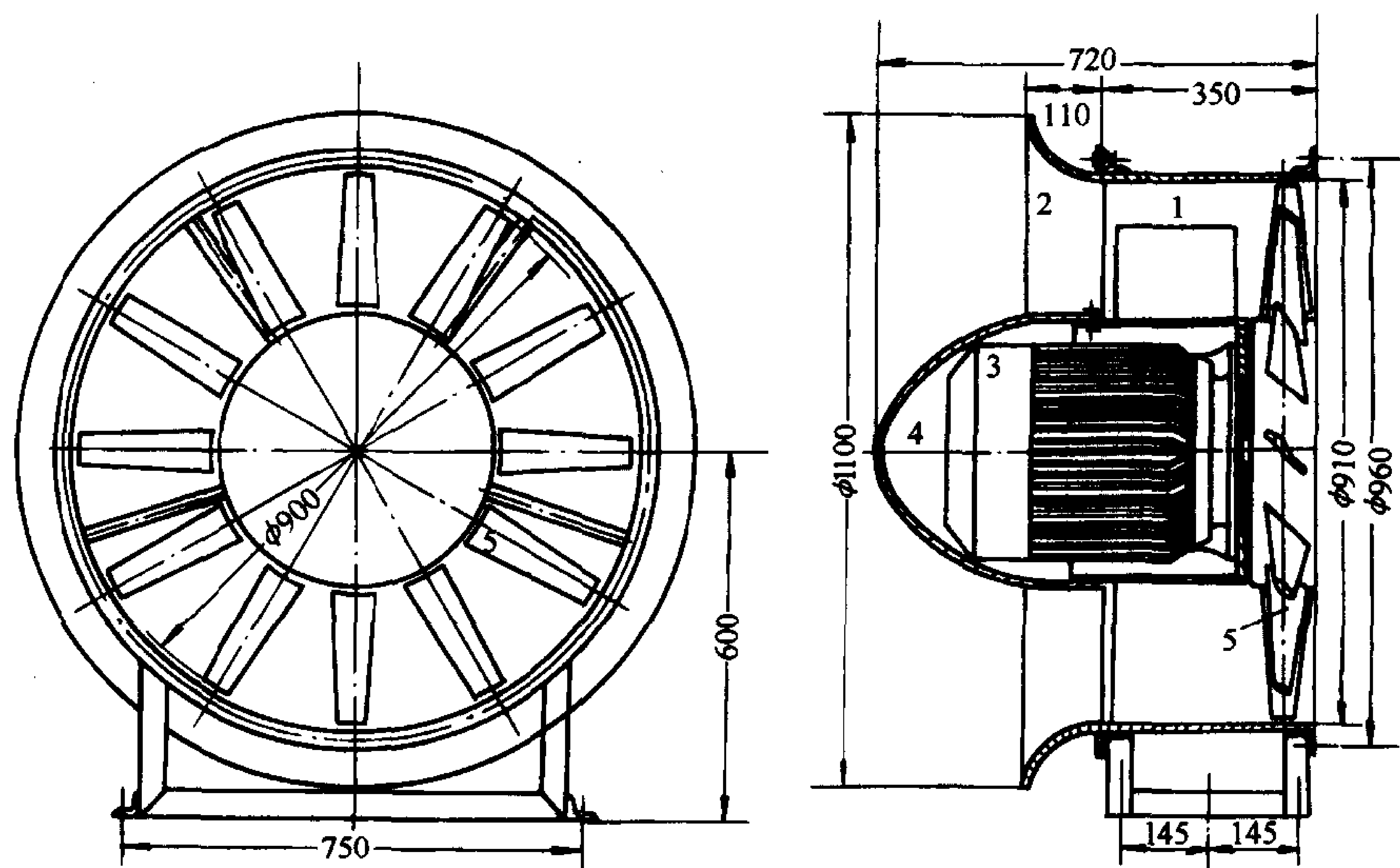


图 11-18 适用于纺织厂空调室用的 50A11-11 型轴流式风机
1—圆形风筒;2—钟罩形入口;3—电动机;4—轮毂罩;5—叶片

轴流式风机的类型很多。一些大型的轴流式风机在叶轮下游侧设有固定的导叶以消除气流在增压后的旋转。其后还可设置流线型尾罩,有助于气流的扩散。大型轴流风机常用电动机通过皮带或三角皮带来驱动叶轮。

轴流机原理:在本教材"绕流阻力和升力"一节中所述,绕流物体—这里指叶片,在垂直于流动方向存在着升力 L,平行于流动方向产生阻力 D。根据作用力和反作用力关系原理,叶片对流体的升力和阻力的合理利用,就是叶片形状设计的目的。

轴流式风机的叶片有板型、机翼型等多种。叶片从根部到叶梢常是扭曲的。有些叶片的安装角是可以调整的。调整安装角能改变风机的流量和压头。

研究轴流风机的理论时,常利用直列叶栅的概念。叶栅图是沿一定的半径 r 截取叶片的剖面,然后将所得的剖面展开得出的。如图 11-19 所示。在同一半径上截取的直列叶栅图中,进口与出口的气流圆周速度都是相同的。但是按不同半径截取的叶栅将具有不同的圆周速度。以后可以看出正是这些特点导致轴流式风机在性能上有别于离心式风机。

讨论气流通过轴流风机叶栅的运动和所获得的能量时,通常认为叶片之间有足够的间距;因而叶片间的气流不致相互影响;同时,叶片是装在圆筒内的,叶梢与筒壁之间的缝隙极小,所以没有气流的径向运动。按照这些假设,就可以将问题简化为孤立叶片两向流的问题来研究。

当气流以流速 v_0 流向叶片时,气流质点除获得圆周速度 u 外,还有沿叶片滑动的相对速度 w(见图 11-20)。用下角 1 和 2 分别表示气流进入叶片与离开叶片的参数,同样可以用速度三角形来描述气流的运动情况。离开叶片的气流由于叶片的旋转而偏离原来的 v_0 的方向,如图中的 v_2。

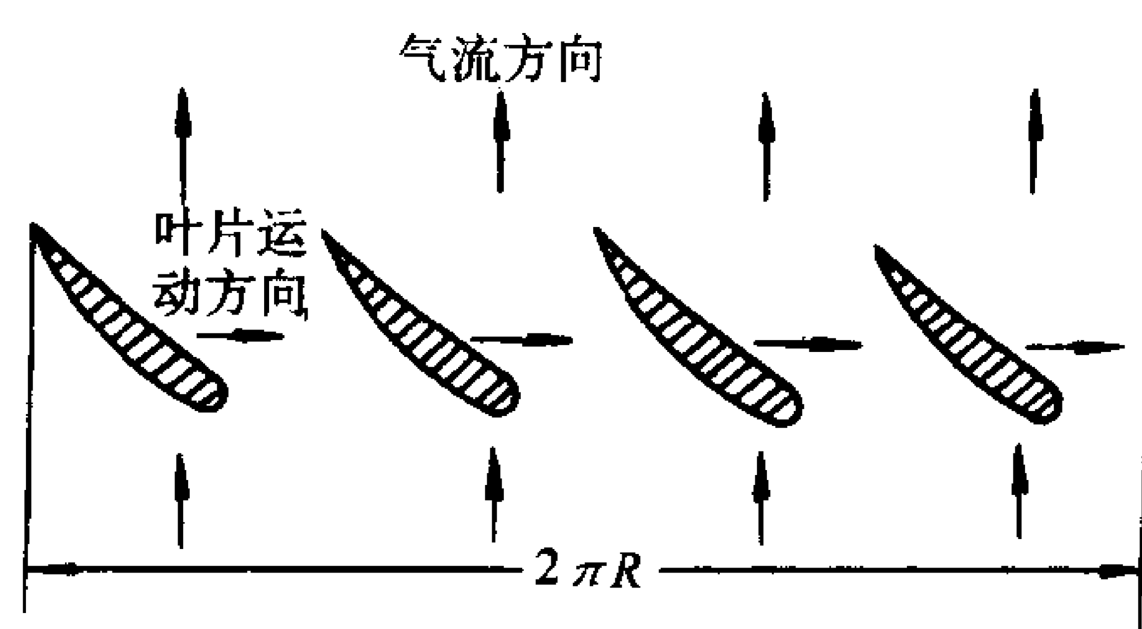


图 11-19　直列叶栅简图

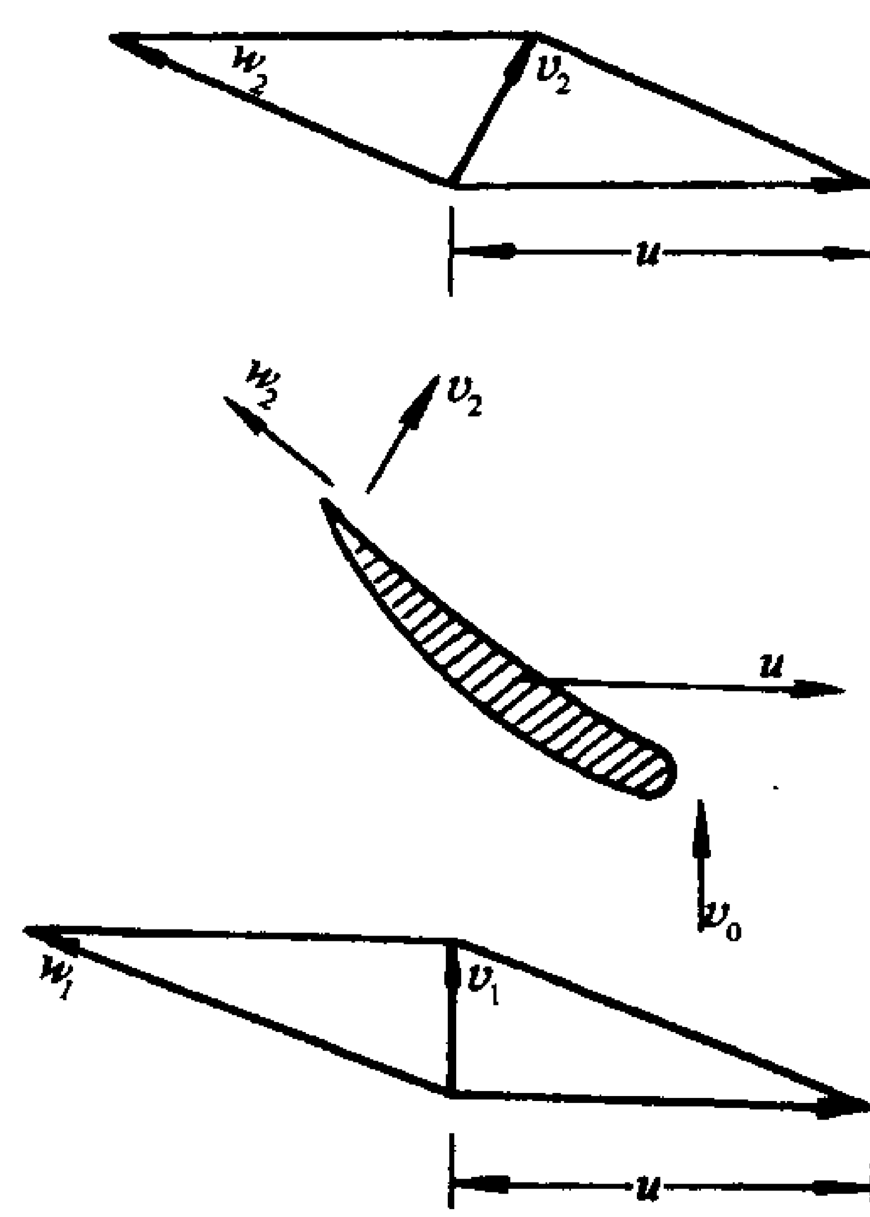


图 11-20　气流质点通过叶栅的运动情况

当叶轮下游侧设有整流叶片时,可以使气流重新恢复到 v_0 的方向。

轴流式风机与离心式风机具有同样的理论压头方程式:

$$H_T = \frac{1}{g}(u_2 v_{u2} - u_1 v_{u1})$$

但是由于叶栅是按同一半径取得的,所以具有同样的圆周速度,即 $u_2 = u_1 = u$,故理论压头方程式应为:

$$H_T = \frac{u}{g}(v_{u2} - v_{u1}) \tag{11-6-1}$$

在设计工况下,$v_{u1} = 0$,则:

$$H_T = \frac{u v_{u2}}{g} \tag{11-6-2}$$

下面研究轴流风机的性能特点。

前面提到,按不同半径截取的叶栅具有不同的圆周速度。结合式(11-6-2)可以看出,在叶梢处产生的压头将大于叶根处的压头。这一情况使叶轮下游侧横断面上的气流,由于不同半径处的压头各异而有可能发生径向流动,从而增加损失,效率下降。为了避免这种情况,常将叶片制成扭曲形状,使之在不同半径处具有不同的安装角。采用这种方法的目的是使叶片不同半径处具有不同的 v_{u2}值,从而使乘积 uv_{u2}接近于不变。于是整个叶轮下游的

流通截面上的压头也可以基本保持恒定,尽可能消除径向流动。

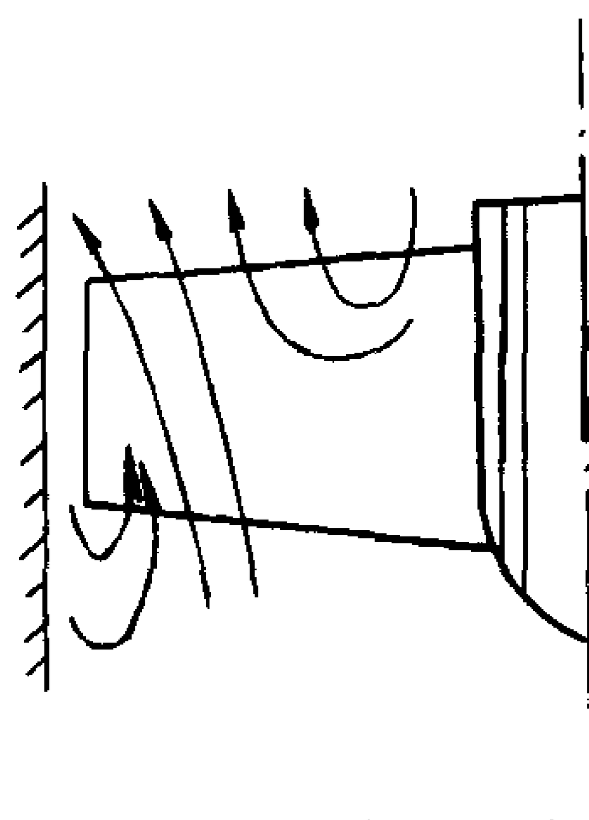


图 11-21 轴流泵或风机的二次流

尽管如此,只有在设计工况下才能基本消除径向流动现象。进一步分析表明,当流量小于设计值时,流体将发生径向流动,严重时部分流体将发生二次回流(图 11-21),由叶轮流出的流体,一部分又重新回到叶轮中被二次加压,使扬程压头增加。由于二次回流量是靠撞击来传递能量的,因此水力损失很大,致使效率急剧下降。

由于上述情况,轴流风机在性能曲线方面的特点可以归纳为如下三点:

(一) $Q—H$ 曲线大都属于陡降型曲线。

(二) $Q—N$ 曲线在流量为零时 N 最大,当流量增大时,H 下降很快,轴功率 $N=\frac{rQH}{\eta}$ 也有所降低,这样往往使轴流式风机在零流量下启动的轴功率为最大。因此,与离心式风机相反,轴流式风机应当在管路畅通下开动。尽管如此,当启动与停机时,总是会经过最低流量的,所以轴流风机所配用的电机要有足够的余量。

(三) $Q—\eta$ 曲线在最高效率点附近迅速下降,由于流量不在设计工况下气流情况迅速变坏,以致效率下降很快。所以轴流式风机的最佳工作范围较窄。一般都不设置调节阀门来调节流量。大型轴流风机常用可调节叶片安装角或改变转速方法来达到调节流量的目的。

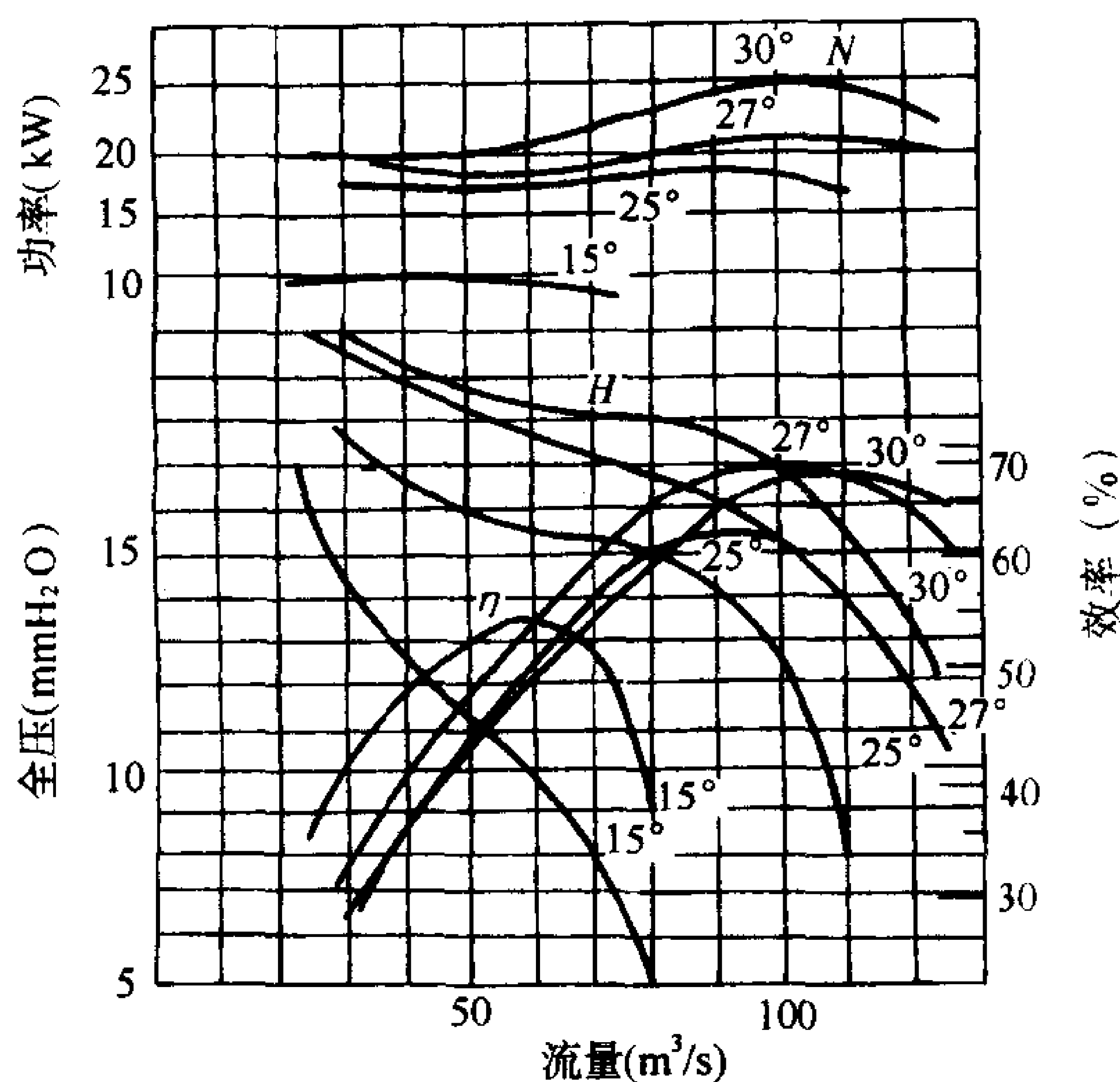


图 11-22 30E-11N o.36 $\frac{1}{2}$ 型轴流风机性能曲线

图 11-22 为 30E-11 型轴流风机的性能曲线。图中曲线是按四种不同的安装角绘制的。

我国生产的部分轴流式风机及其用途可参见表 13-5。附录六是 T40 型轴流风机的部分性能规范表。

混(斜)流式泵与风机

它是在构造和性能上,介于离心机与轴流机之间的一种流体机械。当轴流机为适当增加其压头时,便派生出“子午加速轴流机”即为混流式风机。详见图 11-27 和图 11-28。

第七节 贯流式风机

近年来由于空气调节技术的发展,要求有一种小风量、低噪声、压头适当和在安装上便于与建筑物相配合的小型风机。贯流式风机就是适应这种要求的新型风机。

贯流式风机的主要特点如下(图 11-23):

(一) 叶轮一般是多叶式前向叶型,但两个端面是封闭的。

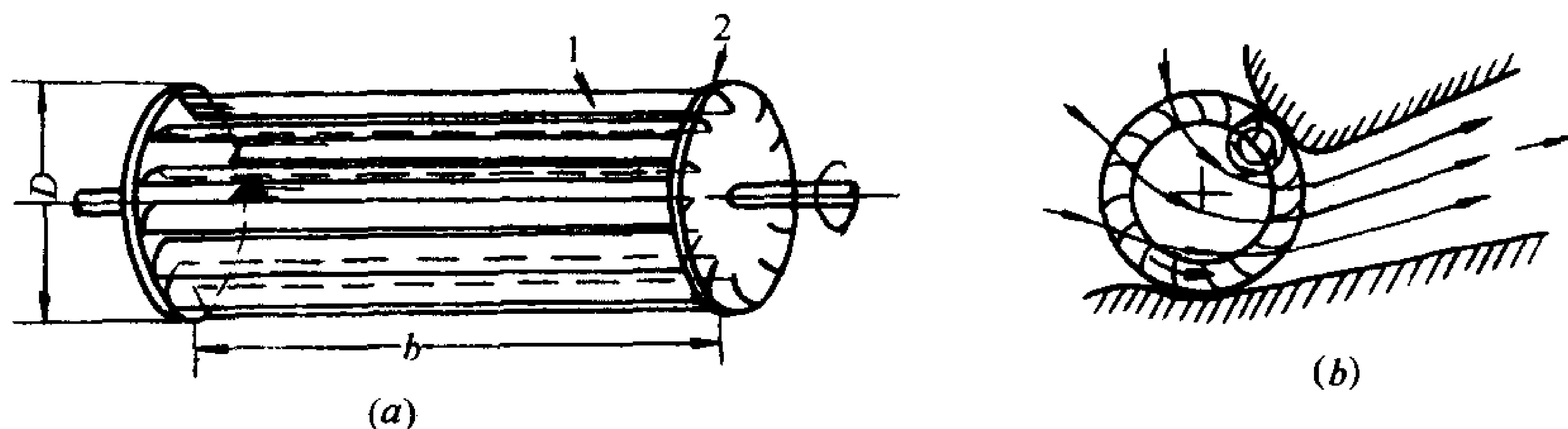


图 11-23 贯流式风机示意图

(a)贯流式风机叶轮结构示意图;(b)贯流式风机中的气流

1—叶片;2—封闭端面

(二) 叶轮的宽度 b 没有限制,当宽度加大时,流量也增加。

(三) 贯流式风机不像离心式风机是在机壳侧板上开口使气流轴向进入风机,而是将机壳部分地敞开使气流直接径向进入风机。气流横穿叶片两次。某些贯流式风机在叶轮内缘加设不动的导流叶片,以改善气流状态。

(四) 在性能上,贯流式风机的全压系数较大,$\overline{Q}$—$\overline{H}$ 曲线是驼峰型的,效率较低,一般约为 30%~50%。图 11-24 是这种风机的无因次性能曲线。

$$\overline{p}=\frac{p}{\frac{1}{2}\rho u^2};\overline{\varphi}=\frac{Q}{bD_2u};\overline{N}=\frac{\overline{p}\,\overline{\varphi}}{\eta};\overline{p}_j=\frac{p_j}{\frac{1}{2}\rho u^2};$$

其中流量系数因叶轮宽度没有限制而加入了宽度 b 的因素,即 $\overline{\varphi}=\frac{Q}{bD_2u}$,而不是一般离心式风机中采用的 $\overline{Q}=\frac{Q}{3600u\frac{\pi D_2^2}{4}}$。

(五) 进风口与出风口都是矩形的,易与建筑物相配合。

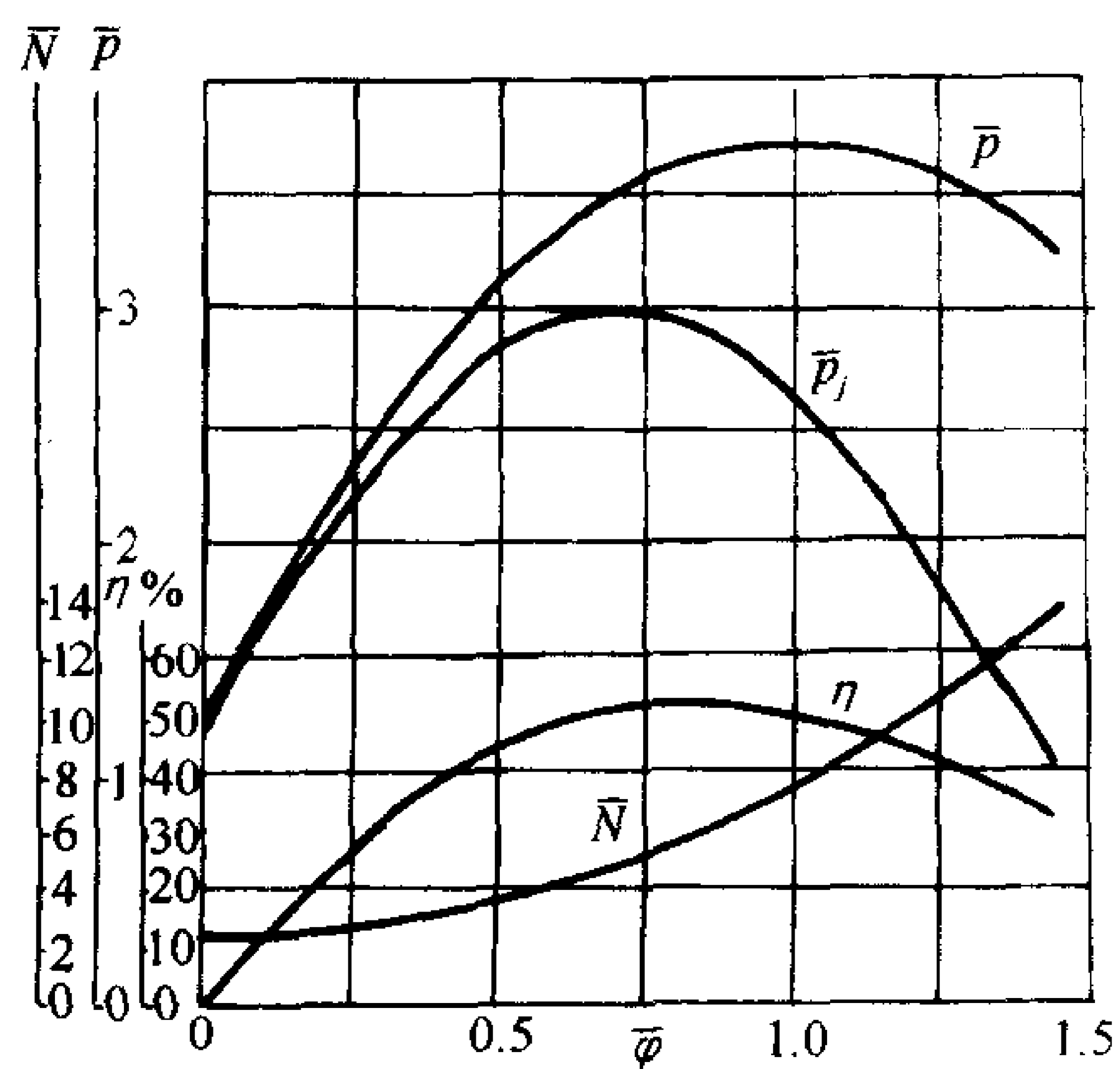


图 11-24 贯流式风机的无因次性能曲线

贯流式风机至今还存在许多问题有待解决。特别是各部分的几何形状对其性能有重大影响。不完善的结构甚至完全不能工作。但小型的贯流式风机的使用范围正在稳步扩大。

第八节 相似律与比转数

泵或风机的设计、制造通常是按“系列”进行的。同一系列中,大小不等的泵或风机都是相似的,也就是说它们之间的流体力学性质遵循本书所阐明的力学相似原理。

按系列进行生产的原因之一是因为流体在机内的运动情况十分复杂,以致目前不得不广泛利用已有泵和风机的数据作为设计的依据。有时,由于实型泵或风机过大,就运用相似原理先在较小的模型机上进行试验,然后再将试验结果推广到实型机器。

泵和风机的相似律表明了同一系列相似机器的相似工况之间的相似关系。相似律是根据相似原理导出的,除用于设计泵或风机外,对于从事本专业的工作人员来说,更重要的还在于用来作为运行、调节和选用型号等的理论根据和实用工具。

一、泵与风机的相似律

根据相似原理，相似泵或风机首先必须几何相似。因此同一系列泵或风机的各过流部件相应的线尺寸间的比值应相等，相应的角度也应相等。如用下角 m 表示模型机参数，n 表示实型机的参数，则几何相似可由下列方程表达：

$$\frac{D_{1n}}{D_{1m}}=\frac{D_{2n}}{D_{2m}}=\frac{b_{1n}}{b_{1m}}=\frac{b_{2n}}{b_{2m}}\cdots\cdots=\lambda_l \tag{11-8-1}$$

$$\beta_{1n}=\beta_{1m} \tag{11-8-2}$$

$$\beta_{2n}=\beta_{2m} \tag{11-8-3}$$

式中，λ_l 为相应线尺寸的比值。在所有的线尺寸中，通常选取叶轮外径 D_2 作为定性线尺寸。其余符号同前。这里所指的模型机，通常是该系列中的某一台机器。

相似机还要求运动相似，即两机在相似工况点的同名称速度比值相等和方向相同，即相似工况点的速度三角形相似，故有：

$$\frac{v_{1n}}{v_{1m}}=\frac{v_{2n}}{v_{2m}}=\frac{u_{1n}}{u_{1m}}=\frac{u_{2n}}{u_{2m}}=\frac{w_{1n}}{w_{1m}}=\frac{w_{2n}}{w_{2m}}=\cdots\cdots=\lambda_v \tag{11-8-4}$$

$$\alpha_{1n}=\alpha_{1m} \tag{11-8-5}$$

$$\alpha_{2n}=\alpha_{2m} \tag{11-8-6}$$

式中，λ_v 是相似工况点的速度比值，视不同的相似工况点有不同值，其余符号同前。

从本书的相似原理部分可知，对不可压缩流体，其动力相似，要求模型与原型反映惯性力与重力相对比值的弗诺得准数 $Fr=\frac{v^2}{gl}$ 相等，同时也要求反映惯性力与粘性力相对比值的雷诺准数 $Re=\frac{vl}{\nu}$ 相等。

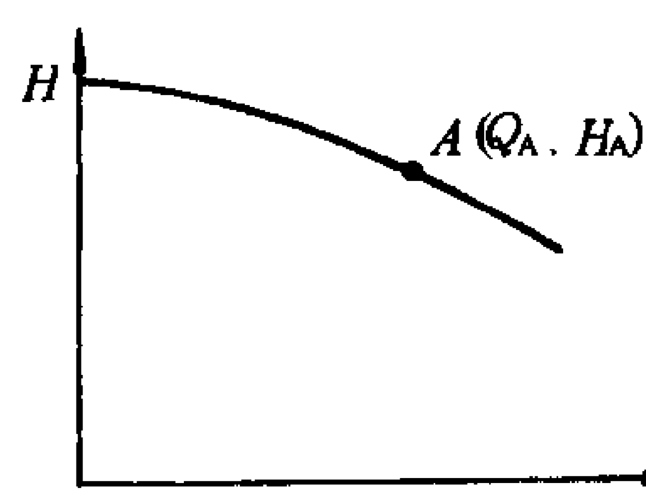


图 11-25　相似工况

由于在泵或风机的流道中，不存在自由表面，且水静压力与重力对流体的作用互相平衡，故可以不考虑重力准数。而粘性力的影响，又因其雷诺数甚大，处于自模区，也可以不予考虑。这就是为什么泵与风机在模拟时，通常并不采用"准数"来判断相似，而是根据工况相似来提出相似关系。

在这里，引入"相似工况"的概念：当原型性能曲线上某一工况点 A 与模型性能曲线上工况点 A' 所对应的流体运动相似，也就是相应的速度三角形相似，则 A 与 A' 两个工况为相似工况，见图 11-25。

在相似工况下，"原型"与"模型"的扬程、流量及功率有如下关系，此关系又叫相似律。

(一) 流量关系：相似工况点之间的流量关系，可根据计算流量之公式(11-4-1)及(11-5-2)得出：

$$\frac{Q_n}{Q_m}=\frac{\eta_{vn}\varepsilon_n\pi D_{2n}b_{2n}v_{r2n}}{\eta_{vm}\varepsilon_m\pi D_{2m}b_{2m}v_{r2m}}$$

$$=\frac{n_n}{n_m}\left(\frac{D_{2n}}{D_{2m}}\right)^3=\lambda_l^3\left(\frac{n_n}{n_m}\right) \tag{11-8-7}$$

式中考虑了两机通过同一流体介质，且尺寸相差不太悬殊时，其容积效率及排挤系数相等，即 $\eta_{vn}=\eta_{vm}$及 $\epsilon_n=\epsilon_m$；并且$\frac{b_{2n}}{b_{2m}}=\frac{D_{2n}}{D_{2m}}$；

$$\frac{v_{r2n}}{v_{r2m}}=\frac{u_{2n}}{u_{2m}}=\frac{\pi D_{2n}n_n}{\pi D_{2m}n_m}$$

（二）扬程关系：相似工况点之间的扬程关系，可根据计算扬程之公式(11-3-1)及(11-5-1)得出：

$$\frac{g_nH_n}{g_mH_m}=\frac{\eta_{hn}u_{2n}v_{u2n}}{\eta_{hm}u_{2m}v_{u2m}}=\left(\frac{n_n}{n_m}\right)^2\left(\frac{D_{2n}}{D_{2m}}\right)^2=\lambda_l^2\left(\frac{n_n}{n_m}\right)^2 \tag{11-8-8}$$

式中诸项也作了类似上述的考虑。

如将上式的扬程 H(液柱或气柱高度)改换成压头 P(以压强来表示)，即把 $p=\gamma\cdot H$ 代入(11-8-8)公式，则得压头关系为：

$$\frac{p_n}{p_m}=\frac{\rho_n}{\rho_m}\left(\frac{n_n}{n_m}\right)^2\left(\frac{D_{2n}}{D_{2m}}\right)^2 \tag{11-8-9}$$

（三）功率关系：两相似工况点之间的功率关系，可由求轴功率的公式(11-1-4)导出：

$$\frac{N_n}{N_m}=\frac{\gamma_nQ_nH_n}{\gamma_mQ_mH_m}\cdot\frac{\eta_m}{\eta_n}=\frac{\gamma_nQ_nH_n}{\gamma_mQ_mH_m}=\frac{\rho_nQ_nH_n}{\rho_mQ_mH_m}$$

式中可认为 $\eta_n\approx\eta_m$ 予以消去。然后用式(11-8-7)及(11-8-8)代入上式，可得：

$$\frac{N_n}{N_m}=\frac{\rho_n}{\rho_m}\left(\frac{n_n}{n_m}\right)^3\left(\frac{D_{2n}}{D_{2m}}\right)^5 \tag{11-8-10}$$

有时可以将同机性能参数合并。同时为了简明起见。将下角 m、n 及 2 取消，就能以更为一般的形式来表明相似泵或相似风机的相似工况点各性能参数之间的相似关系：

$$\frac{p_m}{\rho_m n_m^2D_{2m}^2}=\frac{p_n}{\rho_n n_n^2D_{2n}^2}=\frac{p}{\rho n^2D^2}=\lambda_p \tag{11-8-11}$$

$$\frac{g_mH_m}{n_m^2D_{2m}^2}=\frac{g_nH_n}{n_n^2D_{2n}^2}=\frac{gH}{n^2D^2}=\lambda_H \tag{11-8-12}$$

$$\frac{Q_m}{n_mD_{2m}^3}=\frac{Q_n}{n_nD_{2n}^3}=\frac{Q}{nD^3}=\lambda_Q \tag{11-8-13}$$

$$\frac{N_m}{\rho_m n_m^3D_{2m}^5}=\frac{N_n}{\rho_n n_n^3D_{2n}^5}=\frac{N}{\rho n^3D^5}=\lambda_N \tag{11-8-14}$$

以上诸式中的 D 仍系叶轮外径。

注意：λ_p、λ_H、λ_Q 及 λ_N 四个比例常数，因相似工况点而异，即不同的相似工况点有不同的 λ_p、λ_H、λ_Q 及 λ_N 值。

二、风机的无因次性能曲线

前面曾提到“系列”这一名词，在同一系列中尽管有各种大小尺寸的诸多泵或风机，但它们皆属于相似的一类机器(在几何上是相似的)。既然同属一类，就总能根据相似律找出其共性，来代表某一“类”(系列)的特征。于是，就引出了无因次性能曲线和比转数的概念。

无因次性能曲线的优点在于只需用一条曲线，就可以代替某一整个系列全部机器在各种转速下的性能曲线，从而大大简化了性能曲线图或性能表。

现在，我们将相似工况点各性能参数的比值公式(11-8-11)、(11-8-13)及(11-8-14)中的比例常数 λ_p、λ_Q 及 λ_N 按我国目前约定俗成的办法作如下的更改。

对于式(11-8-11)，用叶轮外径处的圆周速度 u_2 代替乘积 nD_2 并改用压力系数 $\overline{p}$（有的产品样本中用 $\overline{H}$）代替 λ_P，则可得通风机的压力系数 $\overline{p}$ 为：

$$\overline{p}=\frac{p}{\rho u_2^2} \tag{11-8-15}$$

式中，p 的单位采用 Pa，ρ 的单位用 kg/m^3，而 u_2 仍以 m/s 计。

对于式(11-8-13)，除以叶轮外径处圆周速度 u_2 代替 nD_2 外，用面积 $\frac{\pi D_2^2}{4}$ 代替 D_2^2，并改用流量系数 $\overline{Q}$ 代替 λ_Q，于是，风机的流量系数 $\overline{Q}$ 为：

$$\overline{Q}=\frac{Q}{3600u_2\frac{\pi D_2^2}{4}} \tag{11-8-16}$$

式中，Q 以 m^3/h 为单位，D_2 以 m 为单位，u_2 的单位为 m/s。

在式(11-8-14)中，以 u_2 代替 nD_2，$\frac{\pi D_2^2}{4}$ 代换 D_2^2，并用功率系数 $\overline{N}$ 代替 λ_N，则得风机的功率系数为：

$$\overline{N}=\frac{1000N}{\frac{\pi D_2^2}{4}\rho u_2^3} \tag{11-8-17}$$

式中，N 以 kW 为单位。

值得重述，$\overline{p}$、$\overline{Q}$ 及 $\overline{N}$ 是无因次比例常数，它是取决于相似工况点的函数，不同的相似工况点所对应的 $\overline{p}$、$\overline{Q}$ 及 $\overline{N}$ 值不同。

为了绘制无因次性能曲线，在某一系列中选用一台风机作为模型机，令其在不同的流量 Q_1、Q_2、Q_3……条件下以固定转速 n 运行，测出相应的 p_1、p_2、p_3……和 N_1、N_2、N_3……，同时取得所输送的介质密度 ρ，就可以算出 u 值和对应的 $\overline{p}_1$、$\overline{p}_2$、$\overline{p}_3$……，$\overline{Q}_1$、$\overline{Q}_2$、$\overline{Q}_3$……及 $\overline{N}_1$、$\overline{N}_2$、$\overline{N}_3$……。还可以按下式计算出效率 η_1、η_2、η_3……。

$$\eta=\frac{\overline{Q}\,\overline{p}}{\overline{N}} \tag{11-8-18}$$

用圆滑曲线连接这些点，就可以描绘出一组无因次曲线，其中包括 $\overline{Q}$—$\overline{p}$，$\overline{Q}$—$\overline{N}$ 及 $\overline{Q}$—η 三条曲线。图 11-26 所示为我国设计生产的高效率离心式 4-72-11 型风机的无因次性能曲线。图中实线是以 No5 机为模型机，它代表 No5、No5.5、No 6 及 No 8 号四种大小不同的同系列风机的性能曲线。虚线是以 No10 号机为模型机，代表该系列 No10、No12、No16 及 No20 号机的性能曲线。这一系列之所以要采用两个模型机的原因就是在推导相似律时，

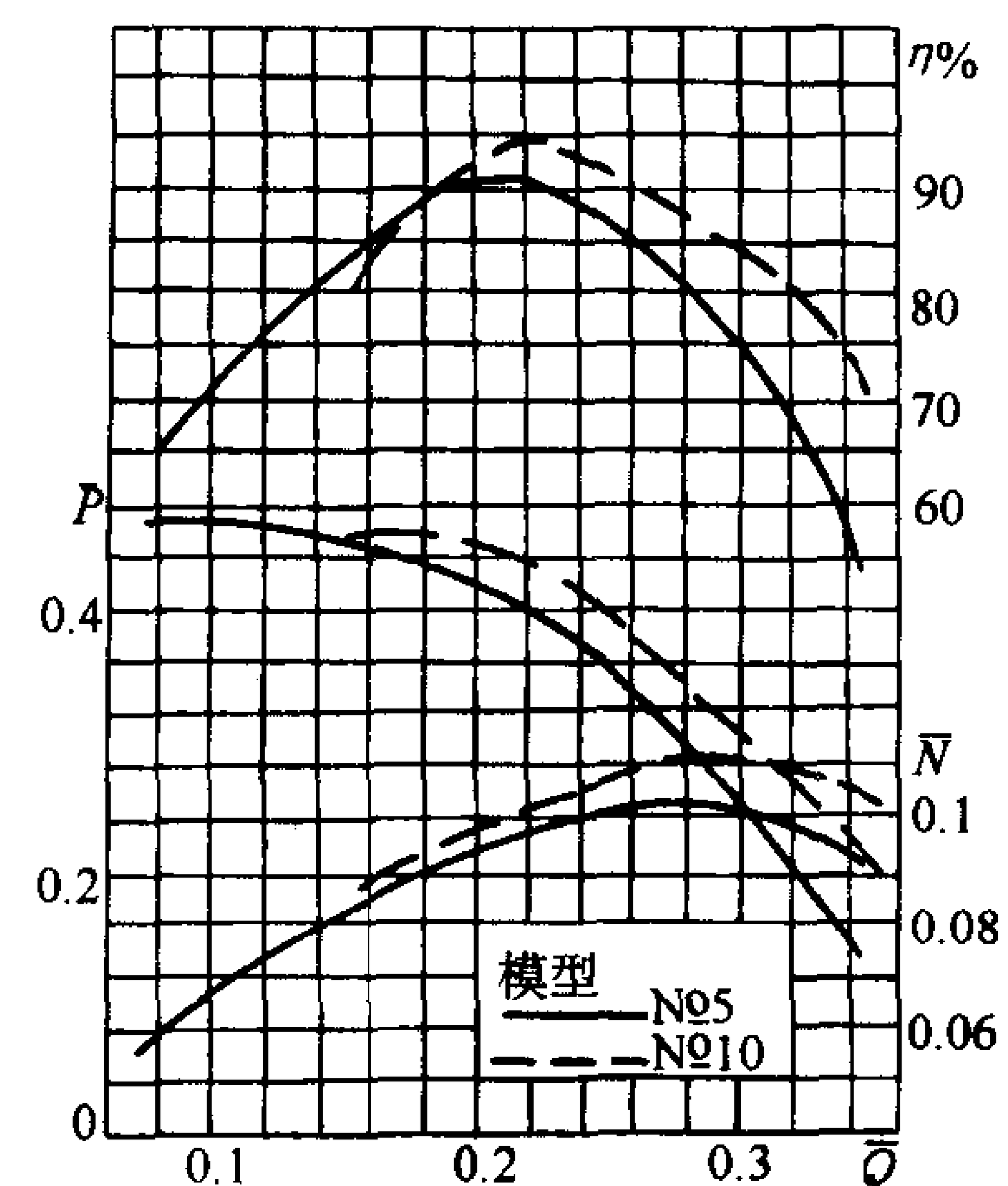


图 11-26· 4-72-11 型风机的无因次性能曲线

采取了略去次要因素的方法，以致相似机器的大小相差过分悬殊时，引起了某些误差❶。

显然，根据无因次性能曲线得出的无因次量是不能直接使用的，所以应将自曲线查得的$\overline{p}$、$\overline{Q}$及$\overline{N}$值再用式(11-8-15)，(11-8-16)及(11-8-17)进行反运算以求出实际的性能参数。具体运用方法可参见第十三章第七节之例题。

三、比转数

一个“系列”的诸多相似机既然可用一条无因次性能曲线来表述，那么，视在此曲线上所取的工况点之不同，就会有许多组($\overline{Q}_1$，$\overline{p}_1$)、($\overline{Q}_2$、$\overline{p}_2$)、($\overline{Q}_3$、$\overline{p}_3$)、……值。

如果我们指定效率最高点（即最佳工况点）的一组($\overline{Q}$、$\overline{p}$)值，作为这个“系列”的代表值，这样，就把表征“系列”的手段由一条无因次曲线简化成两个参数值($\overline{Q}$、$\overline{p}$)，作为这个系列的代表值。从而找到了非相似泵或风机的比较基础——比转数。

根据(11-8-12)及(11-8-13)式可知，对于某一类型的泵或风机，在最高效率工况时，有相等的λ_H、λ_Q（即$\overline{H}$、$\overline{Q}$）值。这里，我们把此效率最高点的流量系数$\overline{Q}$除以压力系数$\overline{H}$，以消去D，从而可以求出：同一类型泵或风机，不论其尺寸大小，而反映其流量Q，扬程（全压）H以及转数n之间关系的类型性能代表量——比转数n_s。

两式相除

$$\frac{nQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}}=\frac{\overline{Q}^{\frac{1}{2}}}{\overline{H}^{3/4}}$$

既然上式右端是由无因次不变量所组成，则组成后的综合量，必然也是一个不依其尺寸D改变的无因次量，以n_s表示此无因次不变量：

$$n_s=\frac{nQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

n_s被称为比转数，因为是无因次，可以用任何系统的单位计算。在工程中，由于g是常量，消去g也能使剩余量为不变量，所以，实际上的比转数定义为：

$$n_s=\frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}} \tag{11-8-19}$$

这样，n_s就成为有因次量了，必须根据按行业规定的单位进行计算。

对于风机，进口处为标准大气状况时，Q取m^3/s，H取Pa，n取r/min。

一般离心式风机$n_s=15\sim80$；混流（斜流）风机$n_s=80\sim120$；轴流风机$n_s=100\sim500$。

但是，比转数的概念最先是由水轮机参数导出，而为水泵所袭用。水轮机最重要的参数是功率N，而不是流量Q，为此，从功率比λ_N的(11-8-14)式和扬程比λ_H的(11-8-12)式中消去D，并消去常数$\rho^{\frac{1}{2}}g^{5/4}$得出：

$$n'_s=\frac{n\sqrt{N}}{H^{5/4}}$$

由于它也是有因次量，就必须先规定单位：设$N=1$HP，$H=10000$Pa，则$n'_s=n$。因此，习惯上将水泵的比转数认为相当于$N=1$HP，$H=1$m时的转速。但是，由于水泵的重要参数是Q而不是N，将$N=\frac{\gamma HQ}{75}$代入上式，得出计算水泵比转数n_{sp}的计算式为：

---

❶ 如机内表面粗糙度，圆盘损失和泄漏流量等不完全相似。

$$n_{sp}=3.65\frac{n\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \tag{11-8-20}$$

式中，Q 的单位取 m^3/s，H 的单位取 Pa，n 取 r/min。

那末比转数有哪些实用意义呢？

（一）比转数反映了某系列泵或风机性能上的特点。可以看出比转数大表明其流量大而压头小；反之，比转数小时，表明流量小而压头大。

（二）比转数可以反映该系列泵或风机在结构上的特点。因为比转数大的机器流量大而压头小，故其进出口叶轮面积必然较大，即进口直径 D_0 与出口宽度 b_2 较大，而轮径 D_2 则较小，因此叶轮厚而小。反之，比转数小的机器流量小而压头大，叶轮的 D_0 与 b_2 小而轮径 D_2 较大，故叶轮相对地扁而大。

当比转数由小不断增大时，叶轮的 D_2/D_0 不断缩小，而 b_2/D_2 则继续增加。从整个叶轮结构来看，将由最初的径向流出的离心式最后变成轴向流出的轴流式。这种变化也必然涉及机壳的结构形式。叶轮随比转数的增加而变化的过程可以从图 11-27 及图 11-28 中看出。

风机类型	离心式风机		斜(混)流风机	轴流式风机	贯流(横流)风机
比转数 n_s	49.8	90.5	98.8	347～359	48.8～82
	$0.5r_2$	$0.7r_2$			

图 11-27 风机比转数，叶轮形状

泵的类型	离心泵			混流泵	轴流泵
	低比转数	中比转数	高比转数		
比转数	30～80	80～150	150～300	300～500	500～1000
叶轮形状	D_0 D_2	D_0 D_2	D_0 D_2	D_0 D_2	D_0 D_2
D_2/D_0	≈3	≈2.3	≈1.8～1.4	≈1.2～1.1	≈1
叶片形状	圆柱形	入口处扭曲 出口处圆柱形	扭曲	扭曲	机翼型
性能曲线大致的形状	H N η	H N η	H N η	H N η	H N η

图 11-28 泵的比转数、叶轮形状和性能曲线形状

（三）比转数可以反映性能曲线变化的趋势。对于直径 D_2 相同的叶轮来说，低比转数的机器由于压头增加较多，故流道一般较长，比值 D_2/D_0 和出口安装角 β_2 也较大（见图 11-

28及11-29)。图11-29所示的两幅速度三角形中可以看出,当流量变化 ΔQ 相同时,β_2 大的机器具有较小的切向分速变化 Δv_{u2};同时还能根据欧拉方程式推知相应的压头变化 ΔH 也较小。如以 $\Delta H/\Delta Q$ 来表示这些变化,就能清楚地看到 β_2 大的机器,相对压头变化率 $\Delta H/\Delta Q$ 较小。这说明低比转数泵或风机(它们的 β_2 较大)的 $Q—H$ 曲线较平坦,或者说压头的变化较缓慢。至于 $Q—N$ 曲线则因流量增加而压头减少不多,机器的轴功率上升较快,曲线较陡。$Q—\eta$ 曲线则较平。

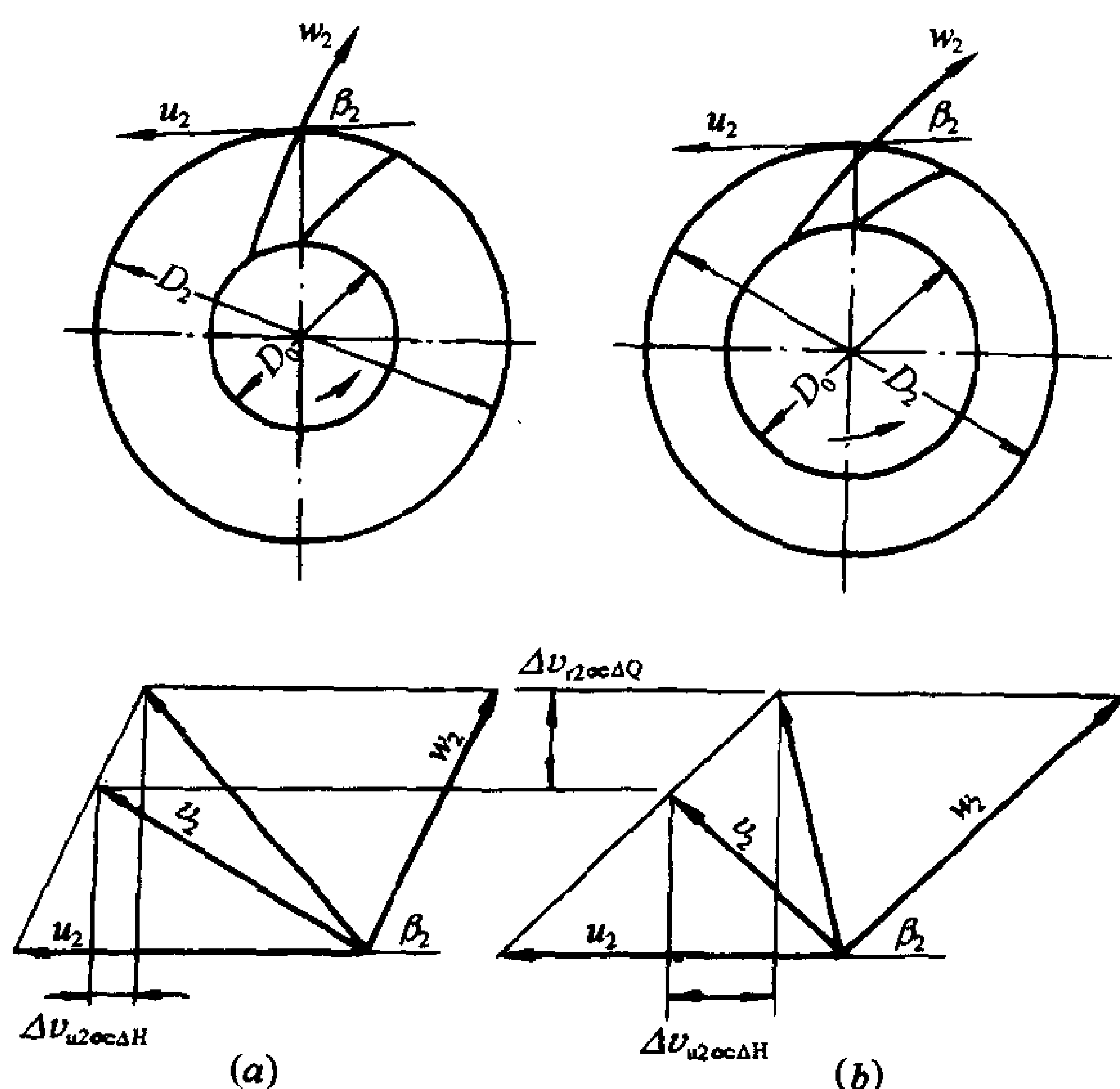


图 11-29 比转数对性能曲线变化趋势影响的原理图
(a)比转数较低的机器;(b)比转数较高的机器

比转数在泵与风机的设计选型中起着极其重要的作用。对于编制系列和安排型号编谱上有重大影响,欲知其详,可参阅有关专门著作。

根据以上分析,可以按照比转数的大小,大体上了解泵或风机的性能和结构状况。比转数既反映了泵和风机的性能、结构型式和使用上的一系列特点,因而常用来作为泵和风机的分类依据。这一点通常在机器的型号上有所反映。例如4-79型风机的比转数为79(只取整数值)。在选用泵和风机时,也可以利用比转数。人们在已知所需设计流量、压头以后,常希望所选用的泵或风机在高效率下工作,故可依某原动机(如电机)的转数先算出所需要的比转数,从而初步定出可以采用的泵或风机型号。

第九节 相似律的实际应用

一、当被输送流体的密度改变时性能参数的换算

由于厂家产品样本所提出的性能数据是在标准条件下经试验得出的。例如,对一般风机而言,我国规定的标准条件是大气压强为101.325kPa(760mmHg),空气温度为20℃,相对湿度为50%,当被输送的流体温度及压强与上述样本条件不同时,即流体密度改变时,则风机的性能也发生相应的改变。

利用相似律计算这类问题时,由于机器是同一台,大小尺寸未变,且转速也未变,如以角标"O"代表样本条件,将(11-8-7)、(11-8-9),(11-8-10)相似律式简化为温度修正式:

$$Q = Q_0 \text{且} \ \eta = \eta_0$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{B}{101.325} \cdot \frac{273 + t_0}{273 + t}$$

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{B}{101.325} \cdot \frac{273 + t_0}{273 + t}$$

式中,B 为当地大气压强,单位为kPa;t 为被输送气体的温度,℃。

二、当转速改变时性能参数的换算

泵或风机的性能参数都是针对某一定转速 n_m 来说的。当实际运行转速 n 与 n_m 不同时，可用相似律求出新的性能参数。此时，相似律被简化为：

$$\frac{Q}{Q_m}=\frac{n}{n_m}$$

$$\frac{H}{H_m}=\left(\frac{n}{n_m}\right)^2$$

$$\frac{N}{N_m}=\left(\frac{n}{n_m}\right)^3$$

从以上三式可写成下列更实用的综合公式：

$$\frac{Q}{Q_m}=\sqrt{\frac{H}{H_m}}=\sqrt[3]{\frac{N}{N_m}}=\frac{n}{n_m} \tag{11-9-1}$$

这个综合式的重要性在于，这些关系式必定是同时成立，这就指出，用加大 n 来提高流量的同时，不要忘记原动机所需功率与转数成三次方比例增长。

三、泵叶轮切削——仅叶轮直径 D 改变的换算

此时，根据(11-8-7)，(11-8-8)及(11-8-10)式，可将相似律简化为：

$$\frac{Q}{Q_0}=\left(\frac{D}{D_0}\right)^3;\frac{H}{H_0}=\left(\frac{D}{D_0}\right)^2$$

$$\frac{N}{N_0}=\left(\frac{D}{D_0}\right)^5;\eta=\eta_0$$

四、当叶轮直径和转数都改变时性能曲线的换算

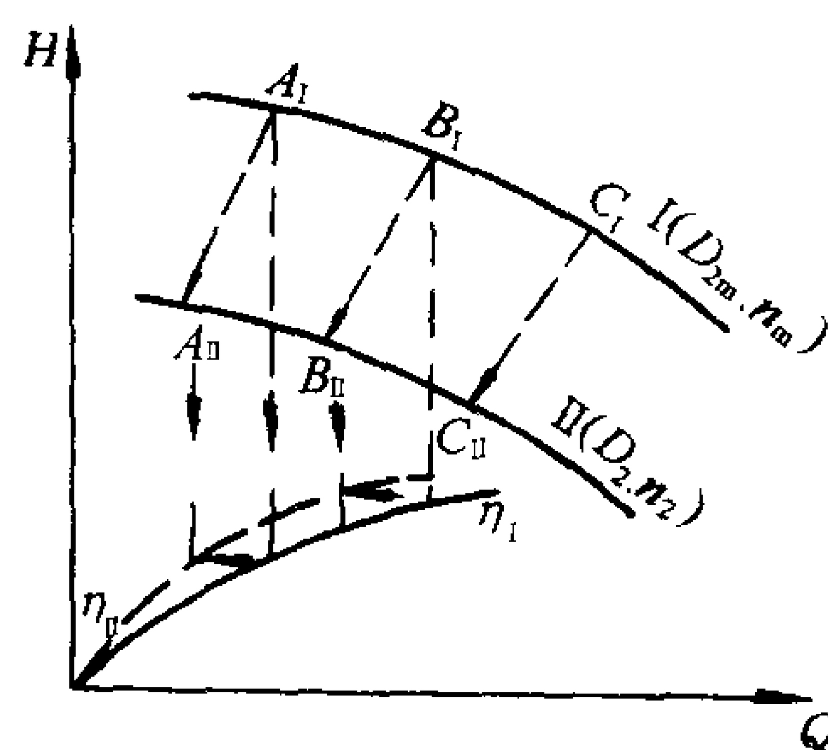


图 11-30 相似泵 $Q—H$ 曲线的换算

当已知泵或风机在某一叶轮直径 D_{2m}和转速 n_m 下的性能曲线 I 时，即可按相似律换算出同一系列相似机，在另一轮径 D_2 及转速 n_2 下的性能曲线Ⅱ。下面以 $Q—H$ 曲线为例，说明其具体换算方法，参见图 11-30。

当遵守相似律只适用于相似工况点的原则。首先，在曲线Ⅰ上任取某一工况点 $A_Ⅰ$，然后，由 $A_Ⅰ$ 点曲线 I 上查出该工况点所对应的$Q_{AⅠ}$和 $H_{AⅠ}$值。利用公式(11-8-7)及(11-8-8)即可求得在 D_2 及 n_2 新条件下的 $Q_{AⅡ}$及 $H_{AⅡ}$值，据此工况，在图上就可找出与 $A_Ⅰ$点相对应的相似工况点 $A_Ⅱ$。

用同样的方法，在曲线Ⅰ上另取一工况点 $B_Ⅰ$，求出其对应的相似工况点 $B_Ⅱ$。循此方法做下去，从 $C_Ⅰ$找到 $C_Ⅱ$，从 $D_Ⅰ$找到 $D_Ⅱ$，……，最后，将 $A_Ⅱ$，$B_Ⅱ$，$C_Ⅱ$，$D_Ⅱ$，……各点用光滑曲线连接起来，便得出相似泵或风机在 D_2 及 n_2 下的 $D—H$ 曲线Ⅱ。

同理，利用公式(11-8-7)及(11-8-10)便可进行相似泵或风机的 $Q—N$ 曲线换算。

至于 $Q—\eta$ 曲线的换算就更容易了。因为相似工况点之间的效率 η 相等，所以从 $A_Ⅰ$点所对应的效率 $\eta_{AⅠ}$平移过去就应该是相似工况点 $A_Ⅱ$的效率。照此办法，即能由 $Q—\eta_Ⅰ$曲线绘出 $Q—\eta_Ⅱ$曲线。

用此换算方法，可将泵或风机在某一直径和某一转速下经试验得出的性能曲线，换算出各种不同直径和转速下的许多条性能曲线。例如，通用性能曲线和选择性能曲线，详见第十二章第三节。

思 考 题

1. 欧拉方程指出：泵或风机所产生的理论扬程 H_T，与流体种类无关。这个结论应如何理解？在工程实践中，泵在启动前必须预先向泵内充水，排除空气，否则水泵就打不上水来，这不与上述结论互相矛盾吗？

2. 在本书中，H 代表扬程，P 代表风机的压头，而在工程实践中，风机样本上又常以 H 表示风机的压头，单位为 Pa，此压头 H 与扬程 H 及压头 P 有何异同？

3. 你能否说明相似律综合式

$$\frac{Q}{Q_m}=\sqrt{\frac{H}{H_m}}=\sqrt[3]{\frac{N}{N_m}}=\frac{n}{n_m}$$

有什么使用价值。

4. 在计算泵或风机的轴功率时，我国常用下列公式：

$$N=\frac{\gamma QH}{\eta};N=\frac{QH}{102\eta};N=\frac{Qp}{\eta}$$

其中，N 的单位为 kW，你能否说明每个公式中 r、Q、H 及 p 都应采用什么单位。

5. 同一系列的诸多泵或风机遵守相似律，那么，同一台泵或风机在同一个转速下运转，其各工况（即一条性能曲线上的许多点）当然更要遵守相似律。这些说法是否正确。

6. 当风机的实际使用条件（当地气压 B、温度 t）与样本规定条件不同时，应该用什么公式进行修正？在例题 11-1 中是将样本提供的数据修正成实际使用工况，能否反其道而行之，将使用条件下的 Q 及 p 换算成样本条件下的 Q_0 及 p_0？上述两种作法，哪种最佳？

7. 泵或风机的理论基础，都包括哪些内容？

习 题

11-1 已知 4-72-11No6C 型风机在转速为 1250r/min 时的实测参数如下表所列，求：

各测点的全效率；

绘制性能曲线图；

写出该风机的铭牌参数（即最高效率点的性能参数）。

计算及图表均要求采用国际单位。

11-2 根据题 1 中已知数据，试求 4-72-11 系列风机的无因次量，从而绘制该系列风机的无因次性能曲线。计算中定性叶轮直径 $D_2=0.6$m。

测 点 编 号	1	2	3	4	5	6	7	8
$H(mmH_2O)$	86	84	83	81	77	71	65	59
$p(N/m^2)$	843.4	823.8	814.0	794.3	755.1	696.3	637.4	578.6
$Q(m^3/h)$	5920	6640	7360	8100	8800	9500	10250	11000
$N(kW)$	1.69	1.77	1.86	1.96	2.03	2.08	2.12	2.15

11-3 利用上题得到的无因次性能曲线求 4-72-11No5A 型风机在 $n=2900$r/min 时的最佳效率点各参数值，并计算该机的比转数 n_s 值。计算时 $D_2=0.5$m。

11-4 某一单吸单级泵，流量 $Q=45m^3/h$，扬程 $H=33.5$m，转速 $n=2900$r/min，试求其比转数 n_{sp}为多少？如该泵为双吸式，应以 $Q/2$ 作为比转数中的流量计算值，则其比转数应为多少？当该泵设计成八级泵，应以 $H/8$ 作为比转数中的扬程计算值，则比转数为多少？

11-5 某单吸单级离心泵，$Q=0.0735m^3/s$，$H=14.65$m，用电机由皮带拖动，测得 $n=1420$r/min，$N=3.3$kW；后因改为电机直接联动，n 增大为 1450r/min，试求此时泵的工作参数为多少？

11-6　在 $n = 2000\text{r/min}$ 的条件下实测一离心式泵的结果为：$Q = 0.17\text{m}^3/\text{s}$，$H = 104\text{m}$，$N = 184\text{kW}$。如有一几何相似的水泵，其叶轮比上述泵的叶轮大一倍，在 1500r/min 之下运行，试求在效率相同的工况点的流量、扬程及效率各为多少？

11-7　有一转速为 1480r/min 的水泵，理论流量 $Q = 0.0833\text{m}^3/\text{s}$，叶轮外径 $D_2 = 360\text{mm}$，叶轮出口有效面积 $A = 0.023\text{m}^2$，叶片出口安装角 $\beta_2 = 30°$，试作出口速度三角形。假设流体进入叶片前没有预旋运动，即 $v_{u1} = 0$。试计算此泵的理论压头 $H_{T\infty}$。设涡流修正系数 $k = 0.77$，理论压头 H_T 为多少？

（提示：先求出口绝对速度的径向分速 v_{r2}，作出速度三角形。）

11-8　有一台多级锅炉给水泵，要求满足扬程 $H = 176\text{m}$，流量 $Q = 81.6\text{m}^3/\text{h}$，试求该泵所需的级数和轴功率各为多少？计算中不考虑涡流修正系数。其余已知条件如下：

叶轮外径　$D_2 = 254\text{mm}$

水力效率　$\eta_h = 92\%$

容积效率　$\eta_v = 90\%$

机械效率　$\eta_m = 95\%$

转速　$n = 1440\text{r/min}$

流体出口绝对流速的切向分速为出口圆周速度的 55%。

11-9　为什么离心式泵与风机性能曲线中的 $Q—\eta$ 曲线有一个最高效率点？

11-10　影响泵或风机的性能的能量损失有哪几种？简单地讨论造成这些损失的原因。证明全效率等于各分效率之乘积。

11-11　试简单论述相似律与比转数的含义和用途，指出两者的区别。

11-12　无因次性能曲线何以能概括同一系列中，大小不同、工况各异的性能？应用无因次性能曲线要注意哪些问题？

11-13　试简论不同叶型对风机性能的影响，并说明前向叶型的风机为何容易超载？

11-14　利用电机拖动的离心式泵或风机，常在零流量下启动，试说明其理由。

11-15　关闭节流设备使泵或风机在零流量下运行，这时轴功率并不等于零，为什么？是否可以使风机或泵长时期在零流量下工作？原因何在？

11-16　根据表 13-5 所列 4-72-11 型风机中的数据任选某一转速下的三个工况点，再选另一个转速下三个工况点，验证它们是否都落在同一无因次性能曲线上（图 11-26）。

第十二章　叶片式泵与风机在管路上的工作分析及调节

第一节　管路性能曲线及工作点

总括前述，我们已研究了泵与风机的性能曲线、性能曲线的换算、无因次性能曲线。它告诉我们：某一台泵或风机在某一转数下，所提供的流量和扬程是密切相关的，并有无数组对应值(Q_1,H_1)、(Q_2,H_2)、(Q_3,H_3)、……。一台泵或风机究竟能给出哪一组(Q,H)值，即在泵与风机性能曲线上哪一点工作，并非任意，而是取决于所连接的管路性能。当泵或风机提供的压头与管路所需要的压头得到平衡时，由此也就确定了泵或风机所提供的流量，这就是泵或风机的"自动平衡性"。此时，如该流量不能满足设计需要时，就需另选一条泵或风机的性能曲线，不得已时亦可调整管路性能来满足需要。

一、管路特性曲线

通常泵或风机是与一定的管路相连接而工作的。一般情况下，流体在管路中流动时所消耗的能量，用于补偿下述的压差、高差和阻力（包括流体流出时的动压头）：

（一）用来克服管路系统两端的压差，其中包括高压流体面（或高压容器）的压强 p_2 与低压流体面（或低压容器）的压强 p_1 之间的压差，以及两流体面间的高差 H_z（见图 12-1），即：

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} + H_z = H_1 \qquad (12\text{-}1\text{-}1)$$

当 $p_2 = p_1 = p_a$，即两流体面上的压强均为大气压时，式中第一项等于零。这是常见的情况。对于风机，由于被输送的介质为空气，因气柱产生的压头常可略去不计，这时 $H_z = 0$。总之，对于一定的管路系统来说，H_1 是一个不变的常量。

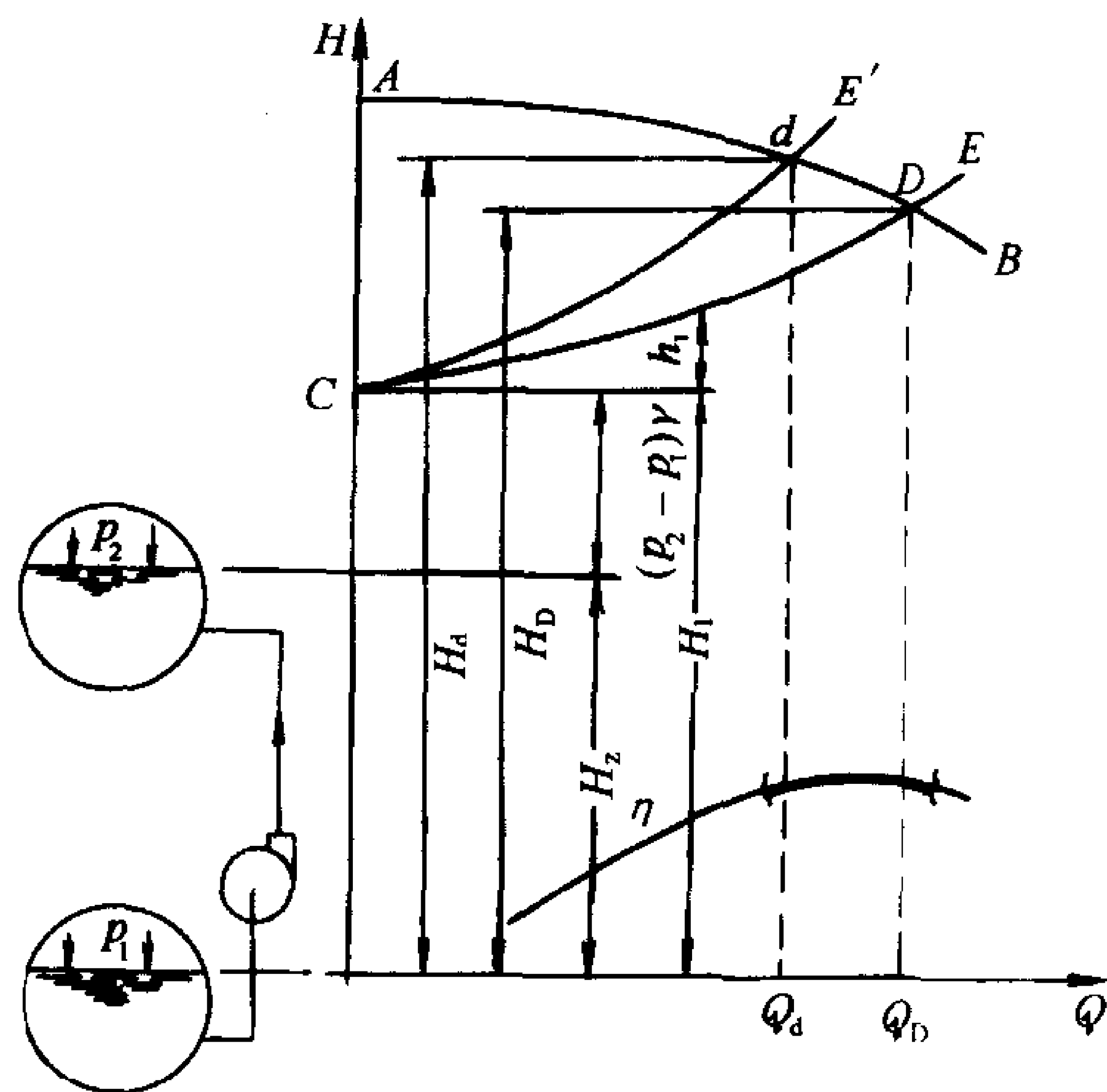


图 12-1　管路系统的性能曲线与泵或风机的工作点

（二）用来克服流体在管路中的流动阻力及由管道排出时的动压头$\left(\frac{v^2}{2g}\right)$，对风机为$\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)$，二者均与流量平方成正比，即：

$$h_1 = SQ^2 \qquad (12\text{-}1\text{-}2)$$

式中 S——阻抗，与管路系统的沿程阻力与局部阻力以及几何形状有关，单位 s^2/m^5。

于是流体在管路系统中的流动特性可以表达如下：

$$H=\frac{p_2-p_1}{\gamma}+H_z+h_1=H_1+SQ^2 \tag{12-1-3}$$

此式表明实际工程条件所决定的要求。如将这一关系绘在以流量 Q 与压头 H 组成的直角坐标图上，就可以得到一条通常称做管路性能的曲线(见图 12-1 中的 CE)。它是一条在 H 轴上截距等于 H_1 的抛物线。

管路特性曲线的绘法。根据(12-1-3)式，只要给定设计工况的流量 Q 和经过管路计算所求得的 h_1 及 H_1(很多情况 $H_1=0$)，便可反求出 S——管路特性系数(只要管路及阀门开启度不变，$S=$常数，当阀门开度一变，则 S 值随之而变)，或直接求出 S，则整条管路特性曲线就确定了。

二、泵或风机的工作点

如上所述，管路系统的特性是由工程实际要求所决定的，与泵或风机本身的性能无关。但是工程所提出的要求，即所需的流量及其相应的压头必须由泵或风机来满足。这是一对供求矛盾。利用图解方法可以方便地加以解决。

将泵或风机的性能曲线和管路系统的性能曲线同绘在一张坐标图 12-1 上。管路性能的曲线 CE 是一条二次曲线。选用某一适当的泵或风机，其性能曲线由 AB 表示。AB 与 CE 相交于 D 点。显然，D 点表明所选定的泵或风机可以在流量为 Q_D 的条件下，向该装置提供的扬程为 H_D。如果 D 点所表明的参数能满足工程提出的要求，而又处在泵或风机的高效率(图中 $Q-\eta$ 曲线上的粗实线部分)范围内，这样的安排是恰当的，经济的。管路性能曲线与泵或风机的性能曲线之交点 D 就是泵或风机的工作点。

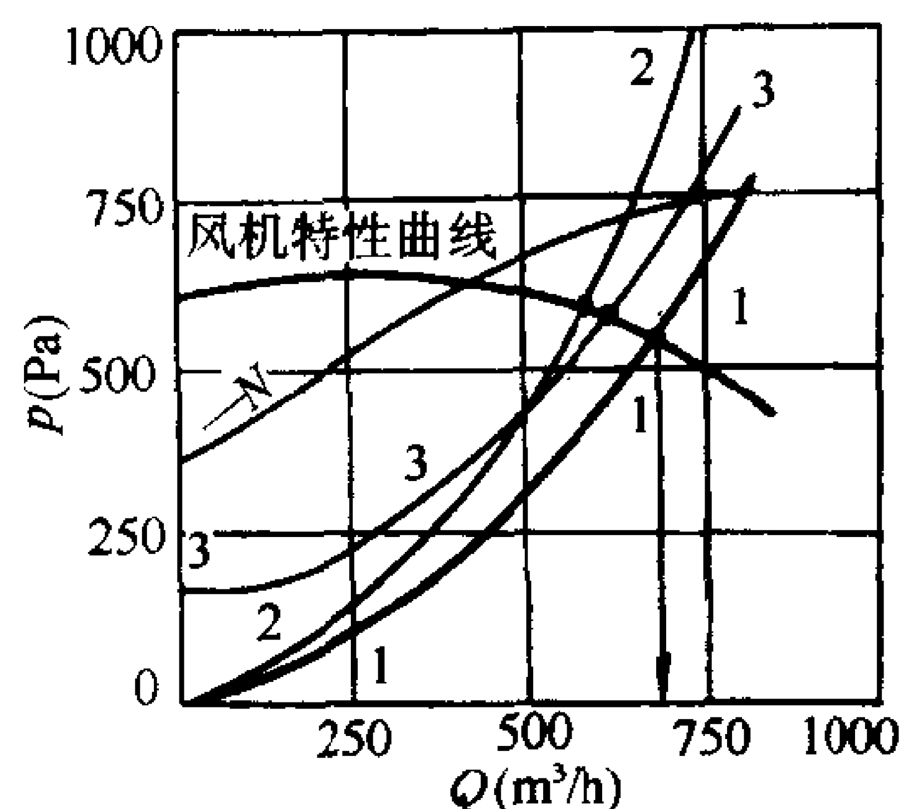


图 12-2 风机工况计算举例
($h=2800$r/min)

此时机器所耗轴功率 N 及效率 η 皆在 D 点的垂直线上。

【例 12-1】 当某管路系统风量为 $500m^3/h$ 时，系统阻力为 300Pa，今预选一个风机的特性曲线如图 12-2 所示。试计算(1) 风机实际工作点；(2) 当系统阻力增加 50% 时的工作点；(3) 当空气送入有正压 150Pa 的密封舱时的工作点。

【解】 (1) 先绘出管网特性曲线。

h_1 或 $p=SQ^2$

$$S=\frac{300}{(500)^2}=0.0012$$

当 $Q=500m^3/h,\ p=300Pa$

$Q=750m^3/h,\ p=675Pa$

$Q=250m^3/h,\ p=75Pa$

由此可以绘出管网特性曲线 1—1。由曲线 1—1 与风机特性曲线交点(工作点)得出，当 $p=550Pa$ 时，$Q=690m^3/h$。

(2) 当阻力增加 50% 时，管网特性曲线将有所改变。

$$S=\frac{300\times1.5}{(500)^2}=0.0018$$

$Q=500\text{m}^3/\text{h}$ 时，$p=450\text{Pa}$

$Q=750\text{m}^3/\text{h}$ 时，$p=1012\text{Pa}$

$Q=250\text{m}^3/\text{h}$ 时，$p=112\text{Pa}$

由此可绘出管网特性曲线 2—2。由曲线 2—2 与风机特性曲线交点得出，当压力为 610Pa 时，$Q=570\text{m}^3/\text{h}$。

(3) 对第一种情况附加正压 150Pa(即管路系统两端压差)

$$p=150+SQ^2$$

$Q=500\text{m}^3/\text{h}$，$p=300+150=450\text{Pa}$

$Q=750\text{m}^3/\text{h}$，$p=150+675=825\text{Pa}$

$Q=250\text{m}^3/\text{h}$，$p=150+75=225\text{Pa}$

按此点作出管网特性曲线 3—3(它相当于 1—1 曲线平移 150Pa)，由它与风机特性曲线的交点得出：当 $p=590\text{Pa}$ 时，$Q=590\text{m}^3/\text{h}$。

此例可看出：当压力增加 50%时，风量减少$\dfrac{690-570}{690}\times100=17\%$，即压力急剧增加，风机风量相应降低，但不与压力增加成比例。因此，当管网计算压力与实际应耗压力存在某些偏差时，对实际风量的影响并不突出。

此例的计算结果风量均不能等于所要求的 $Q=500\text{m}^3/\text{h}$。由此：

当风机供给的风量不能符合实际要求时，可采取以下三种方法进行调整：

(一) 减少或增加管网的阻力(压力)损失(图 12-3(*a*))

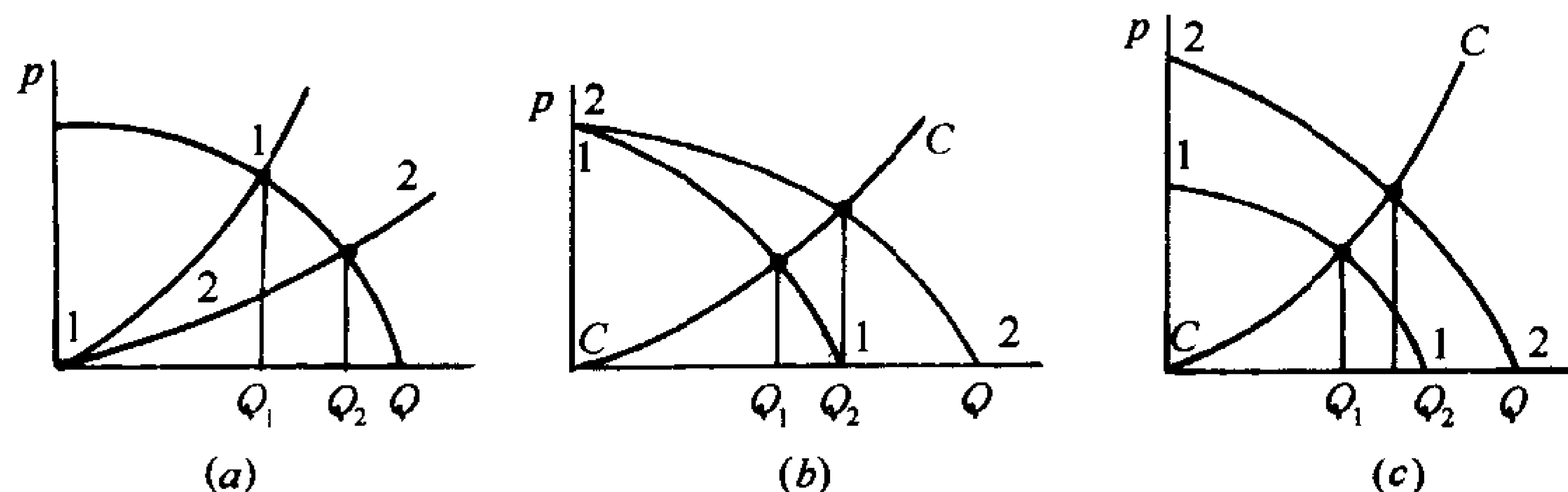


图 12-3 风机工作的调整

增大管网管径或缩小管网管径(有时不得已要关小阀门)，使管网特性改变，例如曲线 1—1，由阻力降低而变为 2—2，风量因而由 Q_1 增加到 Q_2。

(二) 更换风机(图 12-3*b*)

这时管网特性没有变化，用适合于所需风量的另一风机(2—2)代替原预选的风机(1—1)，以满足风量 Q_2。

(三) 改变风机转数(图 12-3*c*)

改变风机转数，以改变风机特性曲线由(1—1)变为(2—2)。改变转数的方法很多，例如用变速电机，改变供电频率，改变皮带轮的传动转数比，采用水力联轴器等(详见第三节)。

三、泵或风机在管路运行的稳定工作条件

泵或风机能够在 D 点运转，是因为 D 点表示的机器输出流量刚好等于管道系统所需要的流量，同时，机器所提供的压头或扬程恰好满足管道在该流量下之所需，(见图12-1)。

假如泵或风机在比 D 点流量大的“1”点处运行，显然，此时，机器所提供的压头就小于管路之所需，于是，流体因能量不足而减速，流量减小，工作点“1”沿机器性能曲线向 D 点移

动。反之,如在比 D 点流量小的"2"点运行,则机器所提供的压头就大于管路需要,造成流体能量过盈而加速,于是流量增大,2 点向 D 点靠近,可见 D 点是稳定工作点。

有些低比转数泵或风机的性能曲线呈驼峰形,如图 12-4a、b 所示。这样的机器性能曲线有可能与管道性能曲线有两个交点,K 和D。D 点如上所述为稳定工作点,而 K 点则为不稳定工作点。

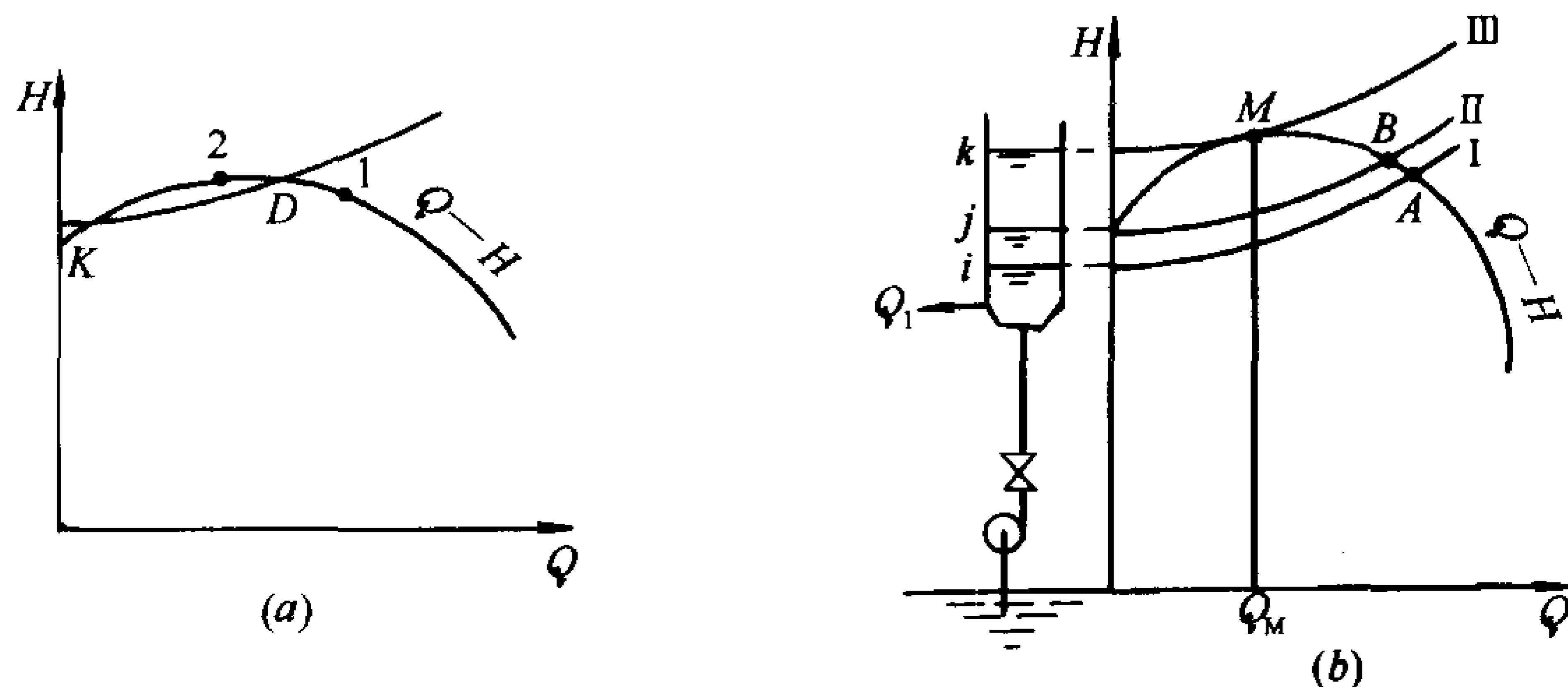


图 12-4　性能曲线呈驼峰形的运行工况

(a)泵的不稳定工况;(b)泵向水池供水时的不稳定工况

当泵或风机的工况(指流量、扬程等)受机器振动和电压波动而引起转速变化的干扰时,就会离开 K 点。此时,K 点如向流量增大方向偏离,则机器所提供的扬程就大于管道所需的消耗水头,于是管路中流速加大,流量增加,则工况点沿机器性能曲线继续向流量增大的方向移动,直至 D 点为止。当 K 点向流量减小方向偏离时,K 点就会继续向流量减小的方向移动,直至流量等于零为止。此刻,如吸水管上未装底阀或止回阀时,流体将发生倒流。由此可见,工况点在 K 处是暂时平衡,一旦离开 K 点,便难于再返回到原点 K 了,故称 K 点为不稳定工作点。

工况稳定与否可用下式判断:

如两条性能曲线在某交点的斜率有:

$$\frac{\mathrm{d}H_{管}}{\mathrm{d}Q} > \frac{\mathrm{d}H_{机}}{\mathrm{d}Q}$$

则此点为稳定工况点,反之,为不稳定工况点。

从图 12-4b 所示,具有驼峰特性的泵在系统中运转。这时泵的性能曲线与管路性能曲线可能相交于两点,致发生了不正常的运转。泵向水池送水,而水池又向用户供水,如果泵的流量 Q 大于用户用水量 Q_1,则水池水面逐渐升高。假如水泵开始运转时水池水面高度为 i,管路性能曲线为Ⅰ,一旦水泵流量 Q_A 大于 Q_1,则水池水面就升高,与此同时,管道性能曲线也就向上平移。当水面上升到 K 点时,管道性能曲线已移至Ⅲ,此时它与泵的性能曲线相切于 M 点。如此时泵的流量 Q_M 仍大于 Q_1,则水池中水面就继续升高,管道性能曲线就与泵的性能曲线脱离了。于是泵的流量立刻自 Q_M 突变为零。则水池水面开始下降,管道性能曲线重新与泵的性能曲线相交于两点,但因此刻泵的流量等于零,泵的工况停留在性能曲线的左端。泵的扬程低于管道所需,故泵仍不能将水送入水池,直到水池中水面降低 j 时,泵才可能开始送水。此时管路性能曲线为Ⅱ,流量为 Q_B,以后水池中水面又上升,重复上述过程。

与此类同,当一台风机向压力容器(或较密闭的房间)或容量甚大的管道送风时,亦可能发生此种不稳定运行。

由此可见,泵或风机具有驼峰形性能曲线是产生不稳定运行的内在因素。但是否产生不稳定还要看管路性能——它是外在因素。

大多数泵或风机的特性都具有平缓下降的曲线,当少数曲线有驼峰时,则工作点应选在曲线的下降段,故通常的运转工况是稳定的。

第二节 泵或风机的联合工作

在实际工程中,有时需将两台或多台的泵或风机并联或串联在一个共同管路系统中联合工作,目的在于增加系统中的流量或压头。

联合工作的方式,可分为并联或串联,联合运行的工况需根据联合运行的机器总性能曲线与管路性能曲线确定。

一、并联运行

当系统中要求的流量很大,用一台泵或风机其流量不够时,或需靠增开或停开并联台数以实现大幅度调节流量时,宜采用并联运行。

图 12-5*a* 表示两台风机 F_1 与 F_2(两台型号、转数宜相同,但也可不同)并联安装的简图。

两机各自的性能曲线由 F_1A_1 及 F_2A_2 示于图 12-5*b* 上。

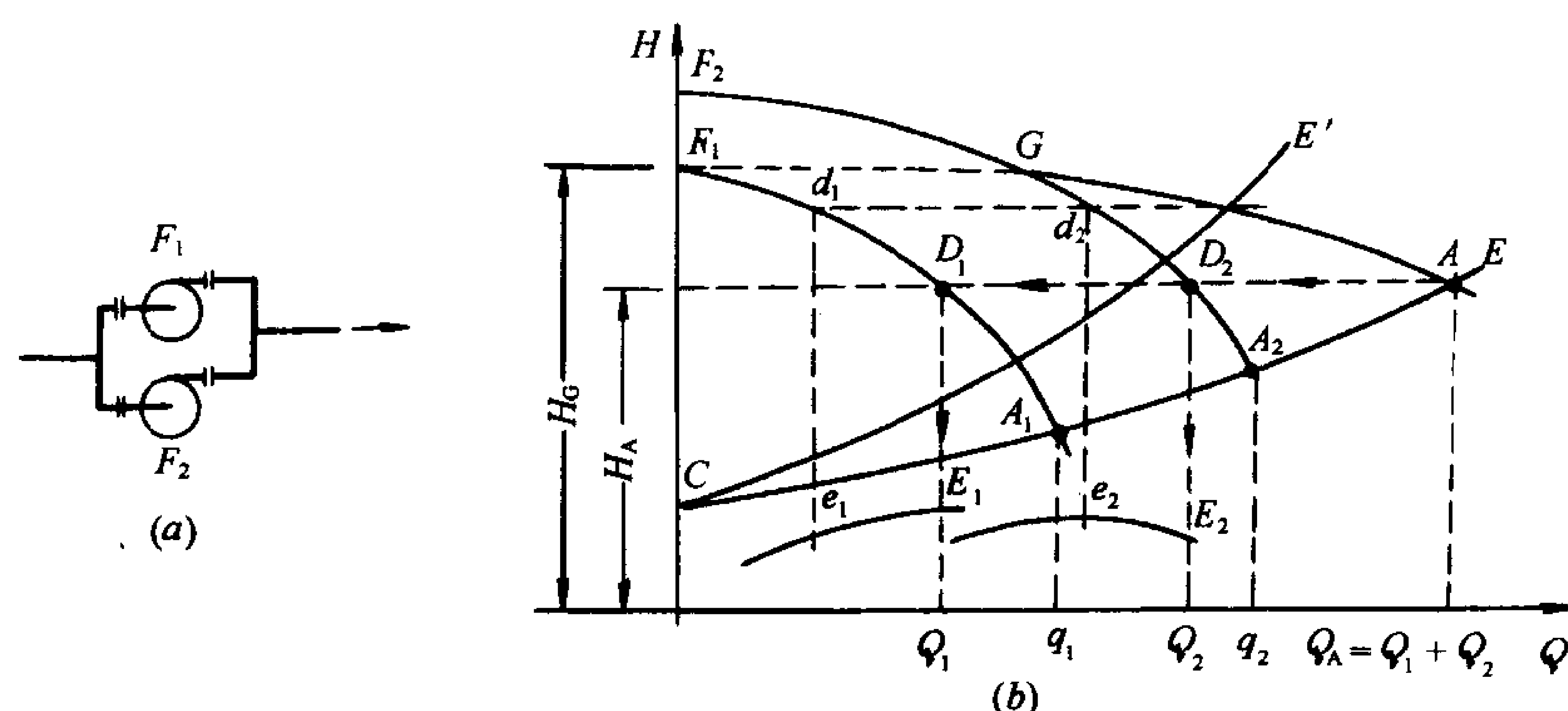


图 12-5 风机的并联运行

(*a*)并联风机的安装示意图;(*b*)并联风机的 $Q—H$ 曲线与工况分析

这时两台机吸入口与压出口均处在相同的压头下运行,而且在总管中的流量,则为两机流量之和即"合二为一"。于是并联泵或风机的总性能曲线,是由同一压力下的各机流量叠加而得。具体做法是:在性能图上先绘出一系列水平虚线,这就是一系列等压线,然后,在每根水平线(如 $D_1—D_2$ 线)上,将与各单机性能曲线交点所对应的流量相加(如 Q_1+Q_2)便找到了两机并联总性能曲线上的一点 A。如此类推,便可绘出两机并联工作的总性能曲线,如图中的 GA 线。这条曲线左端终于 G 点的原因是,第一台机所能提供的最大压头不能大于 H_G,如需压头再高它就帮不上忙了。

现在进行工况分析

从图 12-5*b* 可看出:CE 为管路曲线,它与机器联合总性能曲线的交点 A,就是并联运行的工作点,其流量为 Q_A,压头为 H_A,它代表联合运行的最终效果;过 A 点做水平虚线与各机性能曲线交于D_1 和 D_2,它们代表参加联合运行时每台机所"贡献"的工况,各自所提供的流量是 Q_1 与 Q_2,各自所供压头皆为 H_A。

如果对此管路系统关掉其余各台机只以单机运行，例如只开 F_1 机运行，则与管道性能曲线 CE 交点 A_1 即为此工作点，正是由于单机运行的工作点 A_1 所提供的流量 q_1 与压头 H_1 均不能满足系统的要求(点 A 所对应的)流量，才需要另一台机 F_2 加入并联运行。

通过对此三种工况点(1. 联合运行总效果点 A；2. 参加联合运行时每台机的"贡献"点 D_1 和 D_2；3. 不联合只开某一单机的 A_1 或 A_2)的分析，读者便可自行得出下述结论：

1. 由图看出，$q_1>Q_1$，$q_2>Q_2$，而 $Q_1+Q_2=Q_A$，也就是 $Q_A<q_1+q_2$。所以两机并联运行时均未发挥出单机的能力，并联总流量小于两单机单独运行的流量和。说明两机并联都受到了"需共同压头"的制约。一般说来，两机并联增加流量的效果，只有在管路压头损失小(即管路曲线较平坦)的系统才明显。

2. 由图中可以看出，两台风机分别单独运行时所提供的流量都小于联合运行的流量 Q_A。同时也可以看出单机运行的压头均低于联合运行的压力值 H_A。这种压头差值是由于并联运行的流量增大后，增加了流动损失所引起的。

3. 并联运行是否经济合理，要通过研究各机效率而定。例如图 12-5*b* 中绘有两台机的效率曲线。当管路性能曲线为 CE 时，两机联合下各机工作点 D_1 与 D_2 所对应的效率为 E_1 与 E_2。这时风机 F_1 处于最高效率 E_1 下工作，而另一风机 F_2 则不在最高效率下运行。如管路性能曲线改为 CE' 时，风机 F_1 的工作点 d_1 所对应的效率 e_1 低于其最高效率，而风机 F_2 则在最高效率 e_2 下工作。

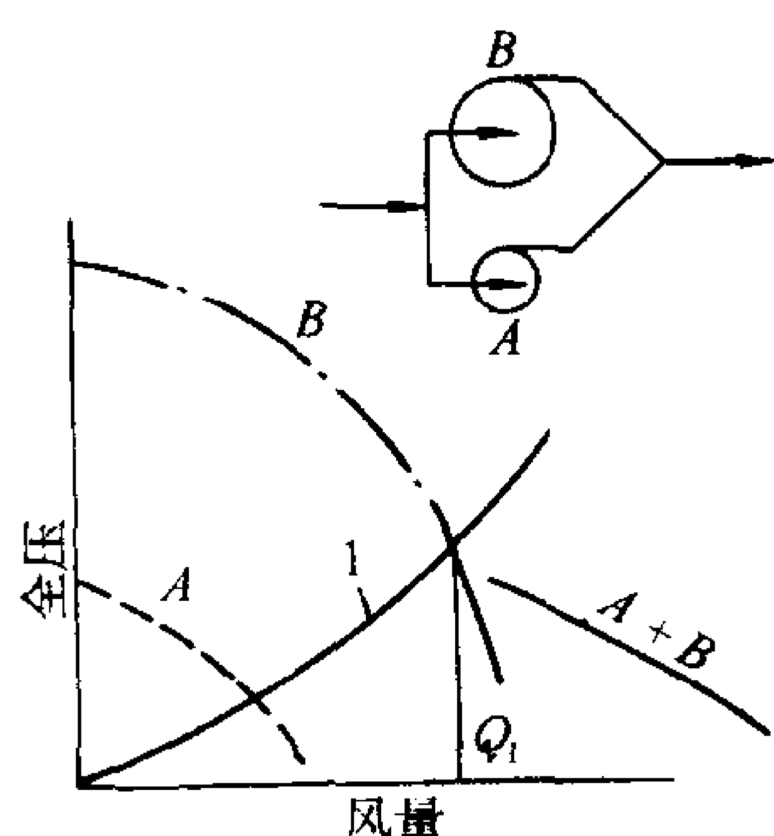


图 12-6 两台型号不同风机的并联

4. 两台性能曲线不同的泵或风机并联运行的特殊情况(图 12-6)。

这里以风机为例。两台不同型号或转数的风机 A 与 B，并联的总性能曲线为 $A+B$，不料，管路性能曲线 1，不与曲线 $A+B$ 相交而是与单台风机 B 曲线相交，在此特殊情况下，并联后的流量可能并不增加。甚至还可能通过 A 风机发生倒流，使总流量反而小于 B 风机单独运行的情况。

综上所述，通过机器并联以增加管网流量或通过开、停并联机器台数跳跃式地调节管网流量的作法，对管路曲线较平坦的系统最有利，一般情况下应少用并联运行，但目前空调冷、热水系统中，多台水泵并联已广为采用，此时，宜采用相同型号及转数的水泵。

二、串联运行

当管路性能曲线较陡，单机不能提供所需的压头时，就应再串一台，以增加压头或扬程。这时，第一台的出口与第二台机的吸入口相连接，如图 12-7*a*。

两台机串联运行时，联合性能曲线是在同一流量下进行各单机的扬程或全压叠加而成，见图 12-7*b*。图中 A 为串联后的工作点；D_1 和 D_2 是参加串联运行时各机的工作点；A_1 与 A_2 为不联合单开某一机的工作点。

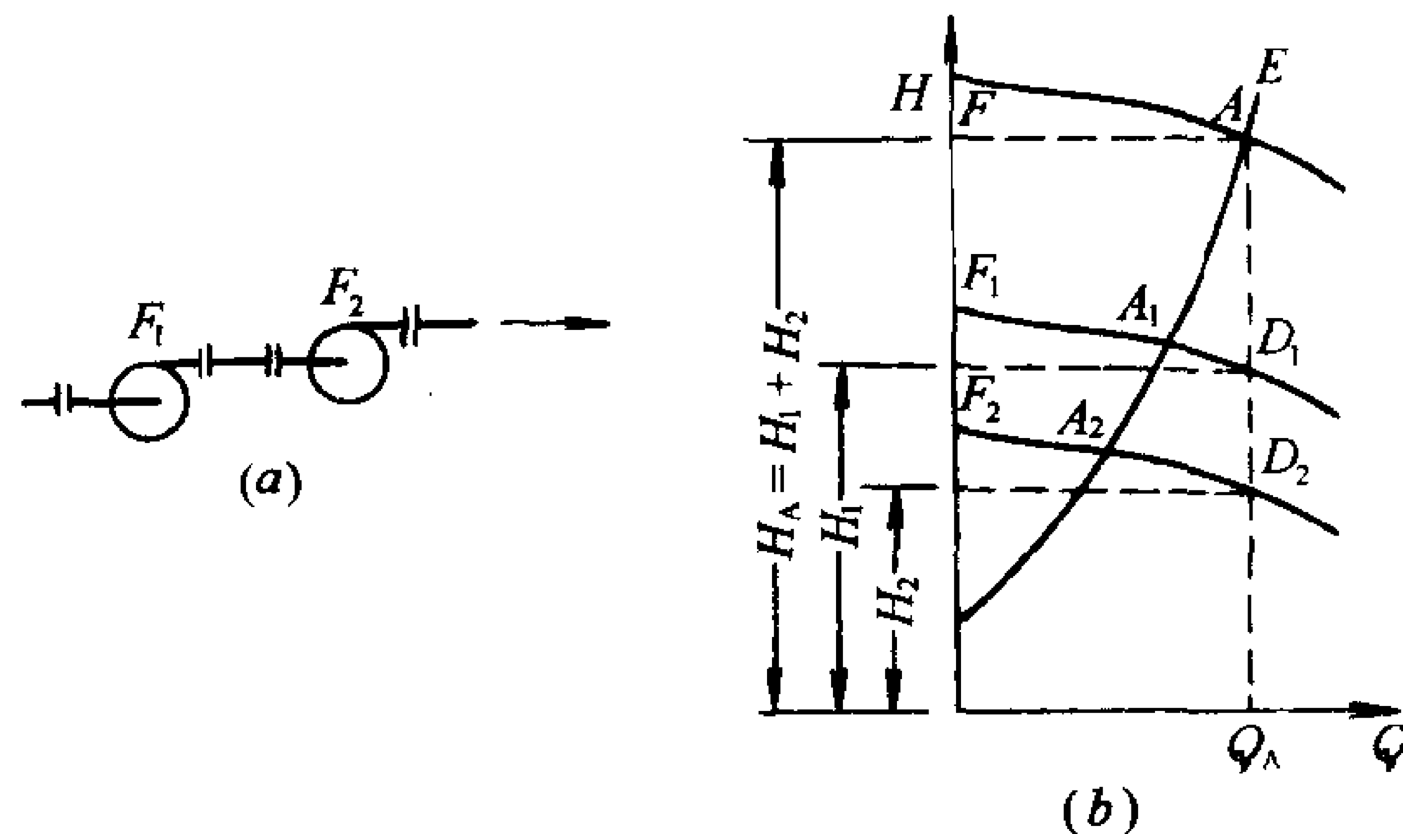


图 12-7 泵或风机的串联运行
(*a*)串联运行设备的安装简图；(*b*)串联运行的工况分析

读者可用类似前述的方法自行分析其三种工况。

此外，风机与自然抽力也可按串联工作的方法进行工况分析。自然抽力通常是指“热压”。它在给定条件下，风量越大，空气被加热程度越低，抽力也越小。

这里介绍一下两台性能曲线不同的风机串联的特殊情况：

A 和 B 是两台不同风机各自的性能曲线。当管路性能曲线 1 不与 $A+B$ 联合曲线相交时（图 12-8），会发生串联后的全压，或者与单台相同，或者还小于单台风机，同时风量也有所减少，功率消耗却增加。

再有，从图 12-9 看出，单机性能曲线分别为 A_1B_1 与 A_2B_2，第一台机的最大扬程为 H_{10}，第二台为 H_{20}，管路性能曲线表示出 C 点所需扬程为 H_1，这里 $H_1>H_{10}>H_{20}$，所以任何单机单独运行都不能满足管路装置对扬程的需要，势必进行串联工作。

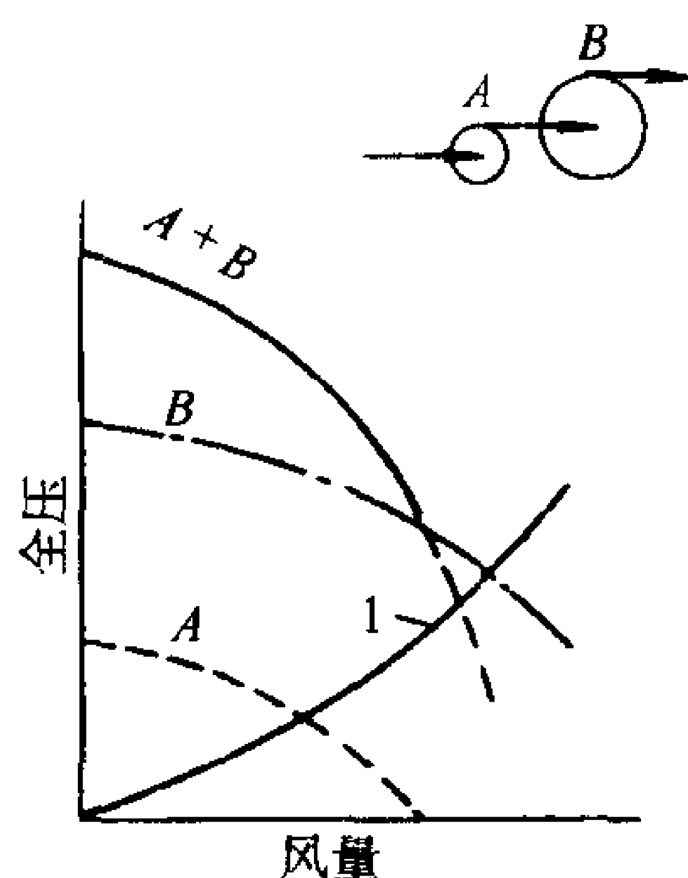


图 12-8　两台型号不同风机的串联

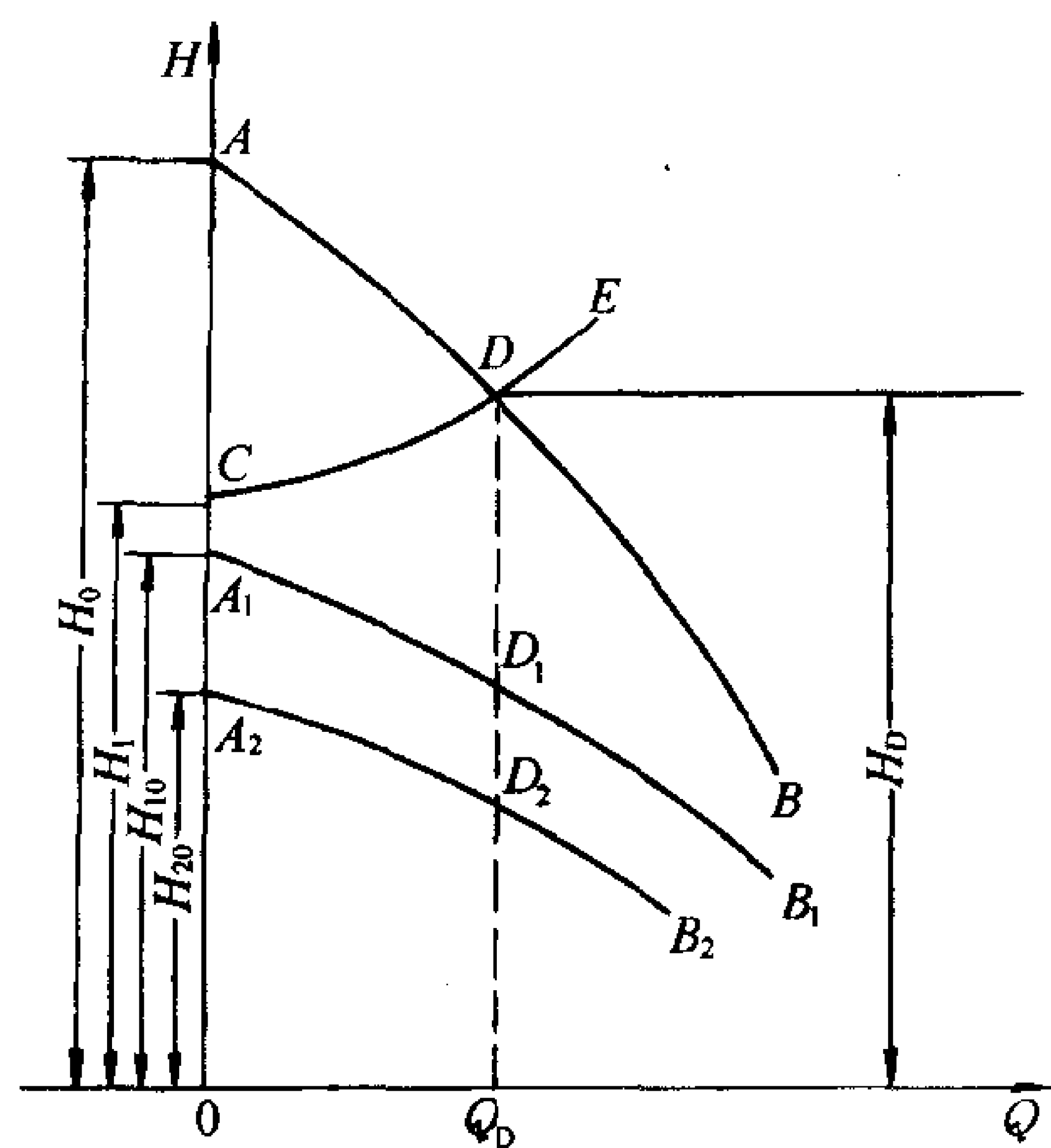


图 12-9　两台性能曲线不相同的泵或风机串联运行

由此可见，只有当管路系统中流量小，而阻力大的情况下，多机串联才是合理的，同时，要尽可能采用性能曲线相同的泵或风机进行串联。

一般说来，设备联合运行要比单机运行效果差，工况复杂，分析麻烦。

第三节　离心式泵或风机的工况调节

在实际工程中，随着外界的需求，泵与风机都要经常进行流量调节。

前已述及，泵或风机在管网中工作，其工作点是泵或风机的性能曲线与管路性能曲线的交点。要改变这个工作点，就应从改变机器性能曲线或改变管路性能曲线这两个途径着手。

一、改变管路性能曲线的调节方法

在泵或风机转数不变的情况下，只调节管路阀门开度（节流），人为地改变管路性能曲线。

（一）压出管上阀门节流

利用开大或关小泵或风机压出管上阀门开度，从而改变管路的阻抗系数 S（参见 12-1-2 式），使管路性能曲线改变，以达到调节流量的目的，此种调节方法十分简单，故应用甚广，但因它是靠改变阀门阻力（即增、减管网阻力）来改变流量的。当拟减小流量时，就需额外增加

阻力，故不太节能。

为估算这一节流损失，下面分析一下阀门全开和关到某一开度时的两种情况。

当阀门全开时，其管路性能曲线为 H'_c(图 12-10)，设此时管路阻抗系数为 S_1，流量 Q_1 最大，则管路阻力损失最小为 $S_1Q_1^2$，工作点为 D；

当阀门关至某一开度时，则管路曲线由 H'_c 变为 H''_c，此时管路阻抗系数为 S_2，流量减至 Q_2，工作点由 $D \to D'$，阻力损失为 $S_2Q_2^2$，而该流量 Q_2 对应于原管路的损失才为 $S_1Q_2^2$，其余部分 $(S_2-S_1)Q_2^2$ 为节流的额外压头损失。图 12-10 中 1 区为原管路阻力损失部分；2 区为节流损失部分；3 区为节流所带来泵或风机的效率下降损失部分。

（二）吸入管上阀门节流

当关小风机吸入管上阀门时，不仅使管路性能曲线由原来的 CE 改变为 CE'(图 12-11)，实际上也改变了风机的性能曲线，由 AB 变为 AB'。因为当吸入阀关小时，风机入口气体的压强也降低，相应的气体密度 ρ 就变小，其风机性能曲线也发生相应的改变，于是节流后的工作点由原 D 移至 D'点上，其节流的额外压头损失也相应减小，所以比压出端节流有利。

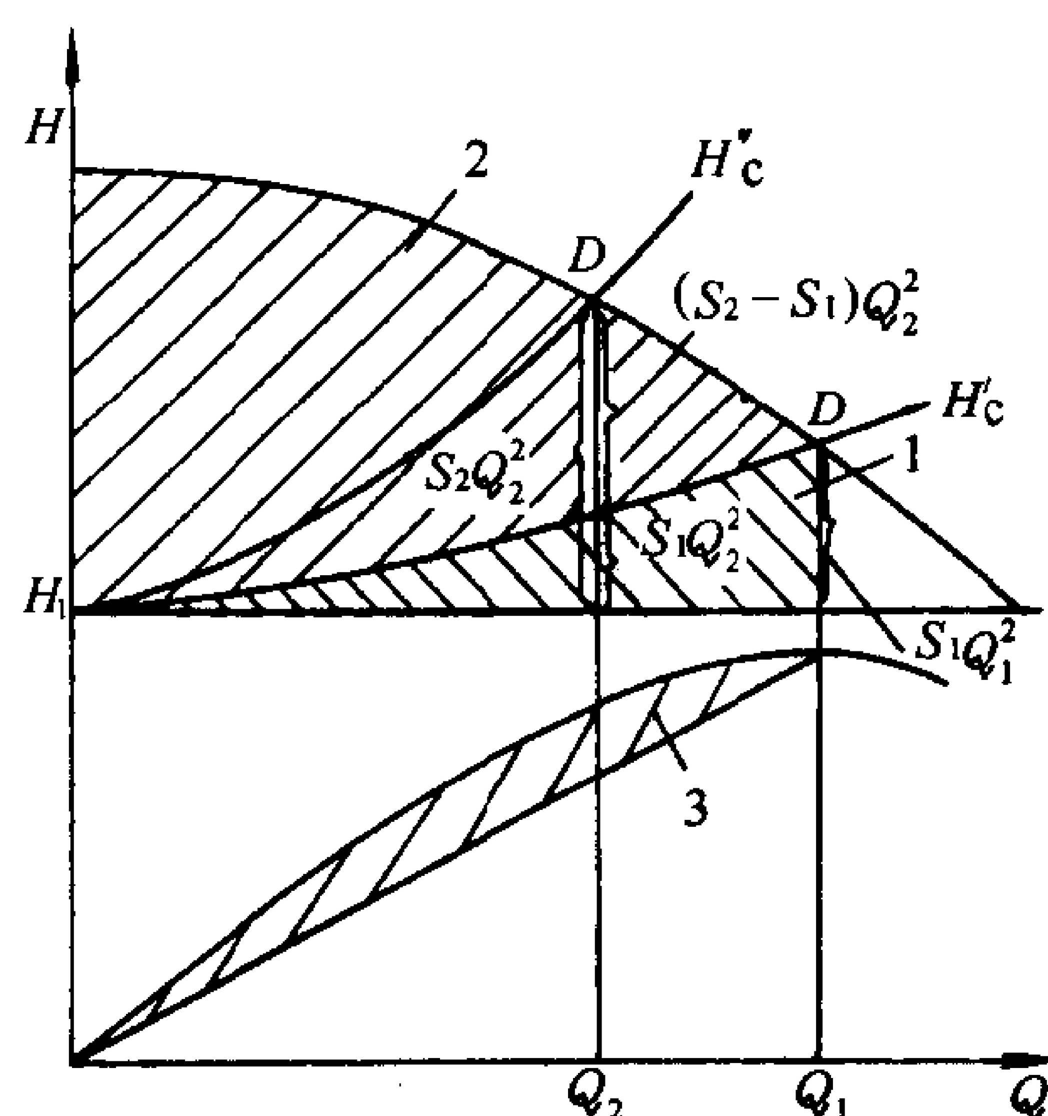


图 12-10 节流法调节流量

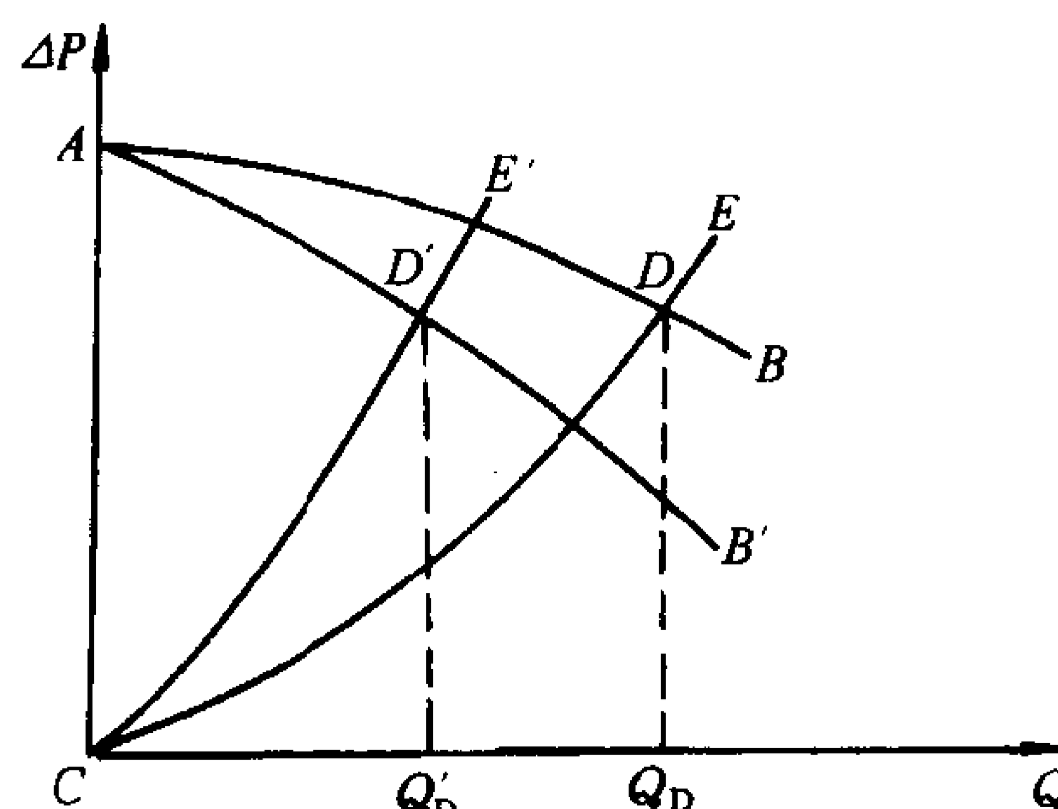


图 12-11 吸风管路中的调节阀及调节工况

应当注意，对于水泵，通常只能采用压出端节流，因为调节阀装在吸水管上，会使泵吸入口真空度增大，易引起气蚀(详见第十三章)。

除节流法外，在某些化工厂还采用吸池液位变化的自动调节流量法，这相当于管路曲线平移，使泵的运转工作点改变。

二、改变泵或风机性能曲线的调节法

由于空调事业的发展带来能耗剧增，为节约其能耗，各种变流量的泵或风机及变风量系统(VAV)和变水量系统(VWV)等相继问世。它们大多是在管路及阀门都不作任何改变即管路性能曲线不变的条件下，来调节泵或风机的性能曲线。所采用的方法有：改变泵或风机转数；改变风机进口导流阀的叶片角度；切削泵的叶轮外径及改变风机的叶片宽度和角度等。

（一）改变泵或风机的转数

由相似律可知，当改变泵或风机转数 n 时其效率基本不变，但流量、压头及功率都按下式改变：

$$\frac{Q}{Q_m}=\sqrt{\frac{H}{H_m}}=\sqrt[3]{\frac{N}{N_m}}=\frac{n}{n_m}$$

按此公式可将泵或风机在某一转速下的性能曲线换算成另一转速下的新的性能曲线。它与不变的管路性能曲线 CE 的交点即工作点由 A 变至 D 点，则泵或风机的流量由 Q_A 变至 Q_D(如图 12-12)。

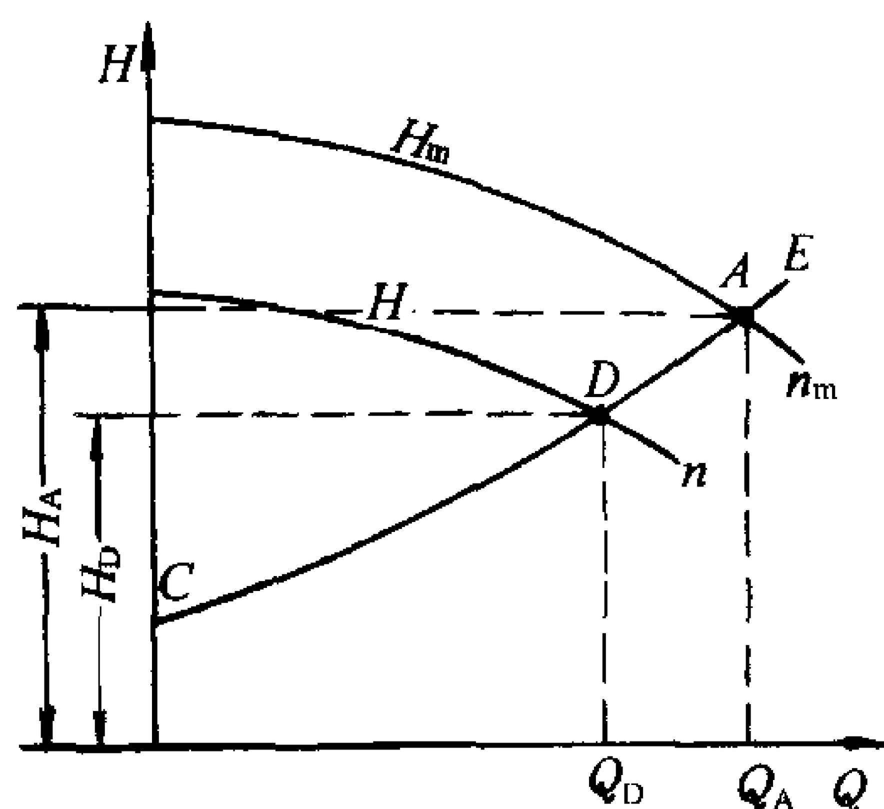


图 12-12　改变泵或风机性能调节方法的分析

注意：采用变速法时，应验算泵或风机是否超过最高允许转数和电机是否过载。

改变泵或风机转数的方法，本书推荐如下几种：

1. 改变电机转数

由电工学可知，异步电机的理论转数 n(r/min)为

$$n=\frac{60f}{P}(1-s)$$

式中　f——为交流电频率(Hz)；我国电网 $f=50$(Hz)。

P——为电机磁极对(数)；

s——电机转差率(其值甚小，一般异步电机在 0～0.1 之间)。

从上式看出，改变转速可从改变 P 或 f 着手，因而产生了如下常用的电机调速法：

(1) 采用可变磁极对(数)的双速电机

此种电机有两种磁极数，通过变速电气开关，可方便的进行改变极数运行，它的调速范围目前只有两级，故调速是跳跃式的(即从 3000 跳至 1500，1500 跳至 1000 或由 1000 跳至 750r/min)。

(2) 变频调速

变频调速是 80 年代的卓越科技成果。它是通过均匀改变电机定子供电频率 f 达到平滑地改变电机的同步转速的。只要在电机的供电线路上跨接变频调速器即可按用户所需的某一控制参量(如流量、压力或温度等)的变化自动地调整频率及定子供电电压，实现电机无级调速。不仅如此，它还可以通过逐渐上升频率和电压，使电机转速逐渐升高(电机的这种启动方式叫软启动)，当泵或风机达到设定的流量或压力时就自动地稳定转速而旋转，又可使机器在超过市电频率下运转，从而提高机器的出力(即小马拉大车)。目前国内用于泵或风机调速的 XBT 系列变频调速电气控制柜已成批生产。

此外，采用可控硅调压实现电机多级调速装置，如上海产的 ZN 系列智能控制柜及适用于大中型机器的带内反馈晶闸管串级调速的 NTYR 系列三相异步电机进行无级调速。

2. 其它变速调节方法：有调换皮带轮变速，齿轮箱变速及水力偶合器变速等。

泵或风机变转数调节方法，不仅调节性能范围宽，而且并不产生其它调节方法所带来的附加能量损失，是一种调节经济性最好的方法。

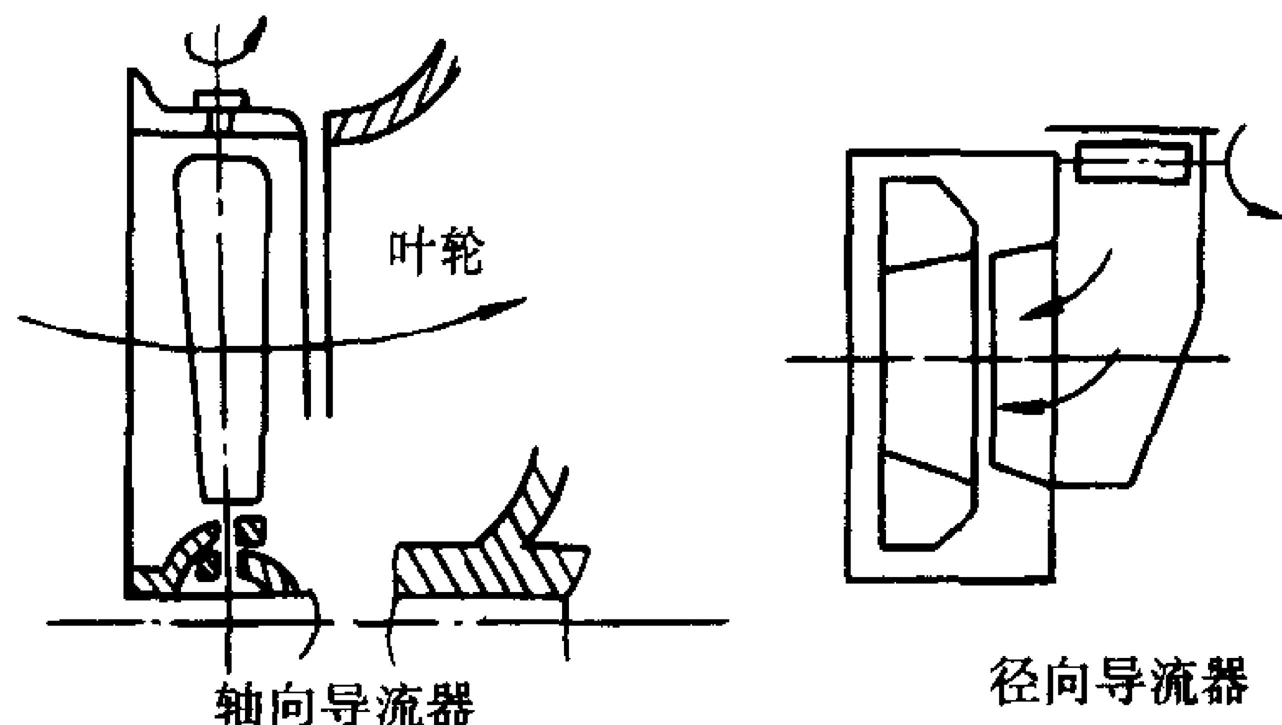


图 12-13　供调节用的进入导流叶片

(二) 改变风机进口导流叶片角度

在风机进口处装导流器又称风机启动多叶调节阀，它有轴向和径向两种。如图 12-13。

当改变导流叶片角度时，能使风机本身的性能曲线改变。这是由于导流片使气流预旋改变了进入叶轮的气流方向所致。

由于导流器的结构简单，使用方便，其调节

效率虽比改变转数差,但又比单纯改变管路性能曲线好,是风机常用的调节法。目前导流器已有标准图,有些风机出厂时就附有此阀,有时则由设计者按风机入口直径选装。

鉴于导流叶片既是风机的组成部分,又是管路上的调节阀,因此,它的转动既改变了风机性能曲线,同时又改变了管路性能曲线,因而调节性能灵活。

图 12-14 为采用导流器调节法的特性曲线图,当风机导流叶片角度为 0°,(相当于未装导流器,风机在设计流量下工作)30°,60°时,风机性能曲线和管路性能曲线均有三条,其工作点分别为 1,2,3。

调节导流叶片角度而减少风量时,通风机功率沿着 1′,2′,3′下降。如不装导流器(风机曲线为 0°线),只靠前述的管网节流来使风量减小到 Q_2 和 Q_3 时,则风机功率是沿着叶片角度为 0°的功率曲线由 1′向,2″,3″移动,所以用导流器调节,比单用管路节流阀调节所消耗功率小,是一种比较经济的调节方法。值得推广。

(三) 切削水泵叶轮调节其性能曲线

切削叶轮直径是离心泵的一种独特调节方法。叶轮直径切小后,叶轮出口处参数的变化对泵性能的影响,可由前述公式 $H_T=\frac{u_2^2}{g}-\frac{u_2}{g}\cdot\frac{Q_T}{F_2}\text{ctg}\beta_2$ 看出,当 D_2 减小时如转数不变 u_2 要减小,使性能曲线下降,以达到调节流量的目的(见图 12-15)。

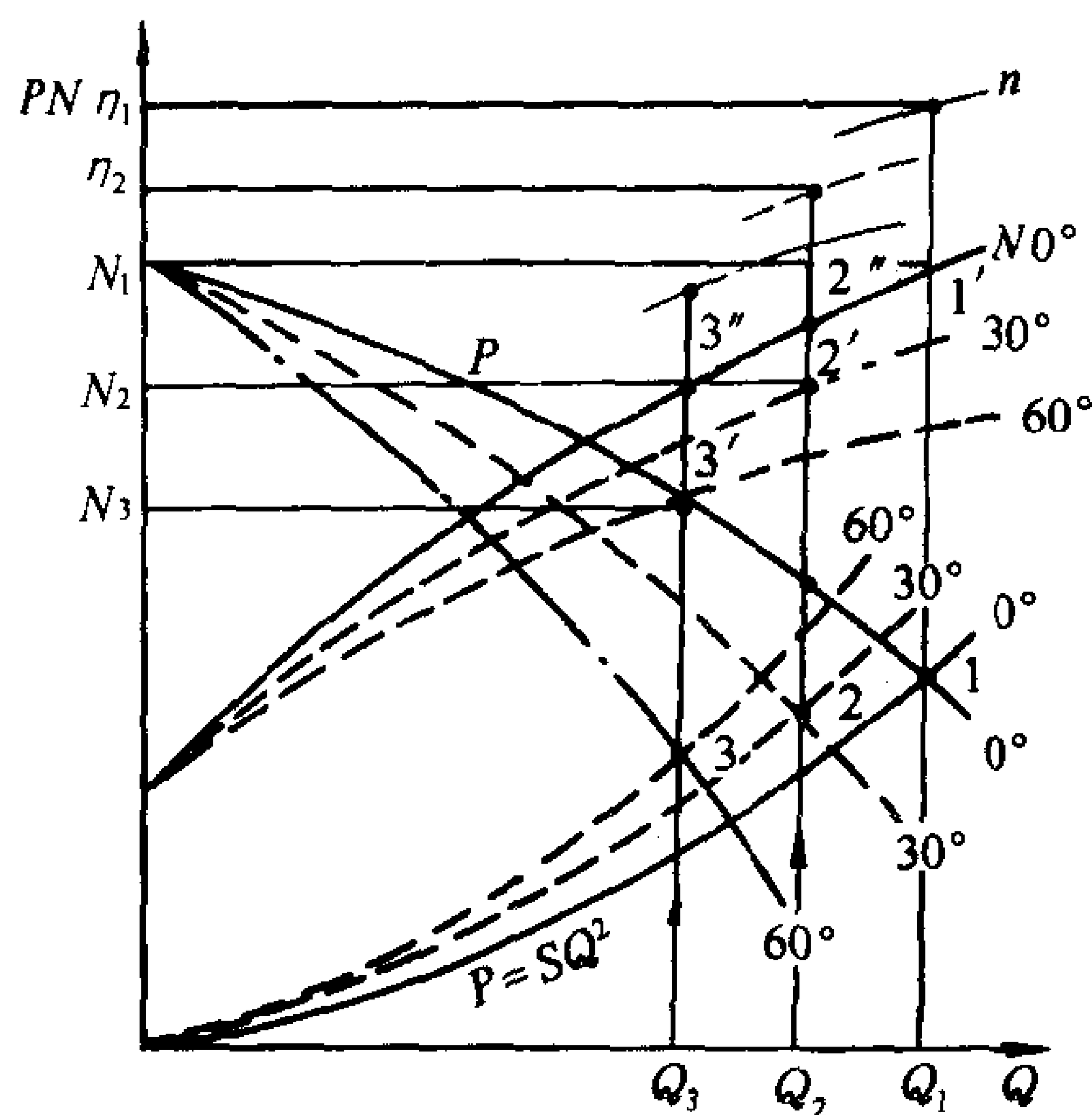


图 12-14 导流器调节特性曲线图

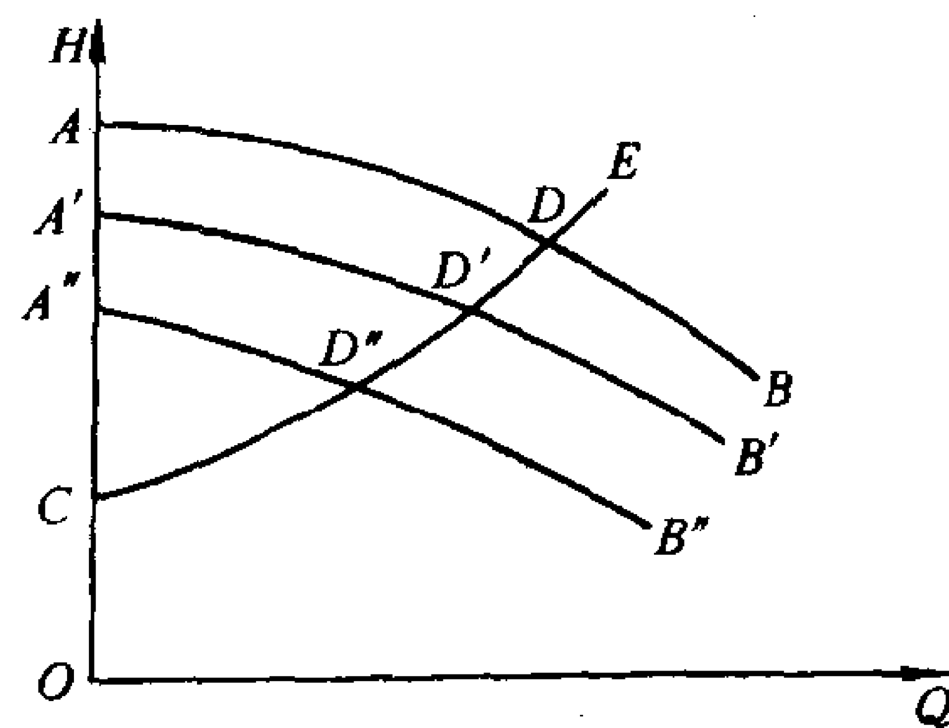


图 12-15 车削叶轮的调节方法

当叶轮车小后,与原叶轮并不相似了。因为叶轮直径与叶轮宽度之比及出口安装角 β_2 都变了,所以前述的相似叶轮关系,就只能免强近似采用。

一般按经验公式进行换算,根据我国博山水泵厂的经验,建议按下式进行计算

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{D_2'F_2'}{D_2F_2} \tag{12-3-1}$$

$$\frac{H'}{H}=\left(\frac{D'^2}{D_2}\right)^2\cdot\frac{\text{ctg}\beta_2'}{\text{ctg}\beta_2} \tag{12-3-2}$$

$$\frac{N'}{N}=\left(\frac{D_2'}{D_2}\right)^3\cdot\frac{F_2'}{F_2}\cdot\frac{\text{ctg}\beta_2'}{\text{ctg}\beta_2} \tag{12-3-3}$$

式中 Q',H'——叶轮车削后的流量,扬程;

D'_2, F'_2, β'_2——分别为叶轮切削后的外径,出口过流面积和叶片出口安装角。

实践证明,如果切削量不大,则切削后的泵与原泵在效率方面近似相等,故上三式可不考虑 F_2 与 β_2 的修正,仅取直径比进行换算。

通常水泵厂对同一型号的泵除提供标准叶轮外,还提供二、三种不同直径的叶轮供用户选用。例如 2BA-6 型泵的标准轮径为 162mm;第一次切削后轮径为 148mm(称为 2BA-6A 型);第二次切削后为 132mm(称为 2BA-6B 型),它们的性能曲线分别如图 12-15 中的 AB, $A'B'$和 $A''B''$。

当切削量太大时,则泵的效率明显下降。通常叶轮的切削量与其比转数 n_s 有关,见表 12-1。

叶轮最大切削量与比转数 n_s 的关系表 **表 12-1**

n_s	60	120	200	300	350
$\frac{D_0 - D'_2}{D_2}$	0.2	0.15	0.11	0.09	0.01

切削叶轮降低流量的节电改造实例

上海国际饭店空调水系统如图 12-16。

此系统运行中发现,即使在供冷达到满负荷甚至超负荷时,水泵的扬程低于设计选用值,在供暖运行时此现象更为突出。根据水泵性能曲线的一般形状,可知随着流量增加扬程要逐渐减小。此现象反映,空调水系统的循环水量供大于求,水泵运行效率下降和耗电量增加,需改造水泵。第一步将原有水泵叶轮车小,以降低水泵扬程;第二步调换水泵(参见图 12-17 及表 12-2)。

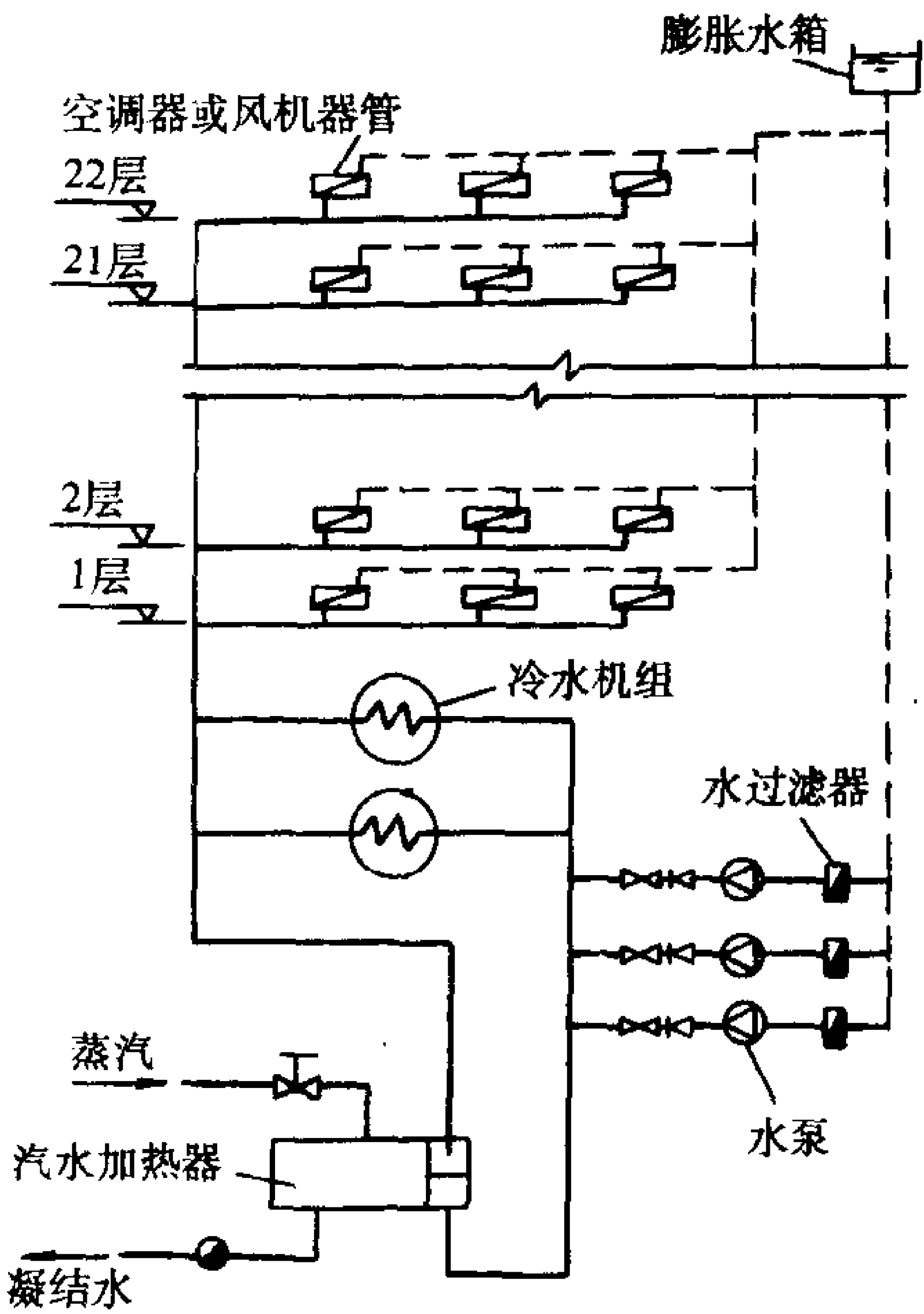


图 12-16 空调水系统基本流程图

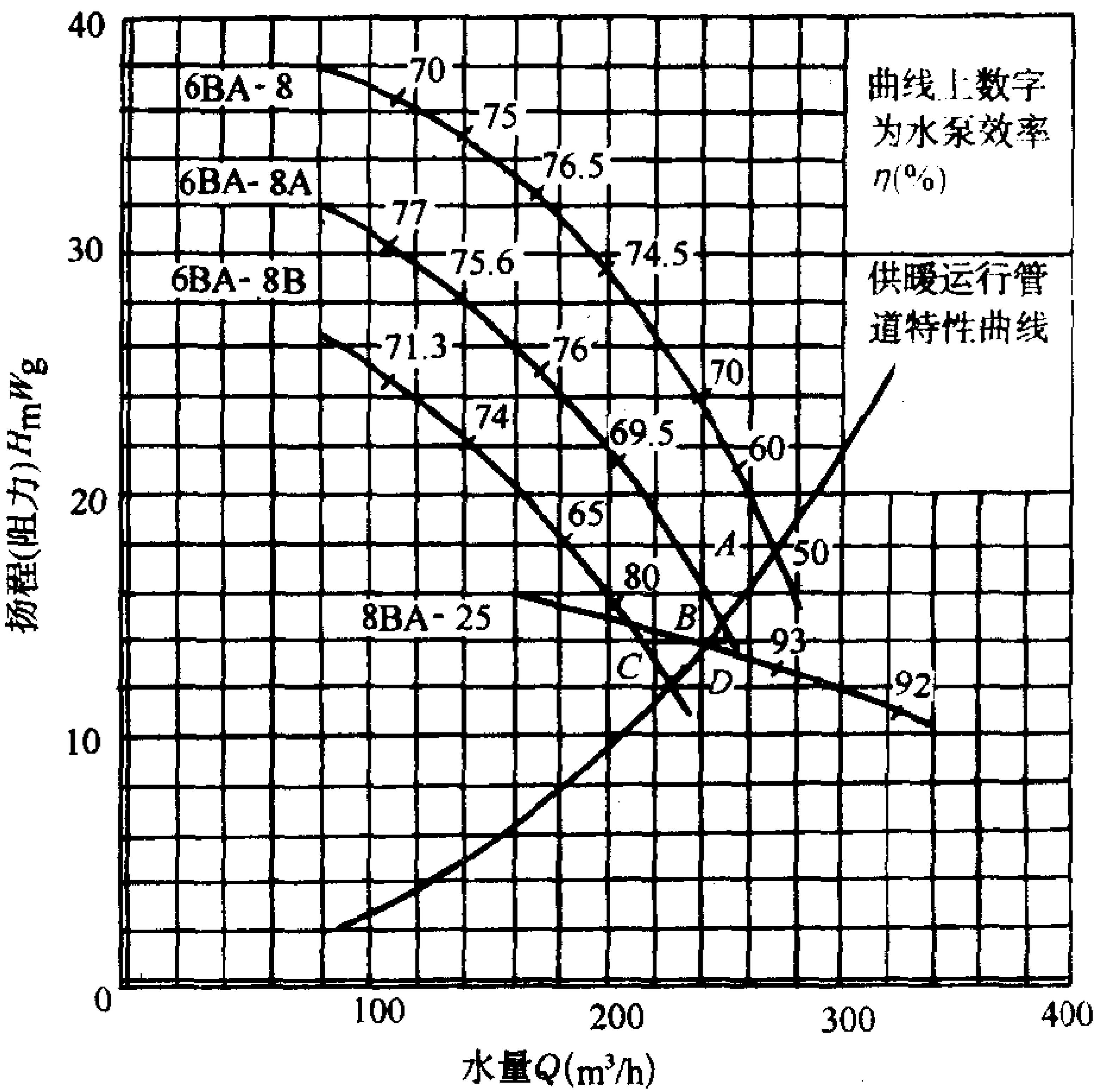


图 12-17 水泵运行状态分析图

水泵测定和计算数据　　表 12-2

水泵型号	运行工作点	水泵测定数据			水泵推算数据				备注
		进口压力(kPa)	出口压力(kPa)	电机电流(A)	扬程(kPa)	流量(m^3/h)	效率 η(%)	轴功率(kW)	
6BA-8					325	170	76.5	19.7	水泵最高效率点
6BA-8	A	681	859	49.5	178	275	50	26.7	
6BA-8A	B	686	835	40	149	240	47	20.7	
6BA-8B	C	700	820	35	120	225	45	16.3	
8BA-25	D	691	829	22	138	245	81	11.0	

注：压力测量用 0.4 级，量程 0～1.6MPa，分度 0.1MPa 精密压力表。

原选的水泵 6BA-8 型，其运行的工作点为 A，其扬程是 178kPa，流量是 275m^3/h，效率 η 约为 50%，实测输入电机电流为 49.5A。而从样本曲线查出，该水泵在最高效率点（η = 76.5%）时，相应的扬程为 325kPa，流量为 170m^3/h。

当水泵叶轮车小到相当于 6BA-8A 水泵时，其运行工作点为 B，实测电机输入电流为 40A，即每小时节电约 5～6kW。

当水泵叶轮再车小到相当于 6BA-8B 水泵时，运行工作点为 C，实测输入电流下降到 35A，即每小时节电约 8～9kW，此时流量减少了 18%。仍能满足需要。说明切削叶轮的改造是成功的。但水泵效率并未提高，且略有下降。

第二步为提高水泵运行效率，改造 8BA-6 型水泵其工作点为 D，效率高达 81%，实测电机输入电流为 22A，为改造前的 44%。

（四）改变叶片宽度和角度的调节方法

改变叶片角度的调节方法，国内仅在轴流风机上已采用，如有些类型的轴流风机本身带有调节叶片角度的装置。

改变叶片宽度的调节方法国外变风量风机上有所采用，它是在风机入口处插入一个可以沿轴向滑动的套管（如图 12-18），调节此套管插入叶轮的深度，就起到了调节叶片宽度的效果，从而改变了风机性能曲线。目前国内尚无此产品。

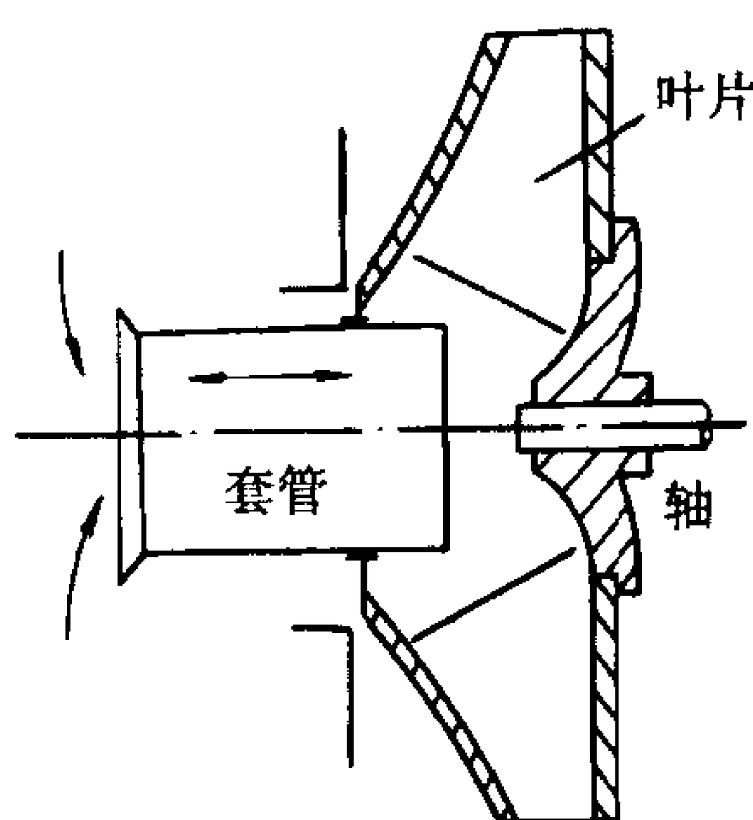


图 12-18　调节叶片宽度的方法

三、改变并联泵台数的调节方法

在大型排灌站或热水系统中，可用改变并联泵运行台数进行流量调节，这是一种很简单的调节方式。其操作方法通常是监视前方水池液面，以控制泵的运转台数，并同时在这种系统中装有专门用来补充调节幅度的小机组。

由图 12-19 可看出，因并联台数不同，其并联后的性能曲线各异。于是，与管道曲线 H_c 相交得 A、B、C 等若干工作点，由于 A、B、C 的流量变化很大，故此法不便进行流量的微调。另外，若这一系统改为一台泵运行时，则这台泵可能会因流量过大（指大于并联运行时各机的流量）而易发生气蚀，为避免这些缺点，此方法常和节流调节共同使用。

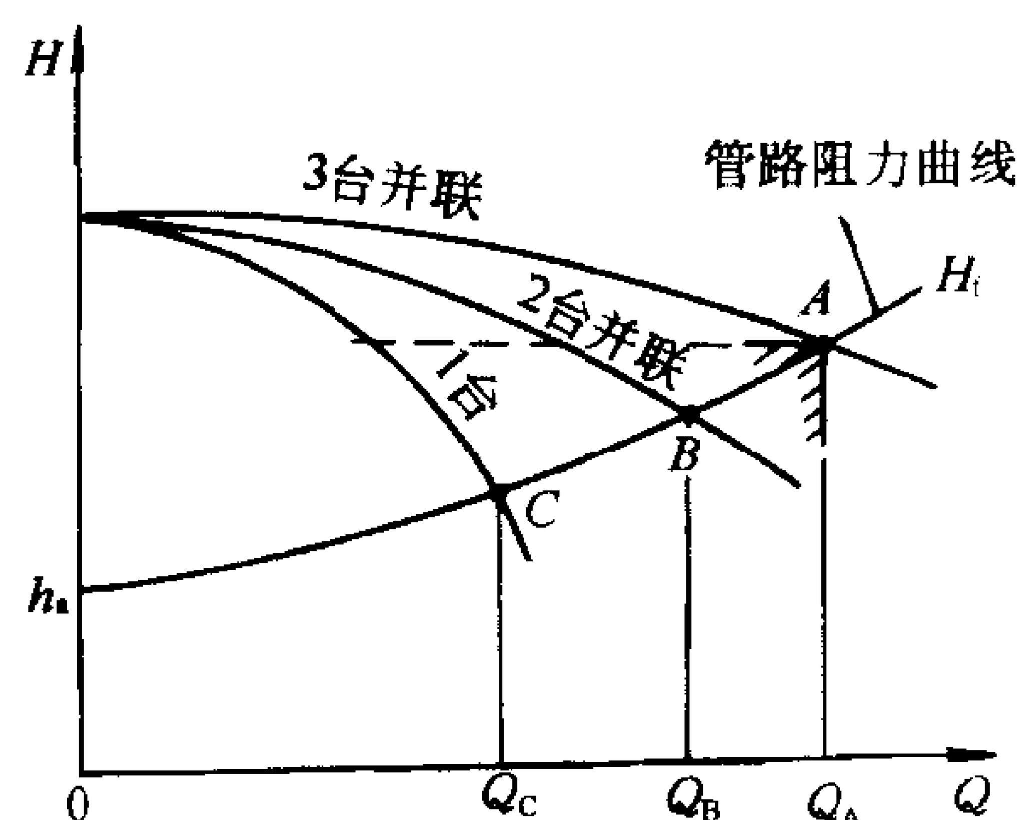


图 12-19　不同并联台数的工况分析

四、泵与风机的起动

泵或风机的起动，对原动机而言属于轻载荷起动。因此，在中、小型装置中，机组起动并无问题。但对大型机组的起动，则因机组惯性大，阻力矩大，就会引起很大的冲击电流，影响电网的正常运行，必须对起动予以足够的重视。

前已述及，当转速不变时，离心式泵或风机的轴功率 N 随流量的增加而增加；对轴流泵或风机，轴功率 N 随流量 Q 的增加而减小；而混流泵则介于二者之间。所以离心泵或风机在 $Q=0$ 时 N 最小，故应关阀起动；轴流泵或风机 $Q=0$ 时 N 最大(参见第十三章)，应开阀起动。

据统计，在关闭阀门时，机器功率 $N_{Q=0}$ 值变化范围如下：

离心式泵或风机　　$N_{Q=0}=(30\%\sim90\%)N$

混流泵　　$N_{Q=0}=(100\%\sim130\%)N$

轴流式泵或风机　　$N_{Q=0}=(140\%\sim200\%)N$

式中，N 为机器额定轴功率，kW。

【例 12-2】 设有一台水泵，当转速 $n=1450$r/min 时，其参数列于下表：

Q(L/s)	0	2	4	6	8	10	12	14
H(m)	11	10.8	10.5	10	9.2	8.4	7.4	6
η(%)	0	15	30	45	60	65	55	30

管路系统的综合阻力数 $S=0.024\text{s}^2/\text{m}^5$，几何扬水高度 $H_z=6$m，上下两水池水面均为大气压。求：

(1) 泵装置在运行时的工作参数。

(2) 当采用改变泵转速方法使流量变为 6L/s 时，泵的转速应为多少？相应的其它参数是若干？

(3) 如以节流阀调节流量，使 $Q=6$L/s，有关工作参数是多少？

【解】 (1) 将表中在 $n=1450$rpm 的参数绘成 $Q—H$ 曲线与 $Q—\eta$ 曲线如图 12-20 所示。根据式(12-1-3)计算管路系统特性：

$$H=H_1+SQ^2=6+0.024Q^2$$

用适当的流量值代入此式可得如下表的数据。据此将管路性能曲线绘于图 12-20 上，如 CE。$Q—H$ 与 CE 的交点即为工作点 A。从图上可以查得该泵的工作参数为：

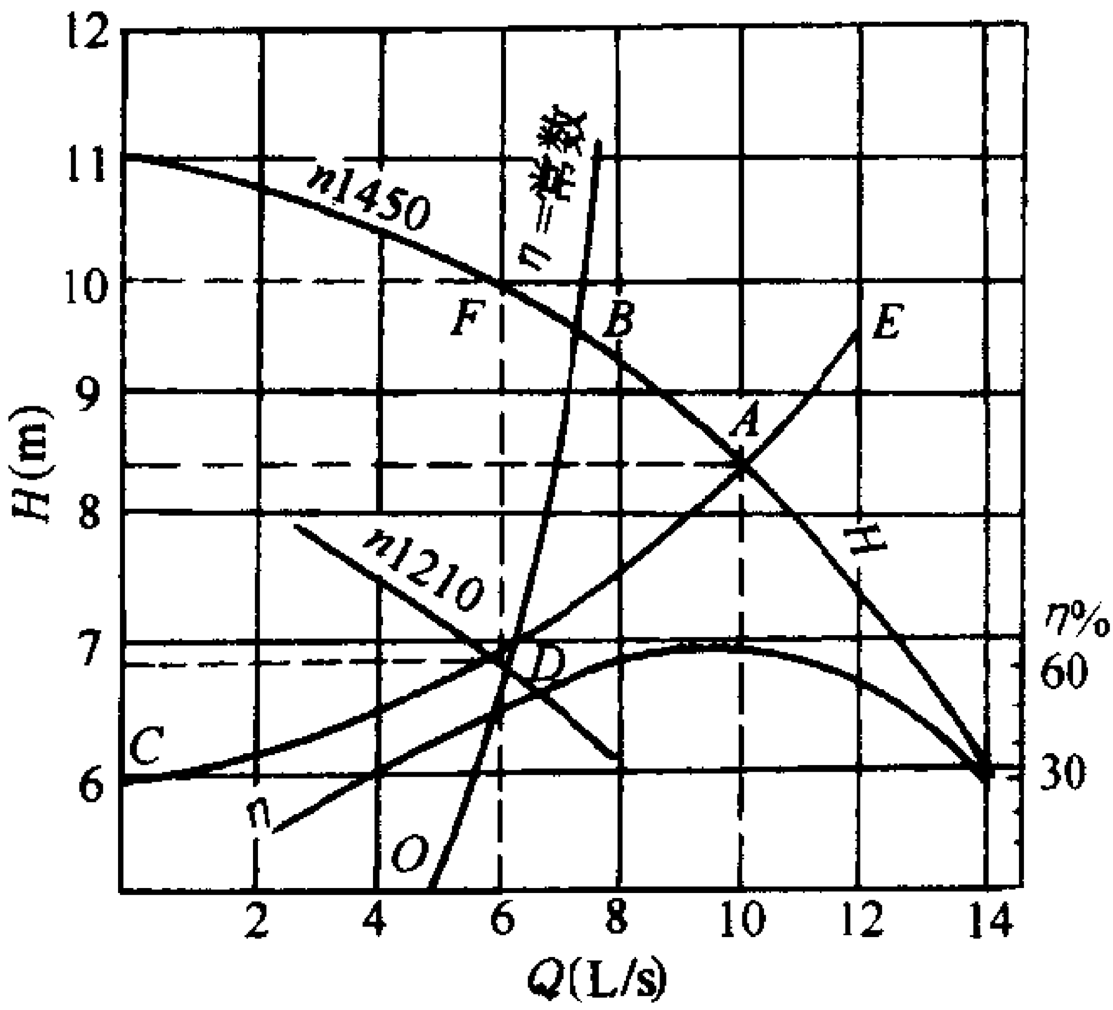


图 12-20

Q(L/s)	0	2	4	6	8	10	12
H(m)	6	6.1	6.38	6.86	7.54	8.4	9.46

$$Q=10\text{L/s}$$

$$H=8.4\text{m}$$

$$\eta=65\%$$

所需的轴功率计算如下：

$$N=\frac{\gamma QH}{\eta}=\frac{9.807\mathrm{kN/m^3}\times\frac{10}{1000}\mathrm{m^3/s}\times8.4\mathrm{m}}{0.65}=1.28\mathrm{kW}$$

(2) 改变泵转速将流量减少到 6L/s 时，因管路性能曲线未变，故可在性能曲线上的 D 点查得 $H_D=6.86\mathrm{m}$。

由于相似律只能适用于相似工况，故在应用式(11-8-7)、(11-8-8)及(11-8-10)求改变流量后的转数等参数之前，首先要求出对应于 D 点的，在 $n=1450\mathrm{r/min}$ 条件下的相似工况点。

对于 Q—H 曲线上的相似工况点应同时满足式(11-9-1)即

$$\frac{H}{H_D}=\left(\frac{n}{n_D}\right)^2=\left(\frac{Q}{Q_D}\right)^2$$

或

$$\frac{H}{Q^2}=\frac{H_D}{Q_D^2}=K_D=\text{常数}$$

根据已知条件 $Q_D=6\mathrm{L/s}$、$H_D=6.86\mathrm{m}$，代入上式可得出：

$$K_D=\frac{H}{Q^2}=0.191$$

此式说明所有 $K_D=0.191$ 的点所代表的工况点都是相似的。将适当的 Q 值代入此式后计算出相应的 H 值的结果列于下表，据此绘出与 D 点相似的相似工况点曲线，如例图上的 OB 所示。

Q(L/s)	0	2	4	6	7	8	10
H(m)	0	0.76	3.06	6.86	9.36	12.22	19.1

相似工况点曲线是一条二次曲线。在推导相似律的过程中，相似工况的效率都认为是相等的，所以这条曲线也表示了等效率曲线。

OB 与 $n=1450\mathrm{r/min}$ 的 Q—H 曲线相交于 B 点，查例图可得出 $Q_B=7.1\mathrm{L/s}$，$H_B=9.5\mathrm{m}$。最后利用式(11-6-7)计算工作点为 D 的泵的转速 n_D：

$$n_D=n\frac{Q_D}{Q_B}=1450\times\frac{6}{7.1}\approx1210\mathrm{r/min}$$

D 点的效率与 B 点效率相同，查例图可得：

$$\eta_D=\eta_B=52\%$$

轴功率可按下式算出：

$$N_D=\frac{\gamma Q_D H_D}{\eta_D}=\frac{9.807\times\frac{6}{1000}\times6.86}{0.52}=0.78\mathrm{kW}$$

(3) 用节流阀调节流量时，泵的性能曲线不变，工作点应位于例图上的 F 点，查图可得：

$$Q_F=6\mathrm{L/s}$$

$$H_F=10\mathrm{m}$$

$$\eta_F=45\%$$

计算轴功率：

$$N_F=\frac{\gamma Q_F H_F}{\eta_F}=\frac{9.807\times\frac{6}{1000}\times 10}{0.45}=1.31\text{kW}$$

根据以上计算可以看出采用节流方法调节时有额外损失 $H_F-H_D=10-6.86=3.14$ 米，轴功率要比改变泵转速时多消耗 1.31/0.78=1.68 倍。

第四节　管道内的压力分布

气体在管道内流动时，由于管道内的压力和流速的变化，画出全压值 p_q，静压值 p_j 和动压值 P_d 相对于室外大气压力的变化规律，有助于我们更好的解决通风系统的设计和运行管理问题，同时也为系统网络分析奠定基础。

分析管道内气体压力分布的理论基础是：

1. 根据流体力学的原理，管道内任何一点的全压等于该点的静压与动压之和（动压总是正值）。

2. 风机不开动时，管道内气体处于静止状态，各点气体压力相等，均等于当地大气压力，在通风工程中，一般都用相对压力（表压）表示风管中空气压力，大于大气压力为正压，小于则称为负压。

3. 风机开动后，对断面不变的管道中，压力损失完全是由摩擦阻力所致，全压和静压损失是相等的。对断面变化（流速变化），气流方向变化（含流速不变或流速变化）及流量变化（分流或合流）的局部构件，其压力损失则为摩擦损失和局部损失之和（但一般都归结为局部阻力 $Z=\xi\frac{\rho v^2}{2}$ 来计算）。

4. 风机的压力等于风机进、出口的全压差，换句话说装在管道上的风机压力等于管道（包括吸入段及压出段）的阻力（含局部阻力）及风管出口动压损失之和，亦即等于风管总阻力。

图 12-21 是一个有摩擦阻力和局部阻力的通风系统，根据上述原理，只要算出各点的全

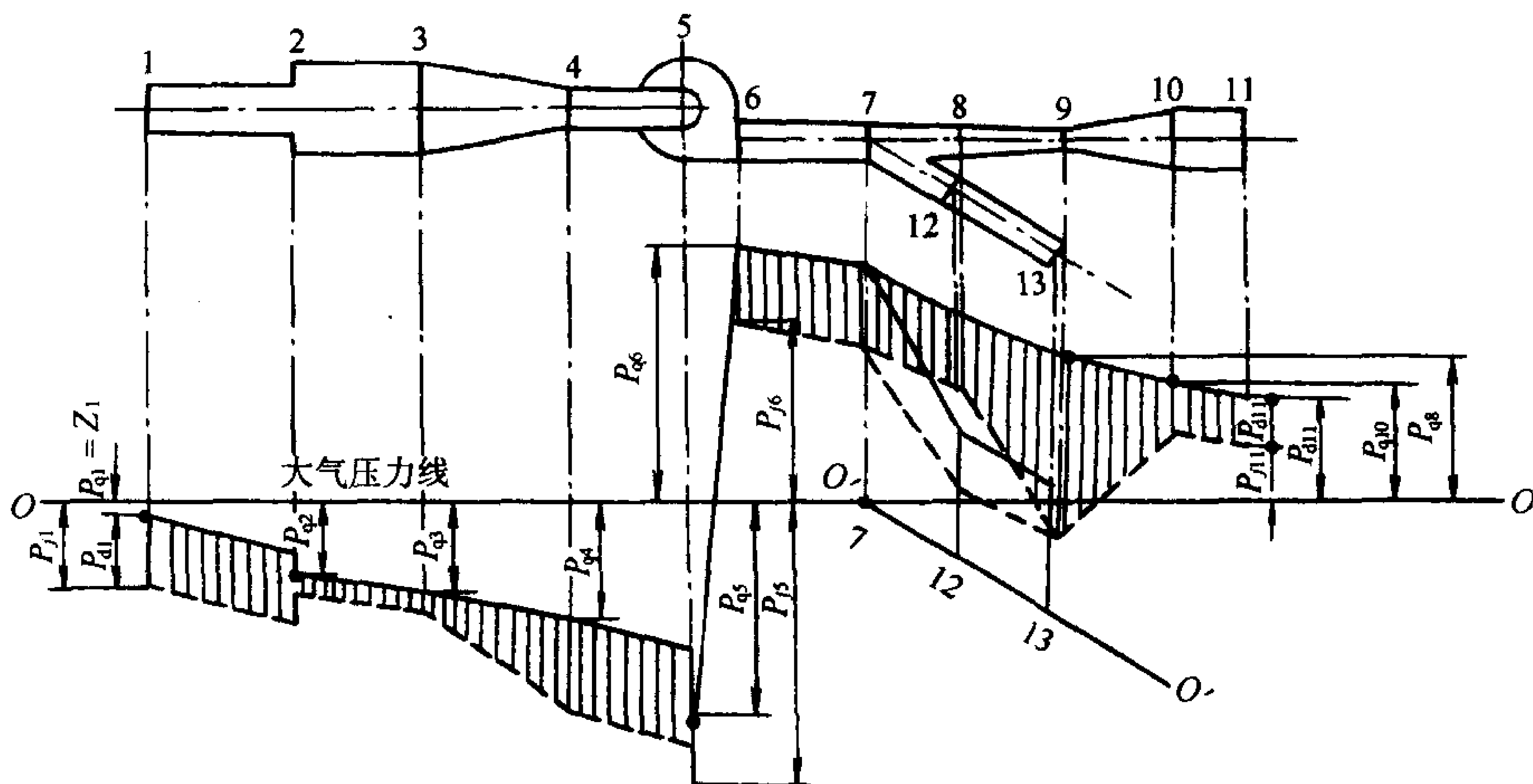


图 12-21　有摩擦阻力和局部阻力的风管压力分布

压值、动压值和静压值，把它们标出后逐点连接起来，就可以得到管道压力分布图。

具体作法是：先算出吸入管各点（断面）压力（从风管吸入口→风机入口），然后算出压出主干管各点（断面）压力（从风管出口→风机出口）。

确定吸入段各点（断面 1-5）的全压，动压，静压：

点 1：全压 $p_{q1}=-Z_1=-\xi_1\cdot P_{d1}$

动压 $p_{d1}=\dfrac{\rho v_1{}^2}{2}$

静压 $p_{j1}=p_{q1}-p_{d1}=-Z_1-\dfrac{\rho v_1{}^2}{2}$

式中 Z_1——吸入段进口处的局部阻力。

上式表明点 1 处的全压比大气压力低，为负压。

点 2：

全压 $p_{q2}=p_{q1}-(R_{m,1-2}\cdot L_{1-2}+Z_2)$

动压 $p_{d2}=\dfrac{\rho v_2{}^2}{2}=\dfrac{\rho v_1{}^2}{2}$

静压 $p_{j2}=p_{q2}-p_{d2}$

式中 $R_{m,1-2}$——管段 1—2 的单位长度摩擦阻力；

Z_2——突然扩大的局部阻力

点 3： $p_{q3}=p_{q2}-R_{m,2-3}\cdot L_{2-3}$

点 4： $p_{q4}=p_{q3}-Z_{3-4}$

式中 Z_{3-4}——渐缩管的局部阻力。

点 5（风机进口）：$p_{q5}=p_{q4}-(R_{m4-5}L_{4-5}+Z_5)$

式中 Z_5——风机进口处 90°弯头的阻力。

点 11（风管出口）：$p_{q11}=\dfrac{v_{11}^2\rho}{2}+Z_{11}'=\dfrac{v_{11}^2\rho}{2}+\zeta_{11}'\dfrac{v_{11}^2\rho}{2}$

$$p_{q11}=(1+\zeta_{11}')\frac{v_{11}^2\rho}{2}=\zeta_{11}\frac{v_{11}^2\rho}{2}=Z_{11}$$

式中 v_{11}——风管出口处空气流速；

Z_{11}'——风管出口处局部阻力；

ζ_{11}'——风管出口处局部阻力系数；

ζ_{11}——包括出口动压损失在内的出口局部阻力系数，$\zeta_{11}=(1+\zeta_{11}')$。

在实际工作中，为简便计算，设计手册中一般直接给出 ζ 值而不是 ζ' 值。

点 10： $p_{q10}=p_{q11}+R_{m10-11}L_{10-11}$

点 9： $p_{q9}=p_{q10}+Z_{9-10}$

式中 Z_{9-10}——渐扩管的局部阻力。

点 8： $p_{q8}=p_{q9}+Z_{8-9}$

式中 Z_{8-9}——渐缩管的局部阻力。

点 7： $p_{q7}=p_{q8}+Z_{7-8}$

式中 Z_{7-8}——三通直管的阻力。

点 6（风机出口）： $p_{q6}=p_{q7}+R_{m6-7}L_{6-7}$

自点 7 开始，有 7—8 及 7—12 两个支管。为了表示支管 7—12 的压力分布，过 7 点垂线与 $O—O$ 交点引平行于支管 7—12 轴线的 $O'—O'$ 线作为基准线，可用上述同样方法求出此支管的全压值。因为点 7 是两支管的共同点，它们的压力线必在此处会合，即压力大小相等，按同样算法即可求出点 12 和点 13 的压力。

连接各个断面的全压点可得全压分布曲线。以各点的全压减去该点的动压，即为各点的静压，由此可绘出静压分布曲线。

从图 12-21 可以进一步看出：

1. 从扩张管 2 和 10 看，其流速减小而动压减小了，全压沿流动方向也减小，此时静压可能增大，在这些管段上所表示的静压值的增加就是一般所说的静压复得。

2. 在收缩段 4 和 9，沿着流动方向，流速增大而动压增大，而全压值和静压值都有了不同的减小，一旦某处动压大于全压时（如管段 9），该处的静压出现负值。若在断面 9 处开孔，将会吸入空气而不是压出空气。有些压出式气力输送系统的受料器（吸嘴）和诱导式通风就是这一原理的具体应用。

3. 风机吸入段的全压和静压都是负值；压出段一般情况下均是正值。因此，风管连接处不严密时，会有空气漏入或逸出。前者影响排气和进气效果，后者影响送风效果或造成粉尘和有害气体向外泄漏。

4. 管路系统全压损失 $\Delta p_q = p_{q6} - p_{q5}$，系统的静压损失 $\Delta p_j = p_{j6} - p_{j5}$，但对于风机来说，其全压值应为 $p_q = p_{q6} - p_{q5}$，其静压值应为 $p_j = p_{q6} - p_{d6} - (p_{q5} - p_{d5}) = p_{q6} - p_{q5} - (p_{d6} - p_{d5})$，当风机进、出口的风速相等或相近时（$p_{d6} \cong p_{d5}$），则整个管道系统的全压损失和静压损失基本相等。

思 考 题

1. 泵的扬程与泵出口总水头是否是一回事？两者何时相等，何时扬程大于出口总水头及何时小于出口总水头。

2. 在实际工程中，是在需要的流量下计算出管路阻力，即已知 Q 和 $\sum h$，此时如何确定管路系统特性曲线。

3. 管路特性曲线与机器特性曲线相交点有何含意，与 $N—Q$ 及 $\eta—Q$ 曲线的交点是何含意？机器功率 N、效率 η 如何确定。

4. 两机并联运行时，其总流量 Q 为什么不能等于各机单独工作所提供的流量 q_1 与 q_2 之和。

5. 两机联合运行时，其功率如何确定。

第十三章　泵或风机的安装方法与选择

第一节　离心式泵的构造特点

离心式泵主要用来输送液体。

这一节除简单介绍离心式泵的类型外，将扼要地阐述离心式泵的主要部件结构型式，以及典型的离心式泵装置的管路系统。

一、离心式泵的类型

离心式泵是叶片式泵。根据泵转轴的位置不同可以分为卧式和立式泵两类。再可按机壳型式、吸入方式、叶轮级数等分成若干种类，见表 13-1。

离心式泵的类型　　**表 13-1**

泵轴位置	机壳形式	吸入方式	叶轮级数	泵类举例
卧式	蜗壳式	单吸	单级	单吸单级泵　屏蔽泵　自吸泵　水轮泵
			多级	蜗壳式多级泵　两级悬臂泵
		双吸	单级	双吸单级泵
			多级	高速大型多级泵(第一级双吸)
	导叶式	单吸	多级	分段多级泵
		双吸	多级	高速大型多级泵(第一级双吸)
立式	蜗壳式	单吸	单级	屏蔽泵　水轮泵　大型立式泵
			多级	立式船用泵
		双吸	单级	双吸单级涡轮泵
	导叶式	单吸	单级	作业面潜水泵
			多级	深井泵　潜水电泵

最常遇见的离心式泵是单吸单级泵。这种泵广泛用于国民经济中各个部门。所能提供的流量范围约为 $4.5\sim300m^3/h$，扬程约为 $8\sim150m$。

图 13-1 为典型的单吸单级泵的结构图。这种泵的泵轴水平地支承在托架 7 内的轴承 9 上，泵轴 6 的一端悬出为悬臂端，端部装有叶轮 2；10 为填料密封机构，其作用主要在于减少泵内高压液体的外泄及空气的渗入。叶轮上一般开有平衡孔，以平衡轴向推力。这种泵的结构较简单，工作可靠，部件较少，也易于加工。

图 13-2 是另一种单吸单级悬臂式离心泵的外形图，它较图 13-1 所示的离心式泵在结构上更为简单。

有些小型泵还可以将泵叶轮直接安装在特制的加长电机轴上，泵体与电机外壳相固定成为没有托架和轴承的直联式结构。这样就大大减少了零件数量和整机的重量。例如 B

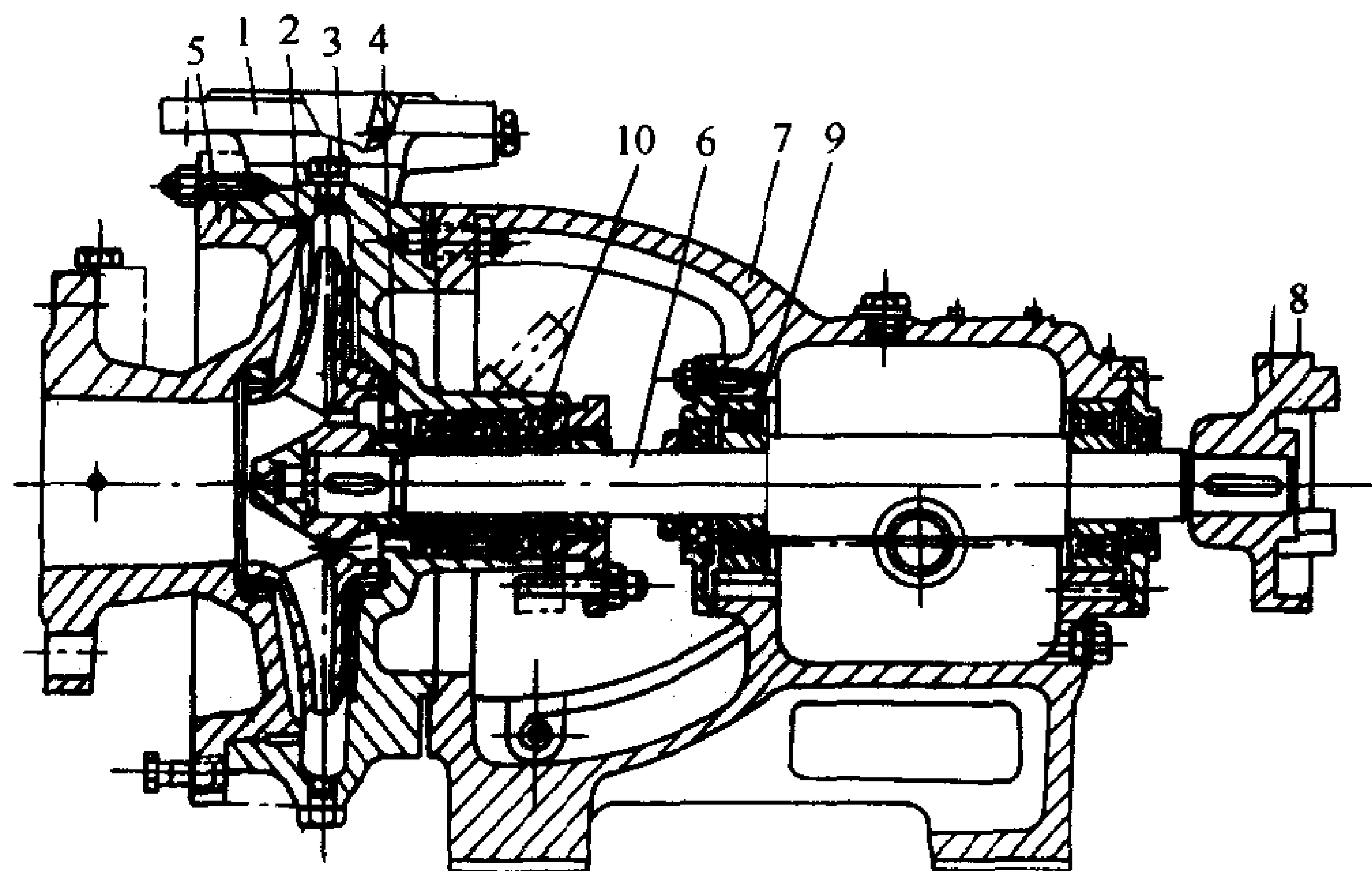


图 13-1　典型的单吸单级泵结构图

1—泵体;2—叶轮;3—密封环;4—轴套;5—泵盖;
6—泵轴;7—托架;8—联轴器;9—轴承;10—填料密封机构

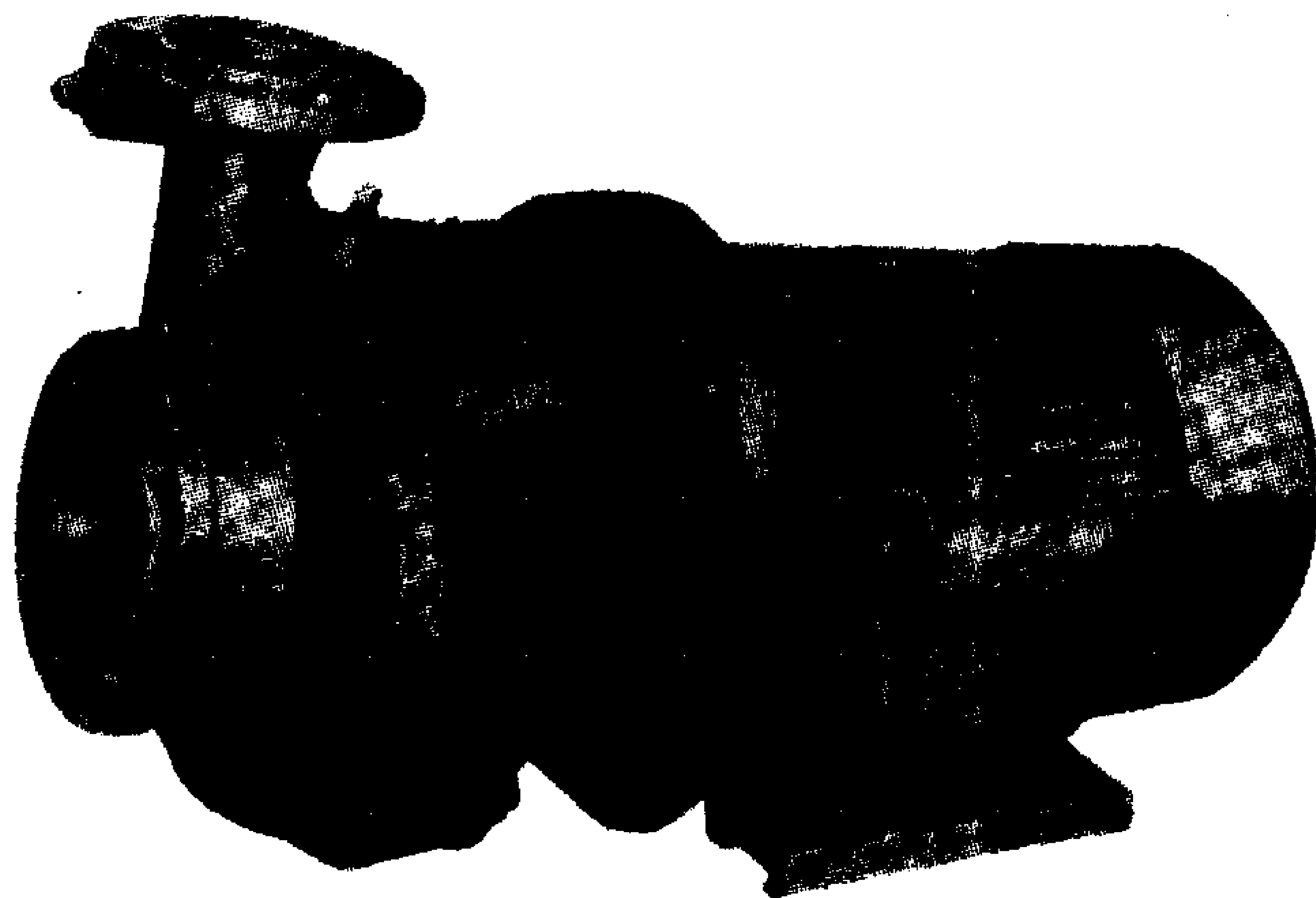


图 13-2　BL 型悬臂式单吸单级泵

型泵和 BZ 型泵。

另一种广泛应用的离心式泵是双吸单级泵。这种泵实际上等于两个相同的叶轮背靠背地同装在一根转轴上并联工作。液体是从两侧轴向地流入两个叶轮,然后转为径向进入叶片间的流道,最后在机壳内汇合流向出口。这种泵的流量较大,能自动平衡轴向推力。我国生产的双吸单级泵的流量范围为 120～20000m^3/h,扬程约为 10～110m。

分段式多级泵具有较高的扬程。这类泵在结构上是将几个叶轮装在同一根转轴上,每个叶轮叫做一级,一台泵可以有两级到十余级。每级叶轮之间设有固定的导叶。流体进入第一级叶轮加压后经导叶依次进入第二级、第三级叶轮。第一级一般为单吸式,但也可以制成双吸式的。为了平衡轴向推力,泵内通常装有平衡盘。我国生产的分段式多级泵,中压的流量在 5～720m^3/h 之间,扬程约为 100～650m。高压多级泵的扬程可达 2800m 左右。多级泵通常用于高扬程提升液体和锅炉给水。图 13-3 为 TSW 型分段式多级泵的外观图。

表 13-1 中所列其它类型的离心式泵大多具有专门用途,除深井泵将在第十四章加以介绍外,可以参看其它专门著作。

离心式泵还可以按用途不同进行分类。例如农用水泵、给水泵、污水泵、污泥泵、泥浆



图 13-3　TSW 型分段式多级泵

泵、锅炉给水泵、冷凝水泵、水力采煤泵、氨水泵等，不再一一列举介绍。

二、离心式泵主要部件结构型式

尽管离心式泵的类型繁多，但由于作用原理基本相同，因而它们的主要部件大体类同。现在分别介绍如下。

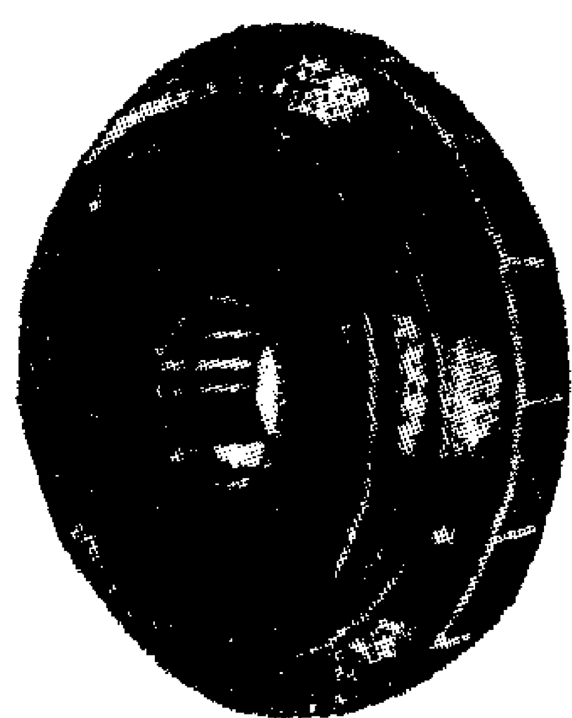


图 13-4　离心式泵的闭式叶轮

（一）叶轮

叶轮是泵的最主要的部件。叶轮有开式、半开式及闭式叶轮三种。

开式叶轮没有前盘和后盘而只有叶片，多用于输送含有杂质的液体，如污水泵的叶轮就是采用开式叶轮的。

半开式叶轮只设后盘。闭式叶轮既有前盘也有后盘。清水泵的叶轮都是闭式叶轮。图 13-4 是一只闭式叶轮的外观图。

离心式泵的叶轮都采用后向叶型。

（二）吸入室

泵的吸入室的作用主要在于使液体进入泵体的流动损失最小。吸入室的结构形状对泵的吸入性能影响很大（参见本章第二节）。通常采用的吸入室形式有锥体管式和圆环形式。但以前者最普遍，其锥度约为 7°～18°，见图 13-5。

圆环形吸入室与锥体管式相比其主要优点是轴向尺寸较短，结构较简单；缺点是流体进入叶轮的撞击损失和旋涡损失大，流速分布也不太均匀，因而总的损失较大。多级泵中大都采用圆环形入口，因为这种泵的入口损失在泵的总扬程中的比重不大。

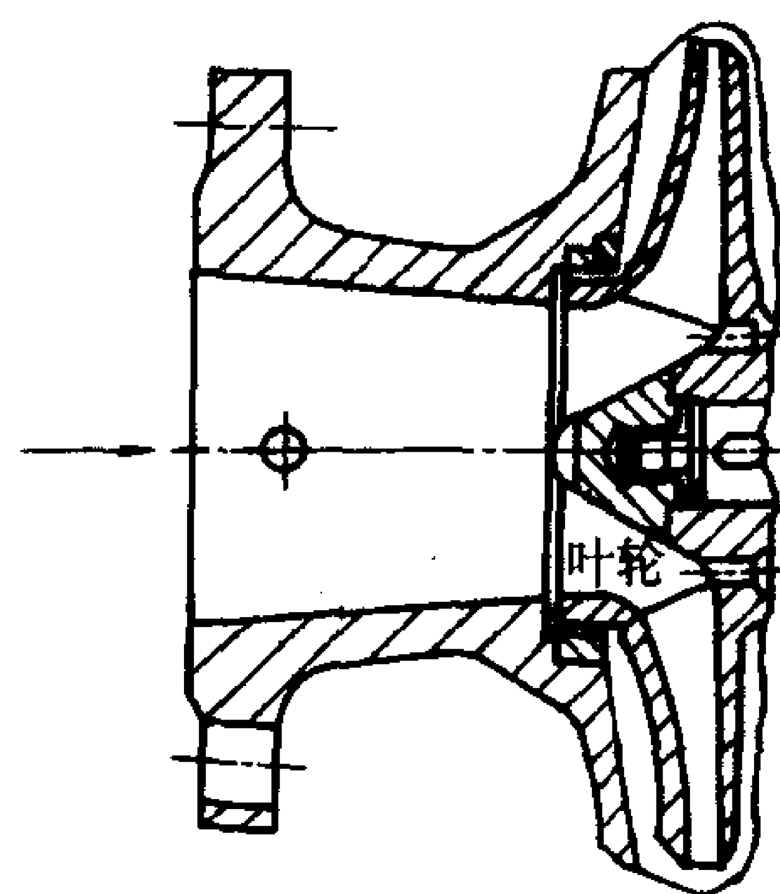


图 13-5　离心式泵的锥体管式吸入室

（三）机壳

机壳收集来自叶轮的液体，并使部分流体的动能转换为压力能，最后将流体均匀地引向次级叶轮或导向排出口。单级离心式泵的机壳大都为螺旋形蜗式机壳（图 13-6）。有些机壳内还设置了固定的导叶。

（四）密封环

为了减少机内高压区泄漏到低压区的液体量，通常在泵体和叶轮上分别安设密封环（图 13-7）。密封环又称减漏装置。由于动环与定环之间的间隙较

小，所以容易磨损。磨损后将使泵的效率降低。但密封环可以更换。

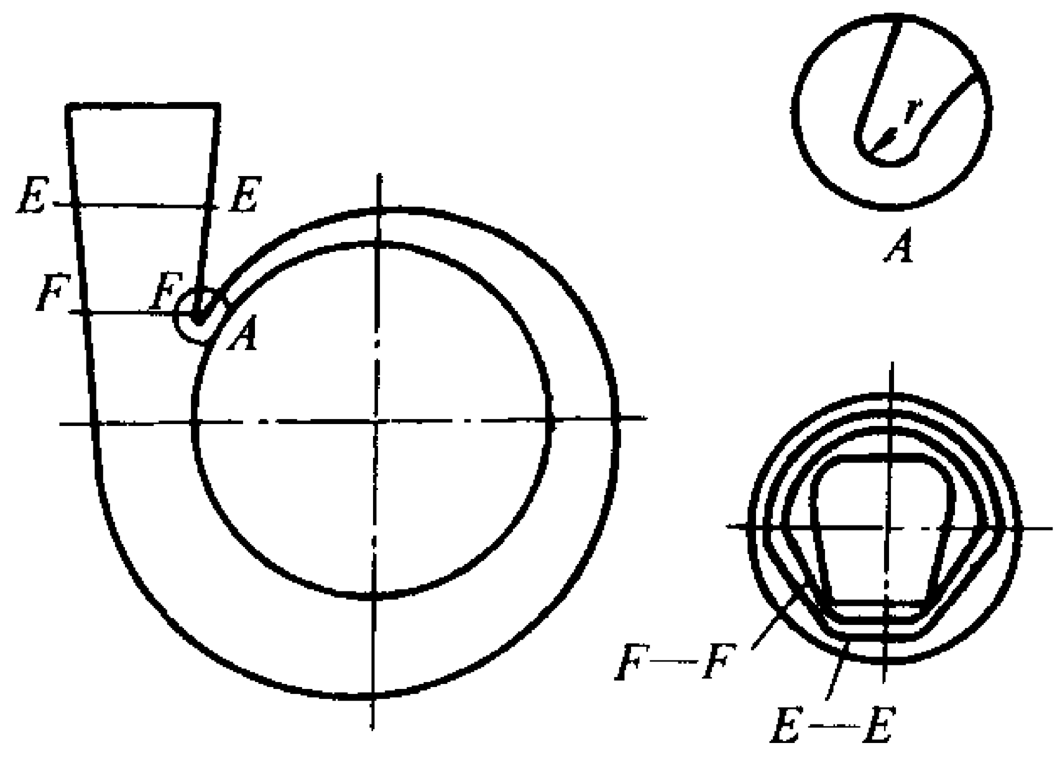


图 13-6 离心式泵的螺旋形蜗式机壳

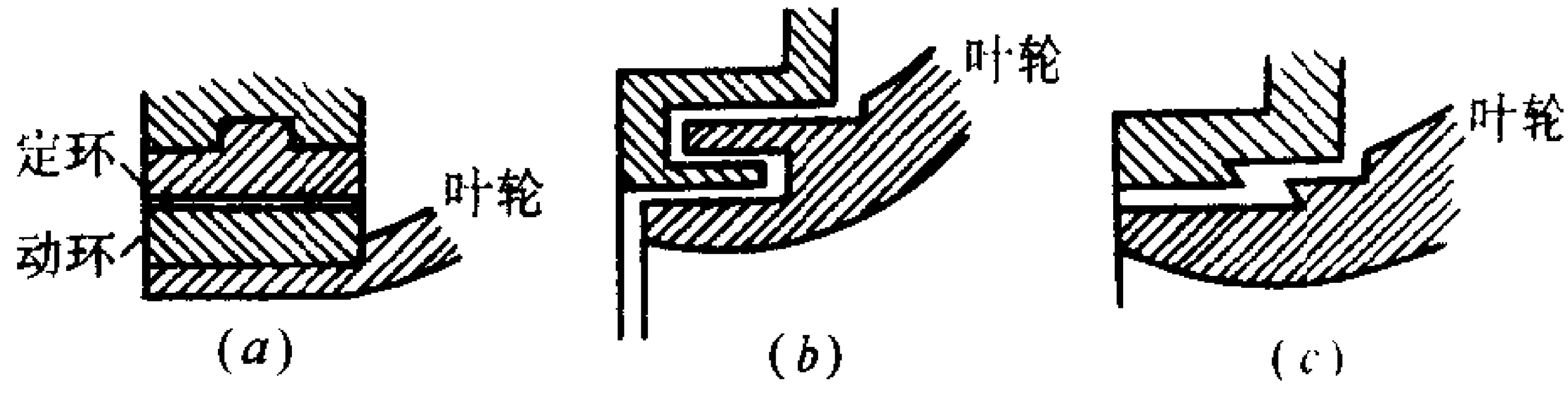


图 13-7 泵内密封环的几种形式

(a)圆柱形；(b)迷宫形；(c)锯齿形

(五) 轴封

泵轴伸出泵体处，在旋转的泵轴和固定的泵体之间设置轴封，用来减少泵内压强较高的液体流向泵外，或借以防止空气侵入泵内。常用的轴封有填料轴封，骨架橡胶轴封，机械轴封和浮动环轴封数种。图 13-8 是最常采用的填料轴封机构。但其中的填料不能压得过紧，也不能压得过松，应以压盖调节到有液体成滴状自填料向外渗漏，并以每分钟泄漏 60 滴左右为宜。常用的填料物质为浸透石墨或黄油的棉织物(或石棉)，也有用金属箔包石棉芯的填料。通常轴封还设有专门的通水冷却装置。

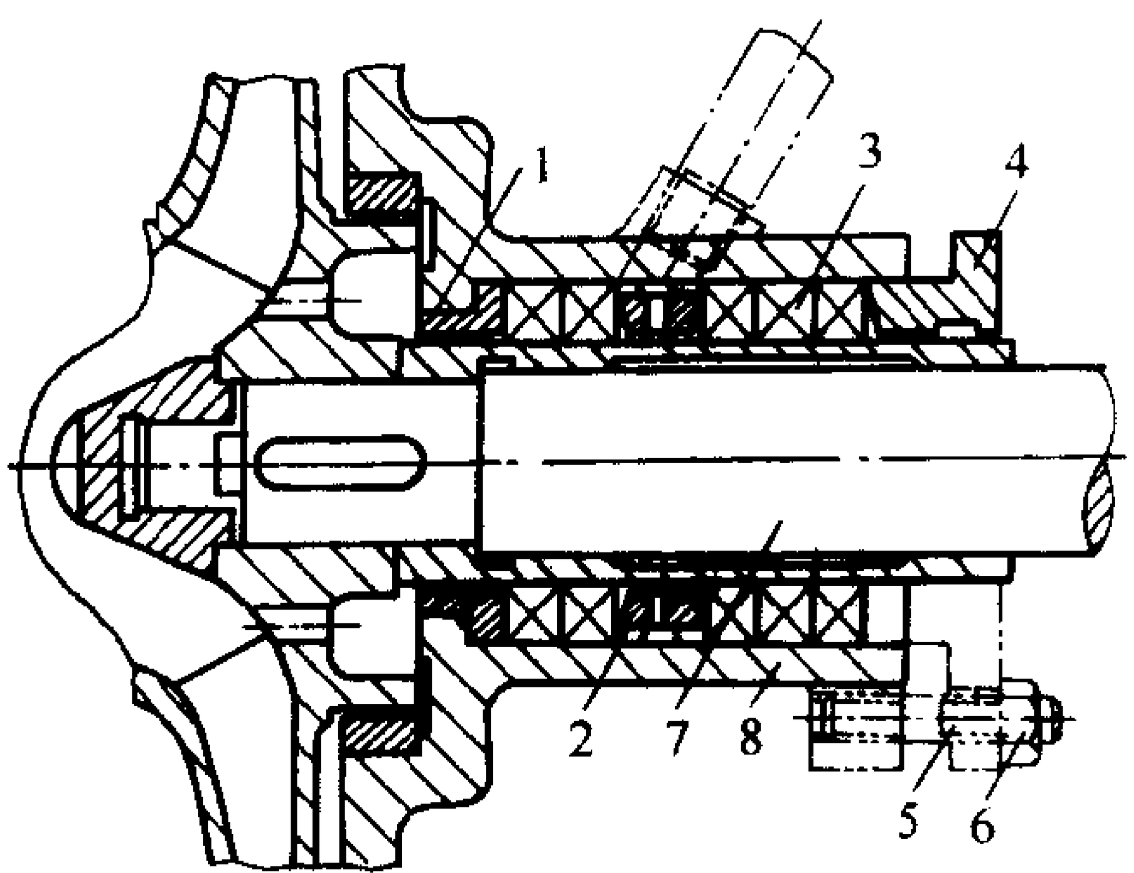


图 13-8 泵的填料轴封机构

1—填料套；2—填料环；3—填料；4—压盖；5—长扣双头螺丝；6—螺母；7—泵轴；8—泵体

(六) 轴向力平衡装置

单吸单级泵和某些多级泵的叶轮有轴向推力存在。产生轴向推力的原因主要是作用在叶轮两侧的流体压强不平衡所引起的。图 13-9a 表明了作用于单吸单级泵叶轮两侧的压强分布情况。图中叶轮后盘外侧具有较密的影线部分就是由于后盘外侧压强较叶轮前盘中央处的压强为大所引起轴向推力。如果不消除这种轴向推力，将导致泵轴及叶轮的窜动和受力引起的相互研磨而损伤部件。

消除轴向力的方法通常采用下述几种措施：(1) 在叶轮后盘外侧适当地点设置密封环，其直径与前盘密封环大致相等。流体通过此增设的密封环后压强有所降低，从而与叶轮进口侧的低压强相平衡。(2) 设置平衡管或在后盘上开设平衡孔(如图 13-9)，同时采用止推

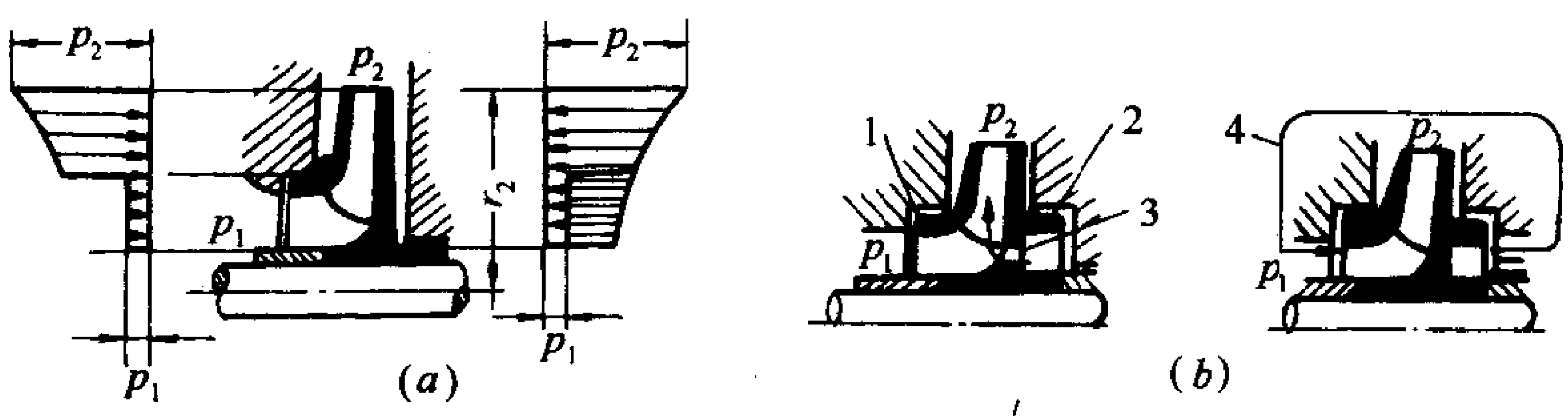


图 13-9 叶轮两侧压强分布与轴向力的平衡机构

(a)叶轮两侧的压强分布；(b)平衡孔与平衡管

r_2—叶轮外半径；p_2—泵内高压；p_1—泵内低压

1—前盘密封环；2—后盘密封环；3—平衡孔；4—平衡管

轴承平衡剩余压力。(3) 多级泵的轴向推力常用平衡鼓与止推轴承相配合的专门平衡机构进行平衡;也有采用平衡盘的平衡机构。平衡盘能根据不平衡力的大小自动调整其位置来达到平衡。参见有关书籍。

离心式泵除以上介绍的主要部件外,尚有泵轴、托架、联轴器、轴承等其它部件。此处从略。

第二节　离心泵正常工作所需附件及扬程计算

一、离心式泵装置的管路及附件

综上所述,离心泵与风机的原理是相同的,只是所输送的介质不同。从泵和风机输出的有效功率 $N_e = \gamma QH$ 来看,两者的区别在于 γ(容重)不同,当采用离心泵提升液体时,就必需向泵内(包括吸水管内)充满液体,为此,在泵体上常设有充液孔或漏斗,有时还另设真空抽气泵将水抽入吸水管和泵体,否则就只能输送空气而打不上水来。因此,泵在提升液体的整个泵装置中,除离心式泵外,常配有管路和其它一些必要的零部件。典型的泵装置示于图13-10。

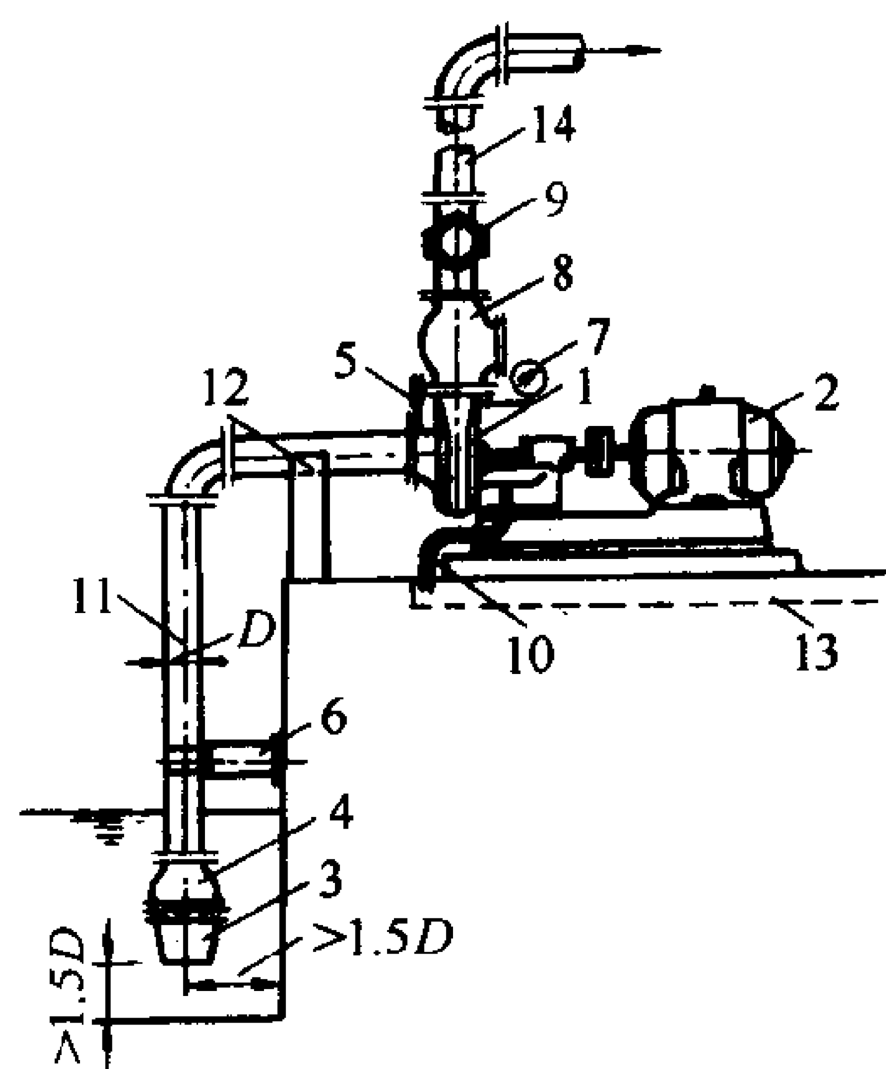


图 13-10　离心式泵装置的管路系统

1—离心式泵;2—电动机;3—拦污栅;4—底阀;5—真空计;6—防振件;7—压力表;8—止回阀;9—闸阀;10—排水管;11—吸入管;12—支座;13—排水沟;14—压出管

图中离心式泵 1 与电动机 2 用联轴器相连接,共装在同一座底座上,这些通常都是由制造厂配套供应的。

从吸液池液面下方的拦污栅 3 开始到泵的吸入口法兰为止,这段管段叫做吸入管段。底阀 4 用于泵启动前灌水时阻止漏水。泵的吸入口处装有真空计 5,以便观察吸入口处的真空度。吸入管段的水力阻力应尽可能降低,其上一般不设置阀门。水平管段要向泵方向抬升($i = 1/50$)。过长的吸入管段要装设防振件 6。

泵出口以上的管段是压出管段。泵的出口装有压力表 7,以观察出口压强。止回阀 8 用来防止压出管段中的液体倒流。闸阀 9 则用来调节流量的大小。应当注意使压出管段的重量支承在适当的支座上,而不直接作用在泵体上。

此外,还应装设排水管 10,以便将填料盖处漏出的水引向排水沟 13。有时,由于防振的需要,又在泵的出、入口处设置高压橡胶软接头。

另外,安装在供热、空调循环水系统上的水泵,又需在其出,入口装温度计,入口管上装闸阀及水过滤器,并将吸入口处所装真空计改装为压力表。

二、泵装于各种管路时的扬程计算

(一) 根据泵上压力表和真空计读数确定扬程。

泵出口与入口处所装的压力表和真空计所指示的读数可以近似地表明泵在工作时所具有的实际扬程。

根据图 13-11 所示的简图,以下水池液面为基准,列出断面 1—1 与 2—2 的能量方程后可得出泵的扬程为:

$$H=\frac{p_2-p_1}{\gamma}+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$$

当作用在上水池和下水池液面的压强均为大气压 p_a 时，则有如下的关系：

$$\frac{p_2}{\gamma}=\frac{p_a+p_M}{\gamma}$$

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}-H_B$$

式中 p_M——泵出口处压力表的读数，Pa；

H_B——泵吸入口处真空计所示的真空度，m。

代入用能量方程式表示的扬程计算式，可得：

$$H=\frac{p_a+p_M}{\gamma}-\left(\frac{p_a}{\gamma}-H_B\right)+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$$

$$=\frac{p_M}{\gamma}+H_B+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g} \tag{13-2-1}$$

式中符号同前。

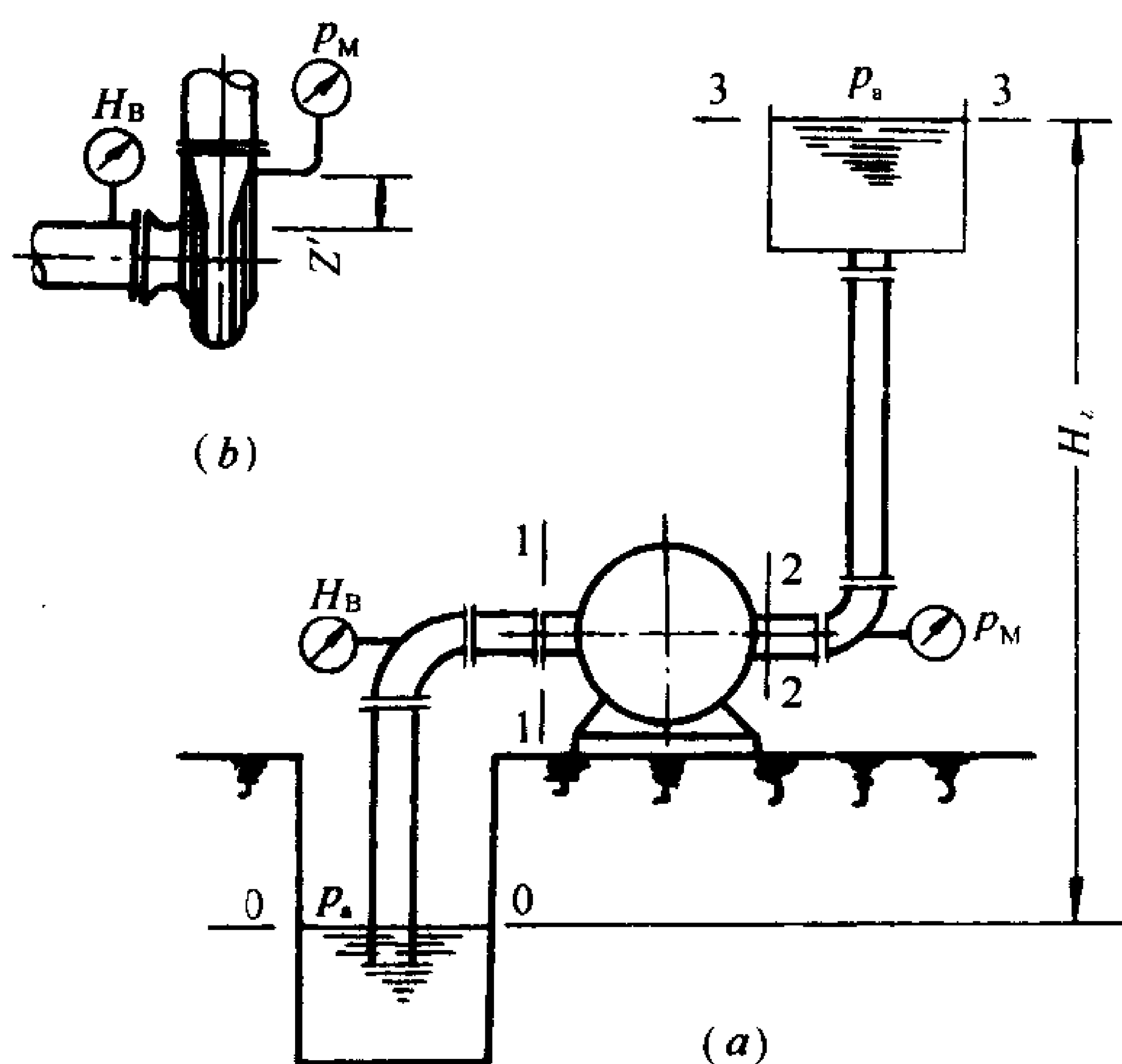


图 13-11 计算泵的扬程的示意图

(a)泵装置简图；(b)压力表与真空计的安装高差

通常泵吸入口与出口的流速相差不大，以$\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$计的速度头可以忽略不计。于是可得：

$$H=\frac{p_M}{\gamma}+H_B \tag{13-2-2}$$

由此可见在泵装置中，一般可以用压力表与真空计的示度近似地表明泵的扬程。

应用式(13-2-1)及(13-2-2)时，应注意压力表与真空计的安装位置是否存在高差？当两者具有高差 Z' 如图 13-11b 时，则应按下式计算泵的扬程：

$$H=\frac{p_M}{\gamma}+H_B+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}+Z' \tag{13-2-3}$$

(二) 泵在管网中工作时所需扬程之确定

1. 泵向开式(通大气)水池供水时

如果希望得到泵的扬程与整个泵与管路系统装置之间的关系，可以列出图 13-11a 中断面 0—0 与断面 3—3 间的能量方程式来求出：

$$H=H_Z+\frac{p_a}{\gamma}+\frac{v_3^2}{2g}+h_1+h_2-\left(\frac{p_a}{\gamma}+\frac{v_0^2}{2g}\right)=\frac{v_3^2-v_0^2}{2g}+H_Z+h_t \tag{13-2-4}$$

式中 H_Z——上下两水池液面的高差，也称几何扬水高度，m；

h_t——整个泵装置管路系统的阻力损失，m，$h_t=h_1+h_2$；

h_1——吸入管段的阻力损失，m；

h_2——压出管段的阻力损失，m。

其余符号同前。如两池水面足够大时，则可以认为上下水池流速 $v_3=v_0=0$，上式就简化为：

$$H=H_Z+h_t \tag{13-2-5}$$

此式说明泵的扬程为几何扬水高度和管路系统流动阻力之和。通常就是根据式(13-2-4)和(13-2-5)得出的扬程，作为分析工况和选择泵型的依据。

值得注意，当前高层建筑空调系统中，常将冷却水系统的冷水塔布置在楼顶上，此时，计算冷凝水泵所需扬程 H 时，H_Z 应等于冷水塔本身喷水管至水池的高差如图 13-12，且不可误认为等于 H_a。

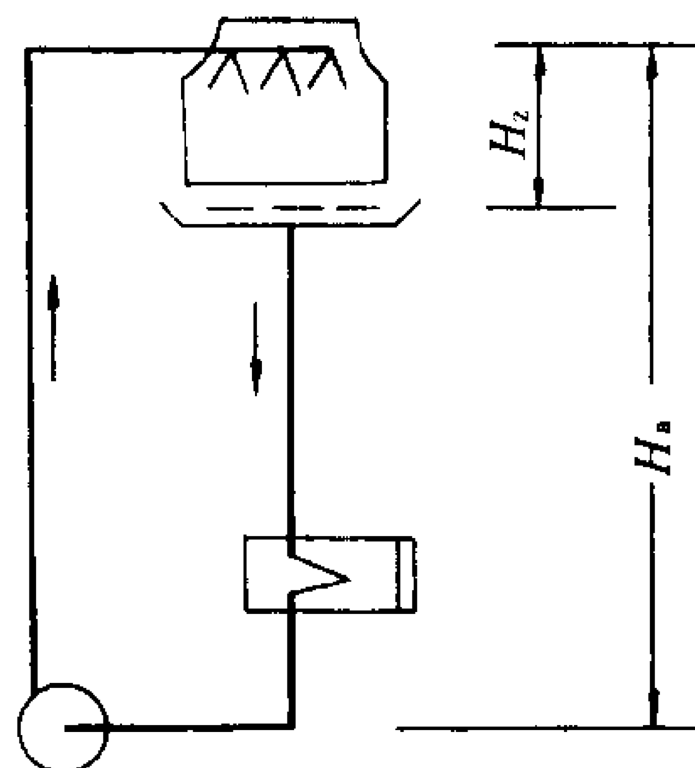


图 13-12 计算冷凝水泵扬程

2. 泵向压力容器供水时

显然，当上部水池不是开式，而是将液体压入压力容器时，例如，锅炉补给水泵需将水由开式补水池（液面压强为大气压 p_a）压入压强为 p 的锅炉内，则在计算时应考虑 $\frac{p-p_a}{\gamma}$ 的附加扬程。如从低压容器（压强为 p_0）向高压容器（压强 p）供水时所需扬程应附加 $\frac{p-p_0}{\gamma}$。

3. 泵在闭合环路管网上工作时

如图 13-18a 所示，此时泵所需扬程仅仅是等于该环路的流动阻力。

值得重述，泵的扬程是指单位重量流体从泵入口到出口的能量增量，它与泵的出口水头是两个不同的概念，不能片面地理解为泵能将水提升 H(m)高。

【例 13-1】 某工厂由冷冻站输送冷冻水到空气调节室的蓄水池，采用一台单吸单级离心式水泵。在吸水口测得流量为 60L/s，泵前真空计指示真空度为 4m，吸水口径 25cm。泵本身向外泄漏流量约为吸水口流量的 2%。泵出口压力表读数为 3.0kgf/cm²，泵出口直径为 0.2m。压力表安装位置比真空计高 0.3m，求泵的扬程。

【解】 $p_M = 3.0\text{kgf/cm}^2 = 30000\text{kgf/m}^2 \times 9.807 = 294.0\text{kPa}$

$$H_B = 4\text{m}$$

$$Z' = 0.3\text{m}$$

$$Q = 60\text{L/s} = 0.06\text{m}^3/\text{s}$$

$$v_2 = \frac{0.06\times(1-0.02)\times4}{3.14\times(0.2)^2} = 1.87\text{m/s}$$

$$v_1 = \frac{0.06\times4}{3.14\times(0.25)^2} = 1.23\text{m/s}$$

$$H = \frac{p_M}{\gamma} + H_B + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + Z' = \frac{294.0}{9.807} + 4 + \frac{(1.87)^2-(1.23)^2}{2\times9.807} + 0.3$$

$$= 30 + 4 + 0.101 + 0.3 \approx 34.4\text{m}$$

第三节 泵的气蚀与安装高度

一、泵的气蚀现象

以前提到，离心式泵在管网中工作时，其泵入口处的压强是“最低”的，它低于吸入管上任何点的压强，有时会低于大气压强（见图 13-10），这样后继流体才能不断地导入泵内。

根据物理学知道，当液面压强降低时，相应的汽化温度也降低。例如，水在一个大气压（101.3kPa）下的汽化温度为 100℃；一旦水面压强降至 0.024at（2.43kPa），水在 20℃ 时就开始沸腾。开始汽化的液面压强叫做汽化压强，用 p_v 代表。

如果泵内某处的压强（图 13-13 中的 p_k）低至该处液体温度下的汽化压强，即 $p_k \leqslant p_v$，

部分液体就开始汽化，形成气泡；与此同时，由于压强降低，原来溶解于液体的某些活泼气体，如水中的氧也会逸出而成为气泡。这些气泡随液流进入泵内高压区，由于该处压强较高，气泡迅即破灭。于是在局部地区产生高频率、高冲击力的水击，不断打击泵内部件，特别是工作叶轮，使其表面成为蜂窝状或海绵状。此外，在凝结热的助长下，活泼气体还对金属发生化学腐蚀，以致金属表面逐渐脱落而破坏。这种现象就是气蚀。

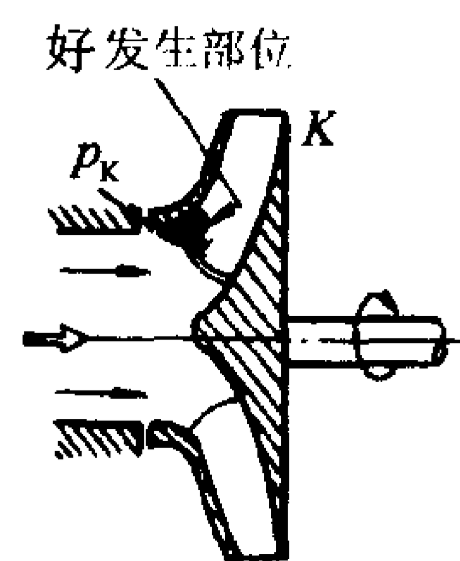


图 13-13 泵内易发生气蚀的部位

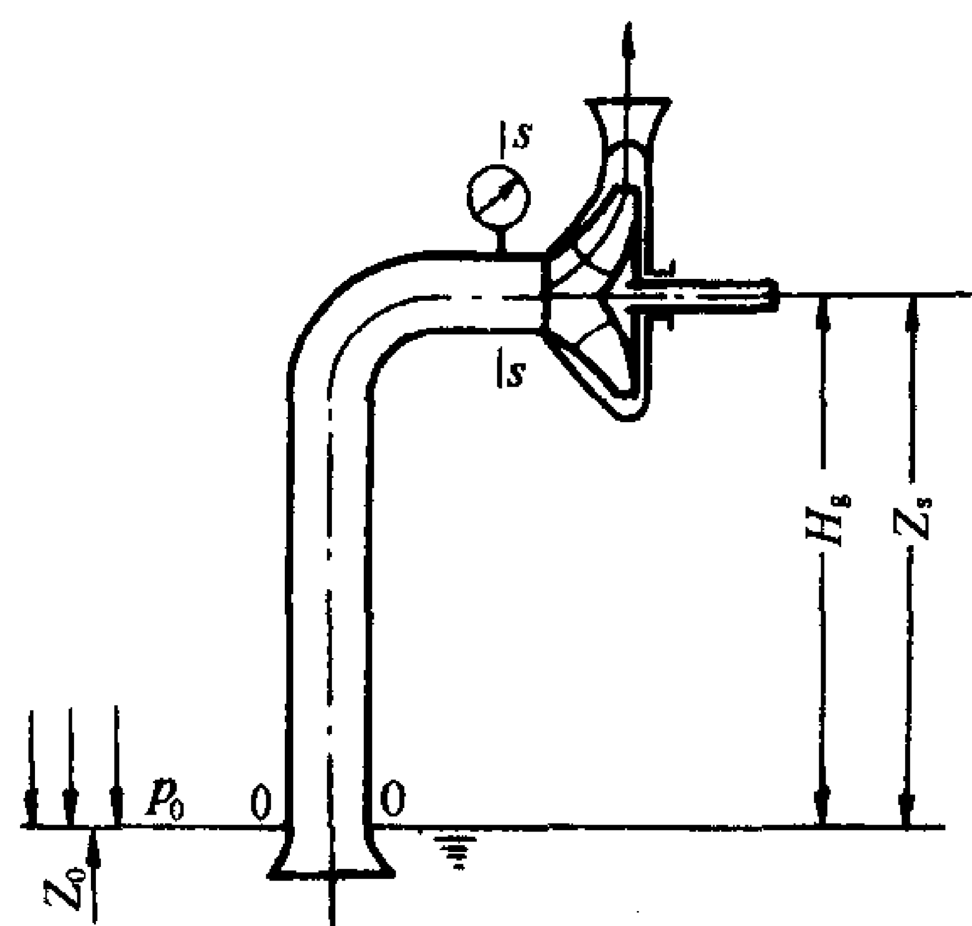


图 13-14 离心泵的几何安装高度

顾名思义，“气蚀”是指侵蚀破坏材料之意，它是“空（气）泡”现象所产生的后果。

产生“气蚀”的具体原因不外以下数种：

泵的安装位置高出吸液面的高差太大，即泵的几何安装高度 H_g(图 13-14)过大；

泵安装地点的大气压较低，例如安装在高海拔地区；

泵所输送的液体温度过高等。

二、泵的吸水高度 H_g

如上所述，正确决定泵吸入口的压强（真空度），是控制泵运行时不发生气蚀而正常工作的关键，它的数值与泵吸入侧管路系统及液池面压力等密切相关。

用能量方程不难建立求泵吸入口压强的计算公式。这里列出图 13-14 中吸液池面 0—0 和泵入口断面 $s—s$ 之间的能量方程：

$$Z_0+\frac{p_0}{\gamma}+\frac{v_0^2}{2g}=Z_s+\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}+\Sigma h_s$$

式中 Z_0、Z_s——液面和泵入口中心标高。$Z_s-Z_0=H_g$，单位为 m；

p_0、p_s——液面和泵吸入口处的液面压强，Pa；

v_0，v_s——液面处和泵吸入口的平均流速，m/s；

Σh_s——吸液管路的水头损失，m。

通常认为，吸液池面处的流速甚小，$v_0=0$，由此可得：

$$\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p_s}{\gamma}=H_g+\frac{v_s^2}{2g}+\Sigma h_s \tag{13-3-1}$$

此式说明，吸液池面与泵吸入口之间泵所提供的压强水头差，是使液体得以一定速度（泵吸入口处速度水头为$\frac{v_s^2}{2g}$），克服吸入管道阻力（Σh_s）而吸升 H_g 高度（又叫泵的安装高度）的原动力。

如果吸液池面受大气压 p_a 作用，即 $p_0=p_a$，则泵吸入口的压强水头$\frac{p_s}{\gamma}$就低于大气压的水头$\frac{p_a}{\gamma}$，这恰是泵吸入口处真空压力表所指示的吸入口压强水头 H_s（又称吸入口真空高度），其单位为 m。于是式(13-3-1)可改写成：

$$H_s=\frac{p_a-p_s}{\gamma}=H_g+\frac{v_s^2}{2g}+\Sigma h_s \tag{13-3-2}$$

通常，泵是在某一定流量下运转，则$\frac{v_s^2}{2g}$及管路水头损失Σh_s都应是定值，所以泵的吸入口真空度H_s将随泵的几何安装高度H_g的增加而增加。如果吸入口真空度增加至某一最大值H_{smax}(又叫极限吸入口真空度)时，即泵的吸入口处压强接近液体的汽化压力p_v时，则泵内就会开始发生气蚀。通常，开始气蚀的极限吸入口真空度H_{smax}值是由制造厂用试验方法确定的。显然，为避免发生气蚀，由(13-3-2)式确定的实际H_s值应小于H_{smax}值，为确保泵的正常运行，制造厂又在H_{smax}值的基础上规定了一个"允许"的吸入口真空度，用$[H_s]$表示，即:

$$H_s \leqslant [H_s] = H_{smax} - 0.3\text{m} \tag{13-3-3}$$

在已知泵的允许吸入口真空度$[H_s]$的条件下，可用公式(13-3-2)计算出"允许的"水泵安装高度$[H_g]$，而实际的安装高度H_g应遵守:

$$H_g < [H_g] \leqslant [H_s] - \left(\frac{v_s^2}{2g} + \Sigma h_s\right) \tag{13-3-4}$$

允许吸入口真空度$[H_s]$的修正:

第一，由于泵的流量增加时，自真空计安装点到叶轮进口附近，流体流动损失和速度头都增加，结果使叶轮进口附近k点的压强p_k更低了，所以$[H_s]$应随流量增加而有所降低(图13-15)。因此，用式(13-3-4)确定$[H_g]$时，必须以泵在运行中可能出现的最大流量为准。

第二，$[H_s]$值是由制造厂在大气压为101.325kPa和20℃的清水条件下试验得出的。当泵的使用条件与上述条件不符时，应对样本上规定的$[H_s]$值按下式进行修正。

$$[H_s'] = [H_s] - (10.33 - h_A) + (0.24 - h_v) \tag{13-3-5}$$

式中 $10.33 - h_A$——因大气压不同的修正值，其中h_A是当地的大气压强水头(m)，可由图13-16查得;

$0.24 - h_v$——因水温不同所作的修正值，其中h_v是与水温相对应的汽化压强水头(m)，可由表13-2查出。0.24为20℃水的汽化压强。

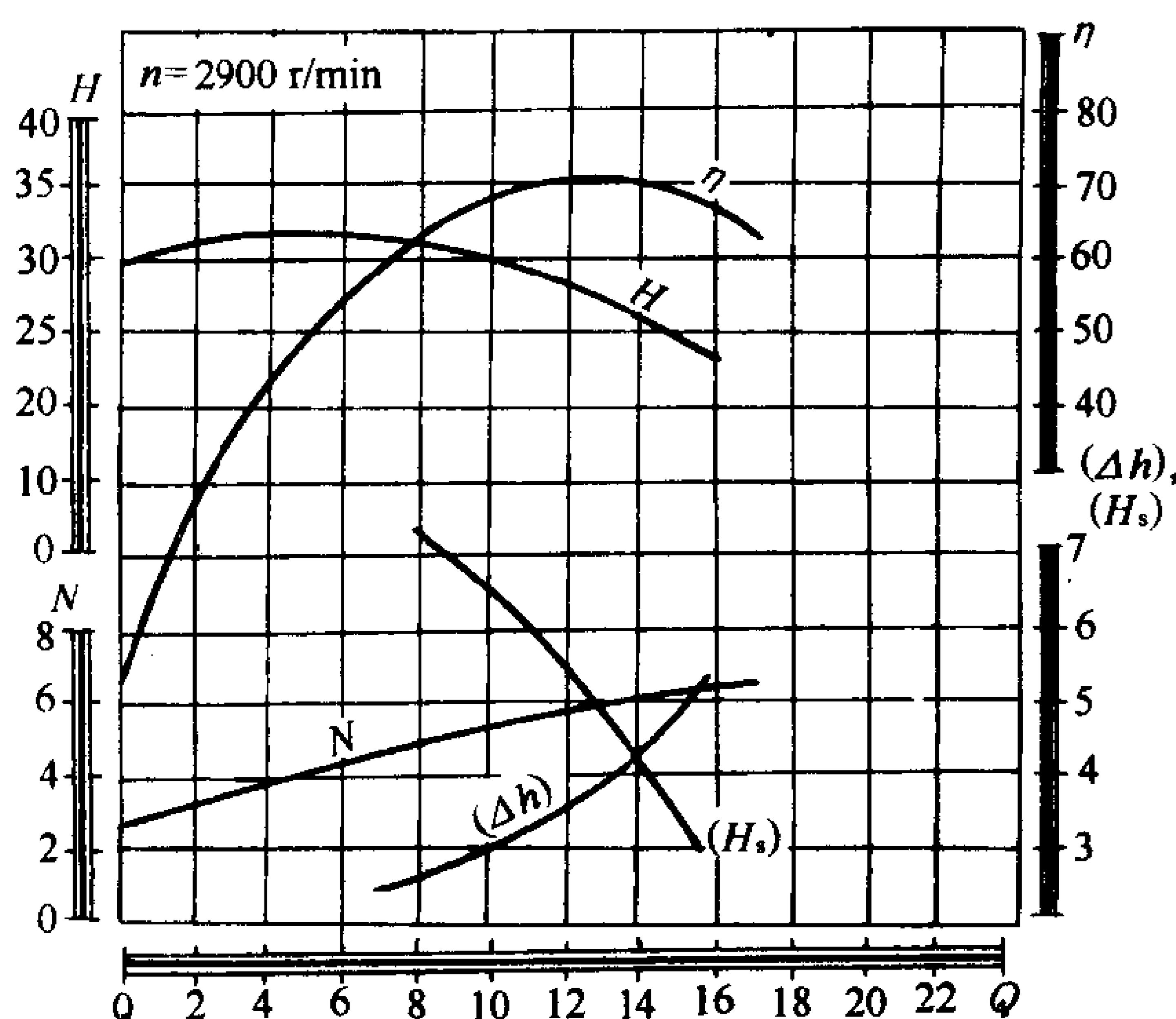


图13-15 离心式泵的Q—$[H_s]$和Q—$[\Delta h]$曲线简图

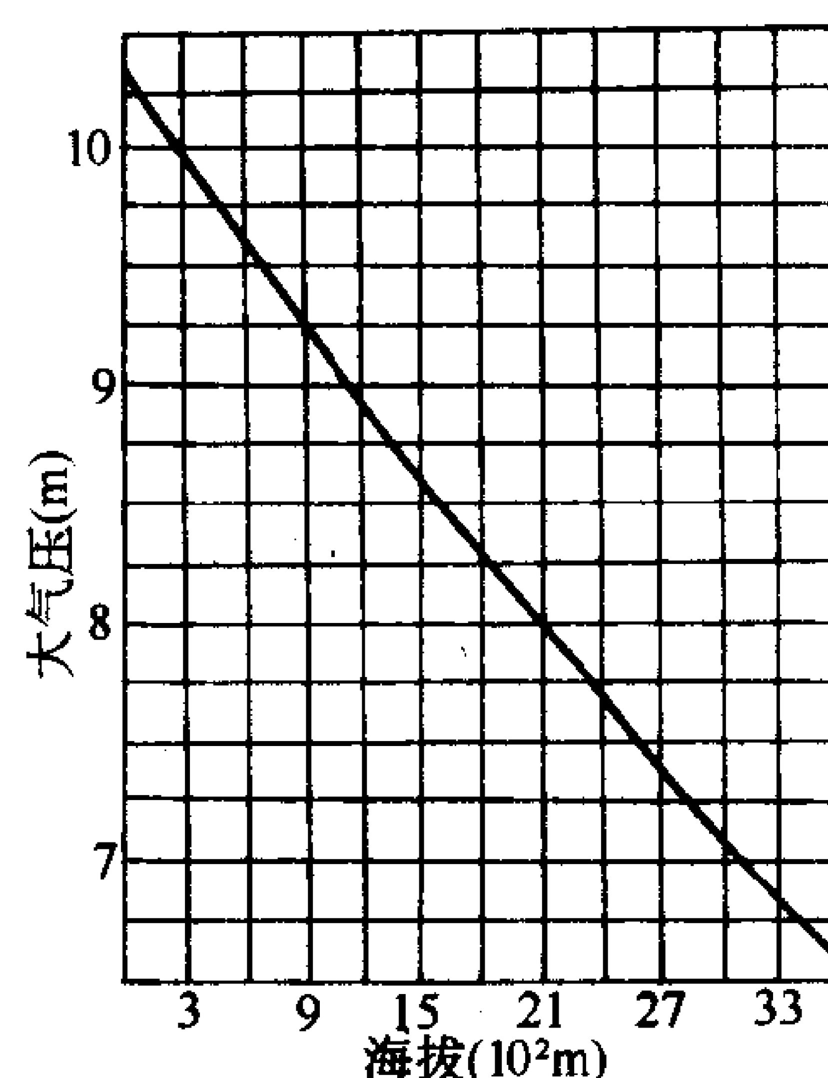


图13-16 海拔高度与大气压的关系

不同水温下的汽化压强表 表 13-2

水温(℃)	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
汽化压强 (kPa)	0.7	1.2	2.4	4.3	7.5	12.5	20.2	31.7	48.2	71.4	103.3

注意,一般卧式泵的安装高度 H_g 的数值,是指泵的轴心线距吸液池液面的高差;大型泵应以吸液池液面至叶轮入口边最高点的距离为准。

三、按气蚀余量确定泵的吸水高度 H_g

目前对泵内流体的空泡现象的理论研究或计算,大多数还是以液体汽化压强 p_v 作为发生空泡的临界压力。所以为避免发生空泡现象,至少应该使泵内液体的最低压强 p_{min}大于液体在该温度时的汽化压强 p_v,即 $p_{min}>p_v$。那么,泵内压强最低点在哪里?它的数值又是多少?

从液流进入水泵后的能量变化过程图(图 13-17)可以看出:

液体自吸入口 s 流进叶轮的过程中,在它还未被增压之前,因流速增大及流动损失,而使静压水头由$\frac{p_s}{\gamma}$降至$\frac{p_k}{\gamma}$。这说明泵的最低压强点不在泵的吸入口 s 处,而是在叶片进口的背部 k 点处。

k 点的压强 p_k 可由下式求出。

从泵吸入口 s 断面至叶片进口边前之 1 断面写出液流的能量方程("s"及"1"断面皆相对于固定坐标系)为:

$$Z_s+\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}=Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+h_{s\to1}$$

式中 Z_1、p_1、v_1——液流在叶片进口前 1 断面的标高、压强和速度;

$h_{s\to1}$——液流从 s 断面至 1 断面的水头损失。

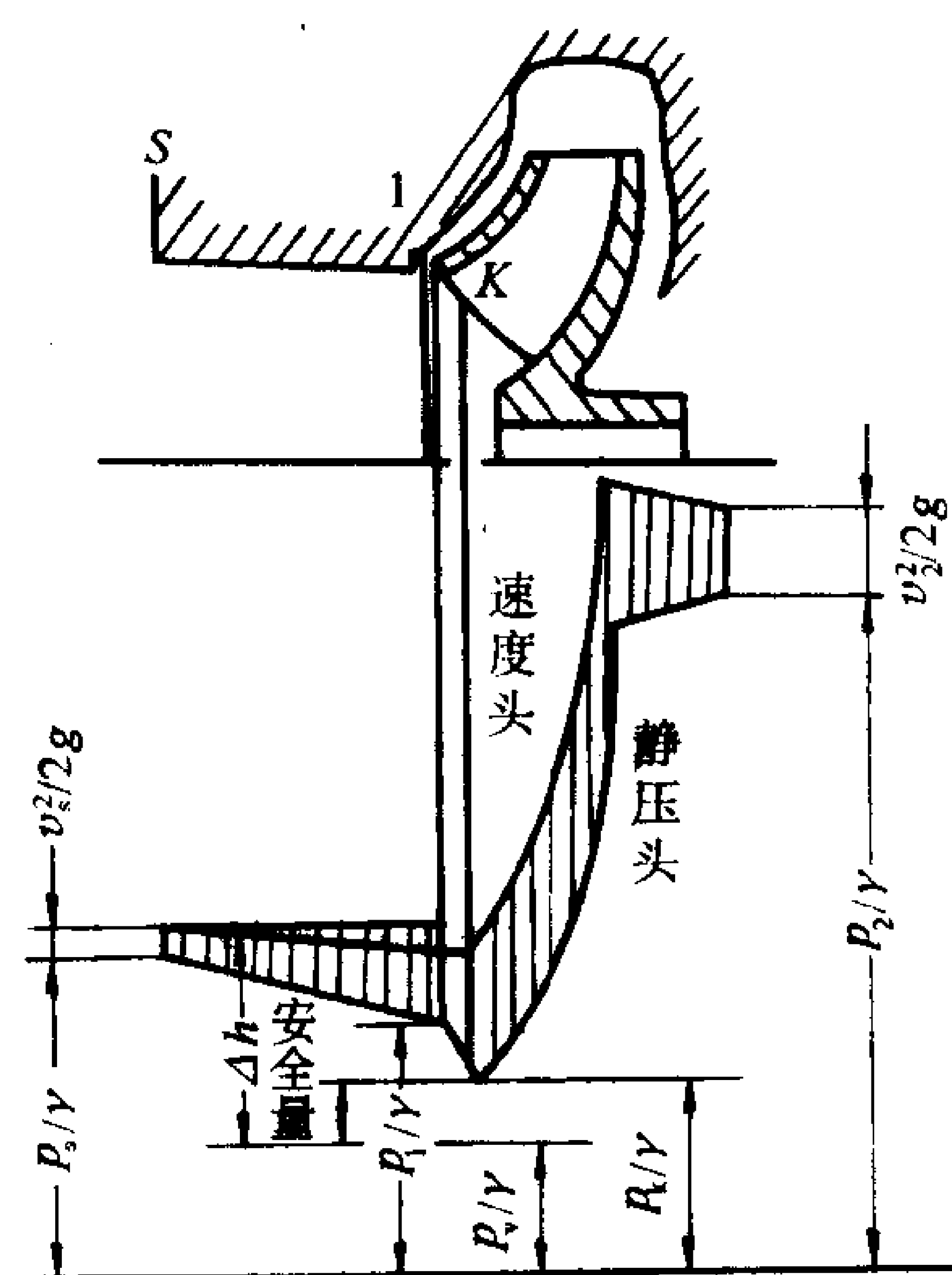


图 13-17 液流进入泵后的能量变化过程

当液流从 1 断面进入叶轮到 k 点时,它们的能量平衡关系就应该用相对运动的伯努利方程来表示。此方程不同于一般能量方程之处有两点:坐标系由固定转入运动;在方程中有能量输入项,在本例中即有离心力对单位重量流体所做的功$\frac{u_k^2-u_1^2}{2g}$。于是有:

$$Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{w_1^2}{2g}+\frac{u_k^2-u_1^2}{2g}=Z_k+\frac{p_k}{\gamma}+\frac{w_k^2}{2g}+h_{1\to k} \tag{13-3-6}$$

式中 Z_k、p_k、w_k、u_k——液流在 k 点的标高、压强、相对速度和圆周速度;

$h_{1\to k}$——液流自 1 断面至 k 点的水头损失。

合并上述两方程,经整理可得

$$\frac{p_k}{\gamma}=\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}-\left[(Z_k-Z_s)+\frac{w_k^2-w_1^2}{2g}+\frac{v_1^2}{2g}+\frac{u_1^2-u_k^2}{2g}+h_{s\to k}\right] \tag{13-3-7}$$

式中 $h_{s\to k}$——液流从 s 断面至 k 点的水头损失。

上式右端的前两项正是泵吸入口处流体所具有的总水头;方括号内的五项恰是液体由

泵吸入口 s 断面至 k 点的水头降低值，并用$\frac{\Delta p}{\gamma}$代表，即：

$$\frac{p_k}{\gamma}=\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}-\frac{\Delta p}{\gamma}$$

当 k 点的液体压强 p_k 等于该温度下的汽化压强 p_v 时，即 $p_k=p_v$ 时，液体就开始发生汽化，造成气蚀，这是一个临界状态，在临界状态下，即有：

$$\left(\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}\right)-\frac{p_v}{\gamma}=\frac{\Delta p}{\gamma} \tag{13-3-8}$$

该式左面括号内两项和是泵吸入口的总水头，由公式(13-3-1)看出，它只取决于吸入管的吸水高度 H_g、吸液池液面压强 p_a 及吸入管道的阻力 Σh_s。于是，等式左端就代表液体自吸液池经吸水管到达泵吸入口，所剩下的总水头距发生汽化的水头尚剩余的水头值——实际气蚀余量 Δh。

如果实际气蚀余量 Δh，正好等于泵自吸入口 s 到压强最低点 k 之水头降$\frac{\Delta p}{\gamma}$时，就刚好发生气蚀，当 $\Delta h>\frac{\Delta p}{\gamma}$时，就不会产生气蚀。所以人们把$\frac{\Delta p}{\gamma}$又叫做临界气蚀余量$\Delta h_{min}$。

在工程实践中，为确保安全运行，规定了一个必需的气蚀余量，以$[\Delta h]$表示。对于一般清水泵来说，为不发生气蚀，又增加了 0.3m[1] 的安全量，故有：

$$[\Delta h]=\Delta h_{min}+0.3=\frac{\Delta p}{\gamma}+0.3 \tag{13-3-9}$$

在实际工程中，就整个泵装置而言，显然应使泵入口处的实际汽蚀余量 Δh 值符合下述安全条件，以便液体在流动过程中，自泵入口 s 到最低压头点 k，水头降低了$\frac{\Delta p}{\gamma}$后，最低的压强还高于气化压强 p_v。

$$\Delta h=\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}-\frac{p_v}{\gamma}\geqslant[\Delta h]=\Delta h_{min}+0.3 \tag{13-3-10}$$

式中每一项均应以 m 为单位。

应当指出，和$[H_s]$相仿，$[\Delta h]$也随泵流量的不同而变化。图 13-15 所示的泵的性能曲线中绘有一条 Q—$[\Delta h]$曲线，可以看出当流量增加时，必需的气蚀余量$[\Delta h]$将急剧上升。忽视这一特点，常是导致泵在运行中产生噪声、振动和性能变坏的原因。特别是在吸升状态和输送温度较高的液体时，要随时注意泵的流量变化引起的运行状态的变化。

将式(13-3-1)变换为$\frac{p_s}{\gamma}$的表达式，然后代入式(13-3-10)，可得：

$$\Delta h=\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p_v}{\gamma}-H_g-\Sigma h_s \tag{13-3-11}$$

可以进一步用$[\Delta h]$来表达泵的允许几何安装高度$[H_g]$。为此，在式(13-3-11)中用$[\Delta h]$代替 Δh，同时应以$[H_g]$代替 H_g，于是得出：

$$[H_g]=\frac{p_0-p_v}{\gamma}-\Sigma h_s-[\Delta h] \tag{13-3-12}$$

[1] 对于锅炉给水泵、冷凝泵等，制造厂只直接提供试验所得的 Δh_{min}值，而由用户自行决定安全量。

此式与式(13-3-4)有相同的实用意义，只不过是从不同的角度用来确定泵的几何安装高度 H_g 值。

值得说明：Δh_{min}就是液体流入泵后，在其还未被叶轮增压前，所降低的水头值$\frac{\Delta p}{\gamma}$，它是因流速增大和水力损失而引起的，而影响这一水头降的主要因素，是泵吸入室与叶轮进口的几何形状和流速，所以它与泵的结构有关，而与吸水管系统和液体性质等参数无关，它的数值大小，在一定程度上反映了泵抗气蚀能力的高低。

四、泵的几种不同的吸入管段装置

以上的阐述是以泵的安装位置比吸液面高的情况(图 13-10)为例的，即吸入管段是用来吸升液体的。这是一种最常见的泵装置形式。

还可能遇到泵安装在吸液面下方的情况，例如采暖系统的循环泵。此外，吸液面压强有可能不是大气压，而是对于某种汽化压力之下。这意味着泵所吸入的介质本身处于液、汽两相的汽化状态。例如锅炉给水泵和冷凝水泵的吸液面压强常处于汽化压力之下。这两种吸入管段都属于“灌注式”(图13-18)。

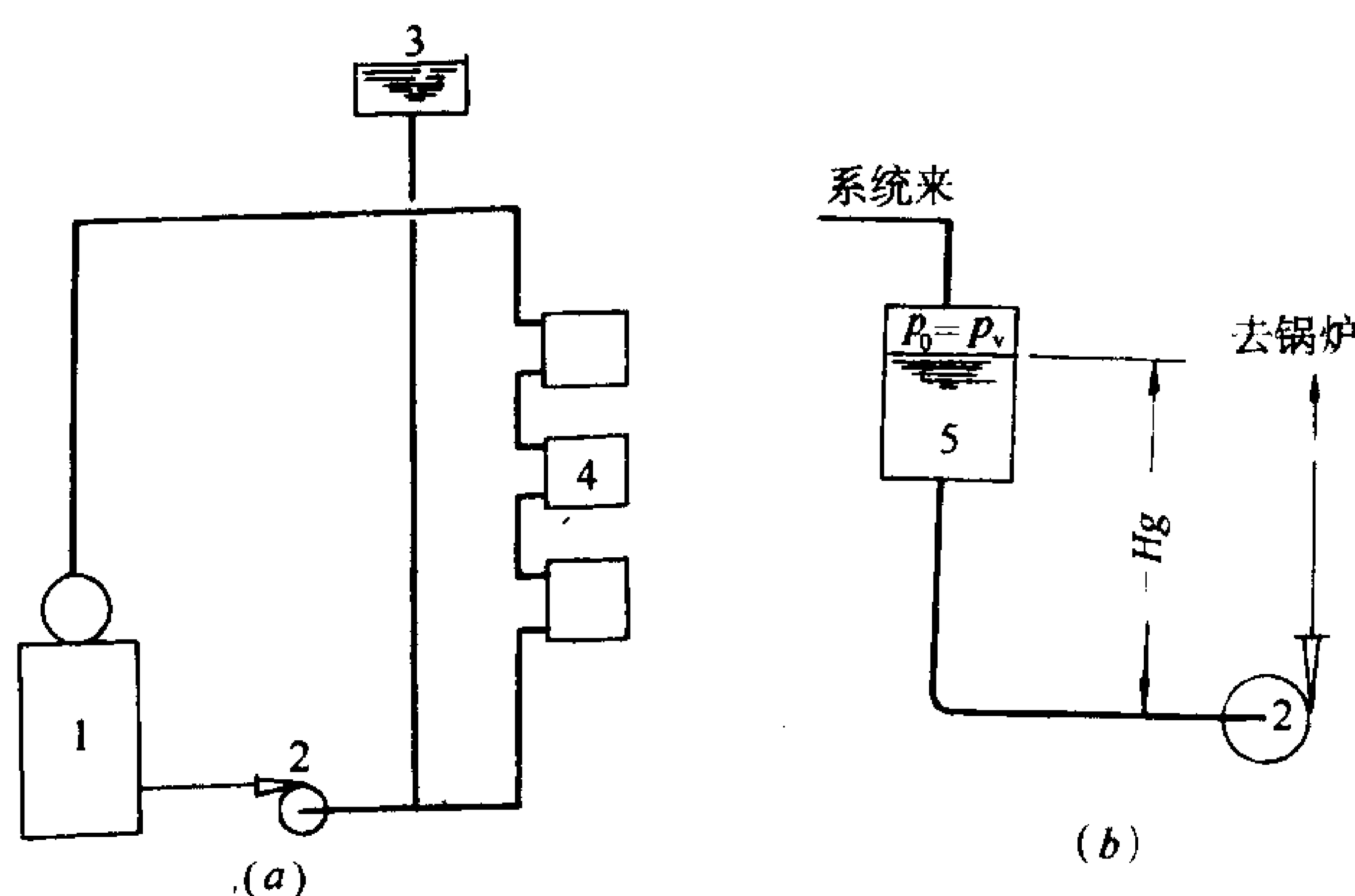


图 13-18　泵的灌注式吸入管段

(a)采暖系统的循环泵装置；(b)锅炉冷凝水泵装置

1—锅炉；2—循环水泵；3—膨胀水箱；4—暖汽片；5—冷凝水箱

究竟在什么情况下要采用灌注式吸入管段装置呢？这必须根据式(13-3-4)、(13-3-5)或(13-3-12)作出技术上的判断。

例如，图 13-18b 的锅炉冷凝水泵装置中，冷凝水箱中液面压强 p_0 常常等于汽化压力 p_v，则按式(13-3-12)可求出“允许”的水泵吸上高度$[H_g]$求判断：

$$[H_g]=-([\Delta h]+h_1)=-(\Delta h_{min}+h_1+0.3)$$

计算所得为负的$[H_g]$值就表明泵的安装位置必须处于冷凝水箱液面的下方，从而使泵处于灌注式吸入管段下工作，才能保证泵内不致发生气蚀。

综上所见：既使泵吸送 5℃ 的冷水，从水泵允许吸上高度$[H_g]$的(13-3-12)式可看出$[H_g]<10.33$m(大气压强水头)。这就是说：无论扬程多高的离心泵也不能将水从 10m 以下的井中把水吸上来，但水泵的压送高度将不受此限。为此，当拟从深度大于 10m 的深井中取水时，就需将泵装于井内，于是便产生了“深井泵”(详见第十四章)。

【例 13-2】 有一台吸入口径为 600mm 的双吸单级泵，输送常温清水，其工作参数为 $Q=880$l/s，允许吸上真空高度为 3.5m，吸入管段的阻力估计为 0.4m，求：

(1) 如几何安装高度为 3.0m 时，该泵能否正常工作？

(2) 如该泵安装在海拔为 1000m 的地区，抽送 40℃ 的清水，允许的几何安装高度为若干？

【解】 (1) 先求泵的入口流速。

$$v_s=\frac{Q}{A}=\frac{\frac{880}{1000}\times 4}{(0.6)^2\pi}=3.1\text{m/s}$$

相应的速度水头为：

$$\frac{v_s^2}{2g}=\frac{3.1\times3.1}{2\times9.8}=0.49\text{m}$$

根据式(13-2-4)计算允许几何安装高度为：

$$[H_g]=[H_s]-\frac{v_s^2}{2g}-h_1=3.5-0.49-0.4=2.61\text{m}$$

因为 $H_g=3.0>[H_g]$，故该泵不能进行正常工作。

(2) 由图 13-16 查出海拔 1000m 处的大气压为 9.2m，根据表 13-2 查得水温 40℃时的汽化压力为 0.75m，按式(13-3-5)求出修正后的允许吸上真空高度为：

$$[H'_s]=[H_s]-[10.33-h_A]+(0.24-h_v)$$

$$=3.5-10.33+9.2+0.24-0.75=1.86\text{m}$$

将求得的$[H'_s]$代替式(13-3-4)中的$[H_s]$，计算出允许的几何安装高度：

$$[H_g]=[H'_s]-\frac{v_1^2}{2g}-h_1=1.86-0.49-0.4=0.97\text{m}$$

【例 13-3】 有一单吸单级离心式泵，流量 $Q=68\text{m}^3/\text{h}$，$\Delta h_{\min}=2\text{m}$，从封闭容器中抽送温度为 40℃的清水，容器中液面压强为 8.829kPa，吸入管段阻力为 0.5m，试求该泵允许几何安装高度是多少？水在 40℃时的密度为 992kg/m³。

【解】 从表 13-2 查得水在 40℃时的汽化压力相当于 $h_v=0.75\text{m}$，根据式(13-3-12)及式(13-3-9)可求出$[H_g]$：

$$[H_g]=\frac{p_0-p_v}{\gamma}-h_1-(\Delta h_{\min}+0.3)$$

$$=\frac{8829}{992\times9.81}\ \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/m}^3\cdot\text{m/s}^2}-0.75-0.5-2-0.3$$

$$=0.91-0.75-0.5-2-0.3=-2.64\text{m}$$

计算结果$[H_g]$为负值，故该泵的轴中心至少位于容器液面以下 2.64m。

五、离心式泵的安装与运行

通过以上的研究，可以看出泵在安装与运行方面有一定的要求。

离心式泵的吸升管段在安装上显然应当避免漏气，管内要注意不能积存空气。否则会破坏泵入口处的真空度，甚至导致断流。因此要特别注意水平段，除应有顺流动方向的向上坡度外，要避免设置易积存空气的部件。底阀应淹没于吸液面以下一定的深度。不能在吸入管段上设置调节阀门，因为将使吸入管路的阻力增加；在阀门关小时，会使吸上真空度增大以致提前发生汽蚀。

有吸升管段的离心泵装置中，启动前应先向泵及吸入管段中充水，或采用真空泵抽除泵内和吸入管段中的空气。采用后一种方法时，可以不设底阀，以便减少流动阻力和提高几何安装高度。为了避免原动机过载，泵应在零流量下启动，而在停车前，也要使流量为零，以免发生水击。

第四节　离心式风机的构造特点

离心式风机输送气体时，一般的增压范围在 9.807kPa(1000mmH₂O)以下。

根据增压大小，离心风机又可分为：

（1）低压风机：增压值小于1000Pa（约100mmH_2O）；

（2）中压风机：增压值自1000至3000Pa（约100至300mmH_2O）；

（3）高压风机：增压值大于3000Pa（约300mmH_2O以上）。

低压和中压风机大都用于通风换气，排尘系统和空气调节系统。高压风机则用于一般锻冶设备的强制通风及某些气力输送系统。

我国还生产许多专门用于排尘、输送煤粉、锅炉引风、排酸雾和防爆、防腐用的各种专用风机。

最近国内又推出了一种外转子离心风机，它相当于将电动机的转子固定，定子直接嵌装风机叶轮而转动，这样就把电机装入风机机壳内了。

离心式风机的整机构造可以参考图11-1所示的分解图。根据用途不同，风机各部件的具体构造也有所不同，分别介绍如下。

一、吸入口

吸入口可分圆筒式、锥筒式和曲线式数种（图13-19）。吸入口有集气的作用，可以直接在大气中采气，使气流以损失最小的方式均匀流入机内。某些风机的吸入口与吸气管道用法兰直接连接。

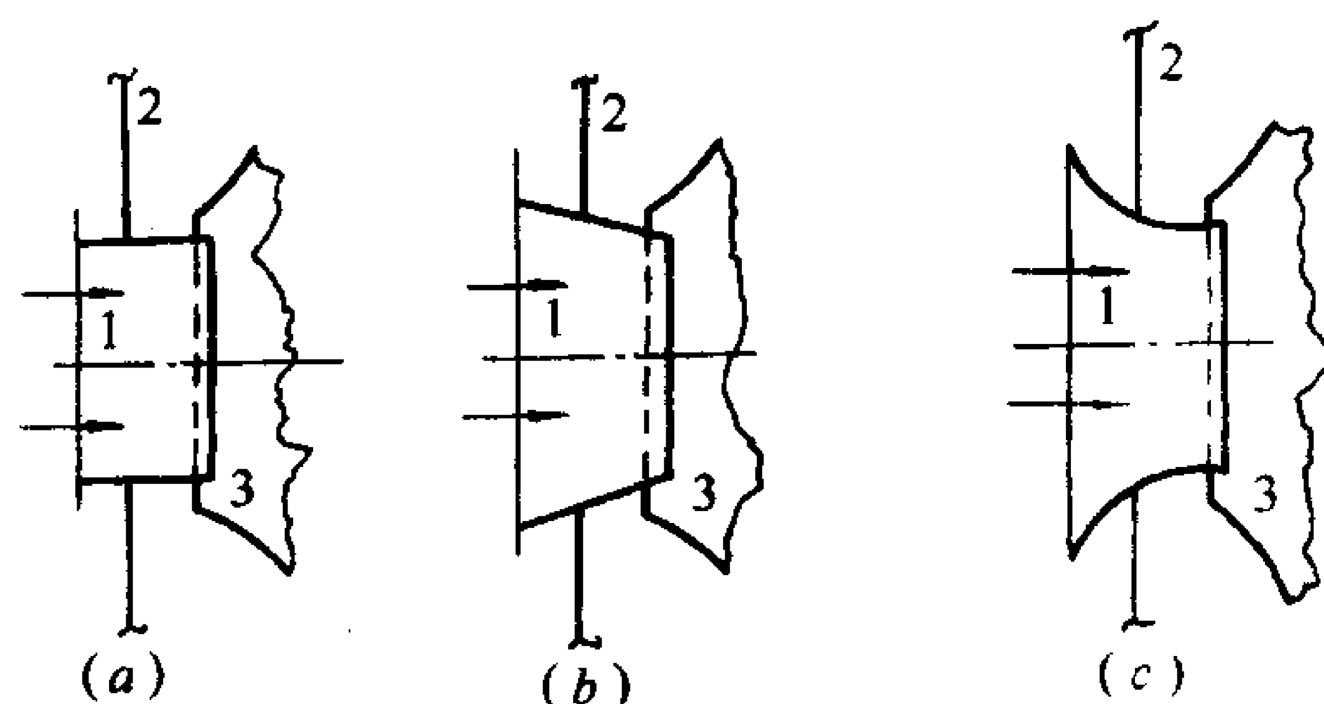


图13-19 离心式风机的吸入口
（a）圆筒式；（b）锥筒式；（c）曲线式
1—吸入口；2—机壳；3—叶轮

二、叶轮

叶轮的构造曾在第十一章第一节中有所介绍。如前所述，它由前盘、后盘、叶片和轮毂所组成。还曾指出叶片可分为前向、径向和后向三种类型（参见图13-20）。

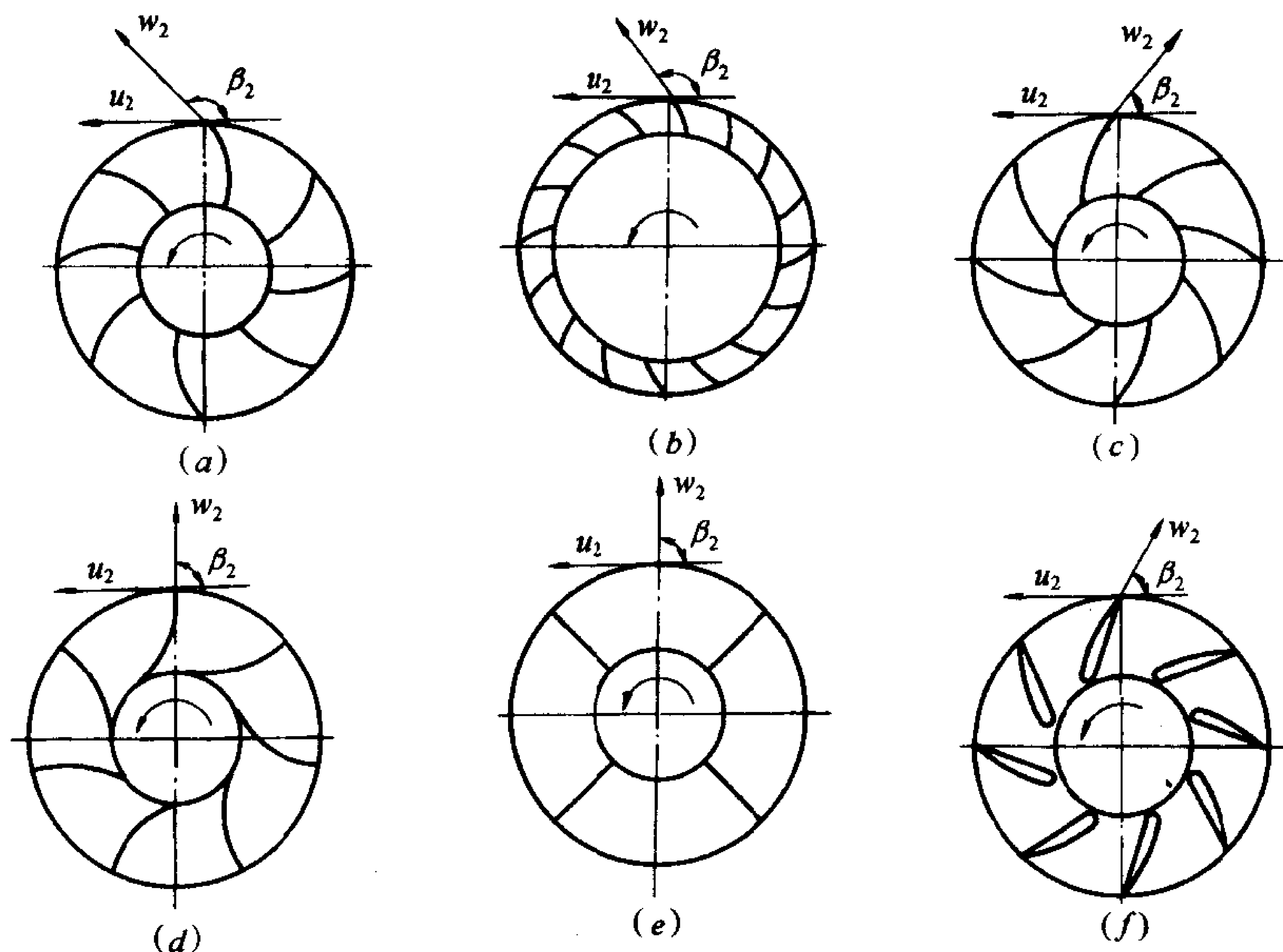


图13-20 离心式风机的几种叶型
（a）前向叶型叶轮；（b）多叶前向叶型叶轮；（c）后向叶型叶轮；
（d）径向弧形叶轮；（e）径向直叶式叶轮；（f）机翼型叶轮

防爆风机是由有色金属制成的，防腐风机则以塑料板材为材料。

三、机壳

中压与低压离心式风机的机壳一般是阿基米德螺线状的。它的作用是收集来自叶轮的气体，并将部分动压转换为静压，最后将气体导向出口。

机壳的出口方向一般是固定的。但新型风机的机壳能在一定的范围内转动，以适应用户对出口方向的不同需要。

四、支承与传动方式

我国离心式风机的支承与传动方式已经定型，共分 A、B、C、D、E 及 F 六种型式(图 13-21及表 13-3)。

基本结构型式 **及表 13-3**

型式	A 型	B 型	C 型	D 型	E 型	F 型
结构						
特点	叶轮装在电机轴上	叶轮悬臂，皮带轮在两轴承中间	叶轮悬臂，皮带轮悬臂	叶轮悬臂，联轴器直联传动	叶轮在两轴承中间，皮带轮悬臂传动	叶轮在两轴承中间，联轴器直联传动

图 13-21

第五节 通风机的安装

通风机和风管系统的不合理的连接可能使风机性能急剧地变坏，因此在通风机与风管连接时，要使空气在进出风机时尽可能均匀一致，不要有方向或速度的突然变化。图 13-22

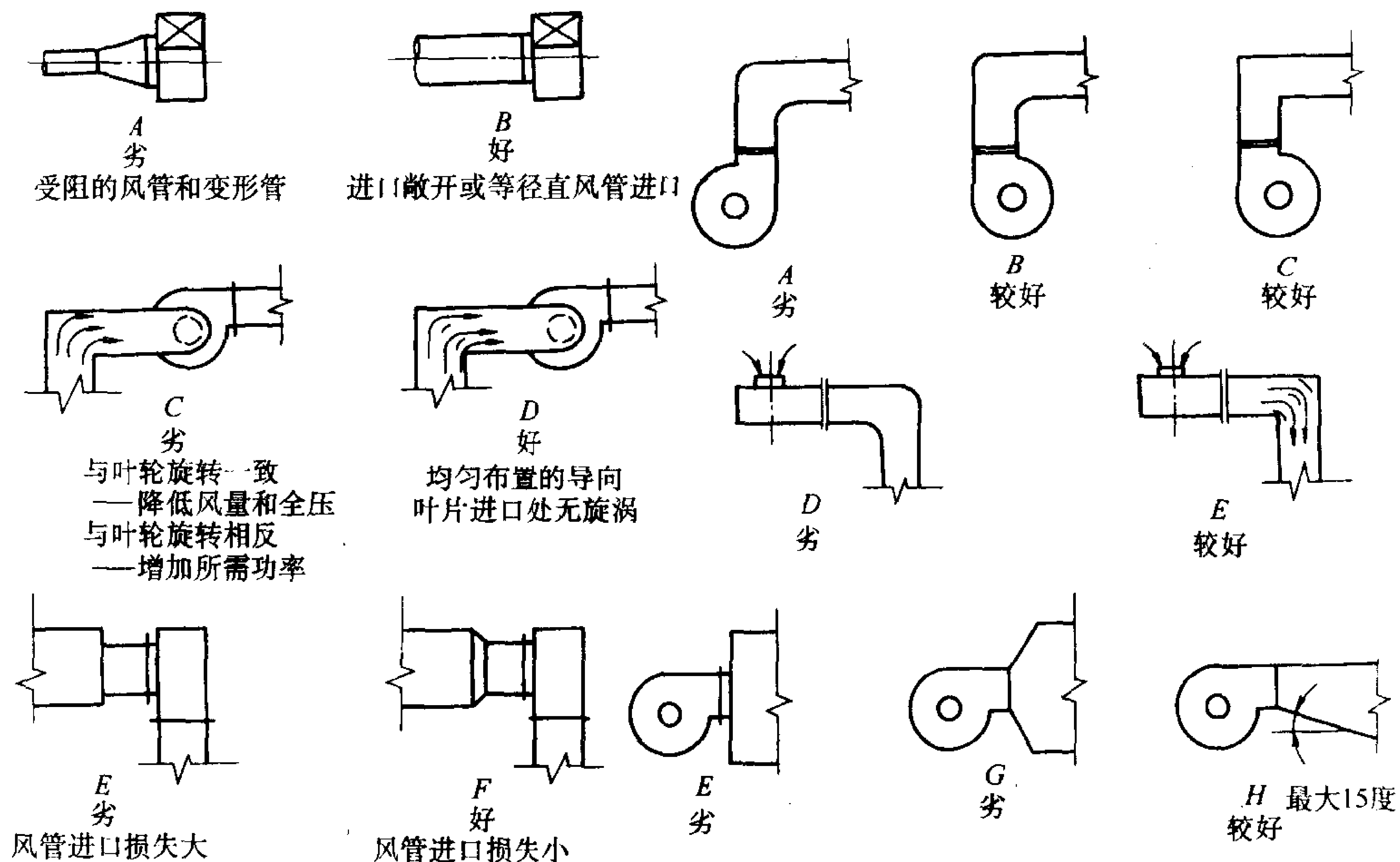


图 13-22 通风机进出风口连接之优劣比较

上比较了一些好的和不好的连接方式。

安装风机的空间通常是有限的,有时就有可能不得不采用不太理想的连接方式。在这种情况下设计者必须预期到将发生的性能恶化。

第六节　风机通用性能曲线图与选择性能曲线图

一、风机的通用性能曲线图

在第十一章第九节中曾提到泵或风机的性能曲线换算方法(图 11-30),已经建立起相似工况点与等效率曲线的概念。但是根据相似律推导出来的等效率曲线是一簇交于原点的二次曲线(如图 13-23 中的虚线)。事实上当转速增加时,水力损失必然上升;而转速降低时,消耗功率减少而机械损失相对增加。凡此种种都将影响风机的总效率。实践证明,对于同一型号风机的效率最高点只出现在某一定的转速下,而在其它转速时的效率均将较低。于是对于某一机号的风机而论,等效率曲线将如该图中的实线所示。此图就是在第十一章第五节中提到的风机的通用性能曲线图的原始状态。

在风机样本中,常将同一型号的风机,以最高效率点 ± 10% 的范围所包括的一段 $Q—p$ 曲线,按不同的转速排列在同一张坐标图上。这种图采用对数尺度,等效率曲线就变成直线,如图 13-24 所示。在样本中把这样的通用性能曲线叫做“选择性能曲线”。图的用法与一般性能曲线相同。

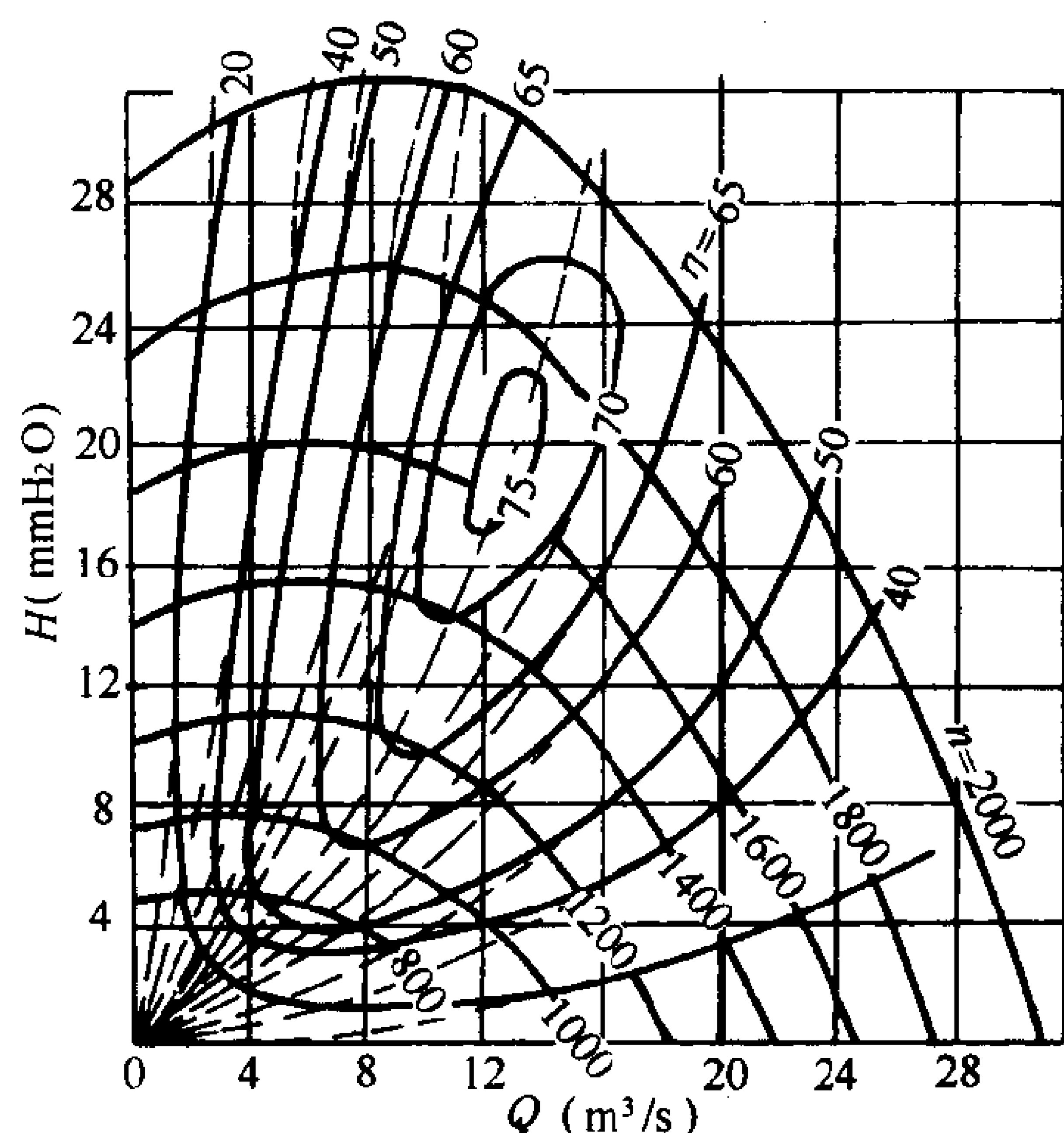


图 13-23　风机的通用性能曲线

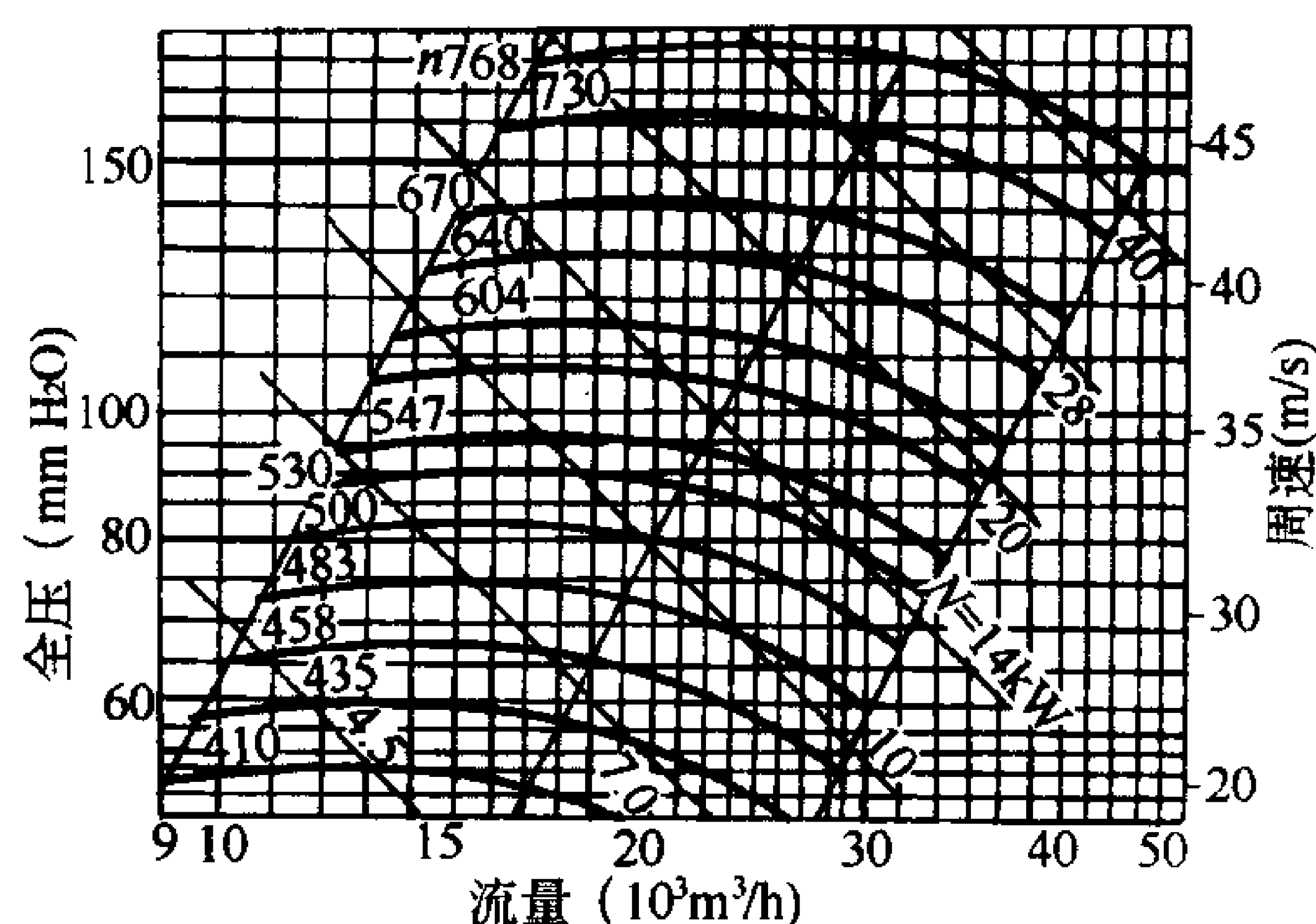


图 13-24　6-46-11№12 离心风机选择性能曲线图

二、8-23-11№3～5 型离心式通风机选择性能曲线

风机样本中的选择曲线的另一种形式是将某一系列大小不同机号的风机在若干不同的转速下的最佳工况的一段 $Q—p$ 曲线绘在同一张 $Q—p$ 坐标图上组成的。图上也是按对数尺度绘制的。某些选择曲线图直接将本附录中所述大小不同机号的通用性能曲线组合在同一图上,因而这种图又叫做“组合性能曲线图”(如图 13-25)。

图中标有机号的直线就是最高效率的等效率曲线。此线与各 $Q—p$ 线的交点表明了某一风机在不同转速下具有的(最高)效率相等的相似工况点,如图中的 A、B 及 C 点。A 点的转速为 2500r/min,B 点则为 2000r/min,C 点为 2800r/min。为了便于查找,图上将等

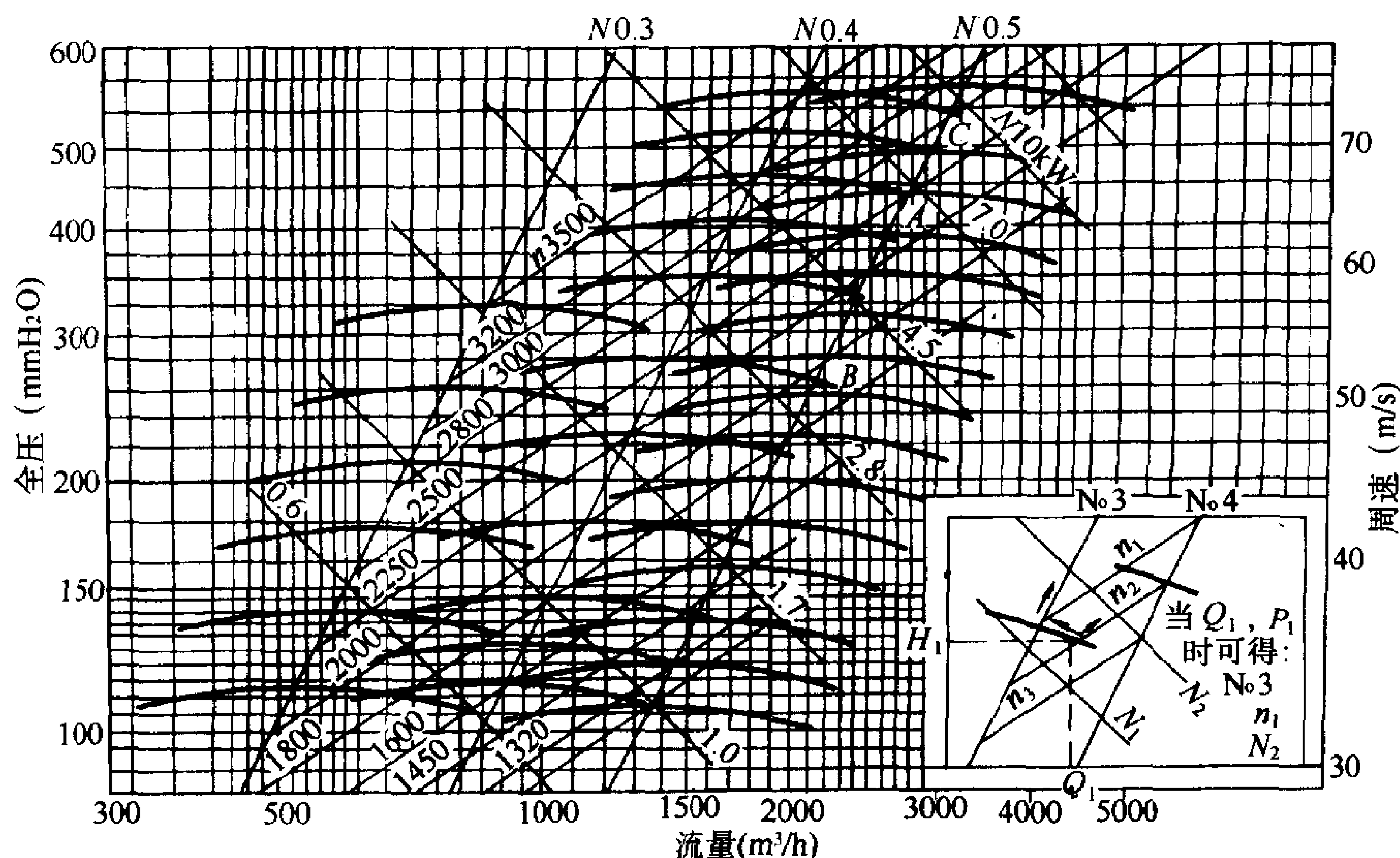


图 13-25　8-23-11No3～5 选择性能曲线图

效率线上转速相同的各点连结起来组成等速线；还加绘了等轴功率线；在图的右侧标有叶轮外径的圆周速度尺度。此图右下角绘有图的使用方法，不另说明。

实际上图中的 $Q—p$ 曲线上所代表的各性能点都是与本附录中的性能选用件表所列的性能参数相同的。由于图的尺寸往往过小，从图中查出的性能参数与性能选用件表中数据有出入时，应以后者为准。

水泵也有类似的选择性能曲线图。有的还绘有叶轮经过切削的性能曲线。

三、风机的静压与静压效率

对于风机来说，被输送气体的流速相对地较高，以致动压头(速度水头)在总压(水)头中占有相当的比重，而静压头(压强水头)较少。某些风机的性能曲线图上，常绘有流量—静压曲线，即 $Q—p_j$ 曲线。有的还绘有流量—静压效率(η_j)曲线(如图 13-26)。

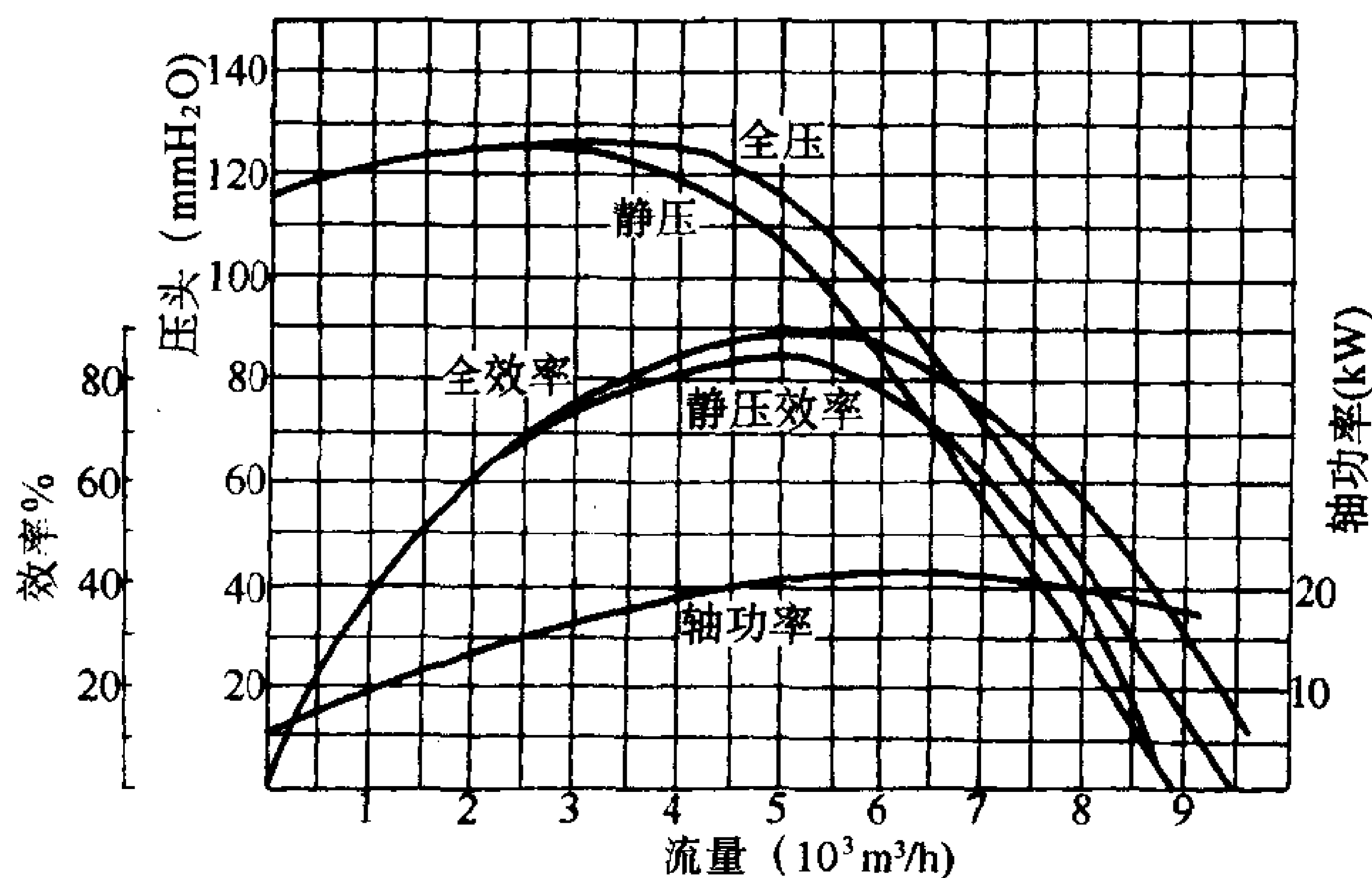
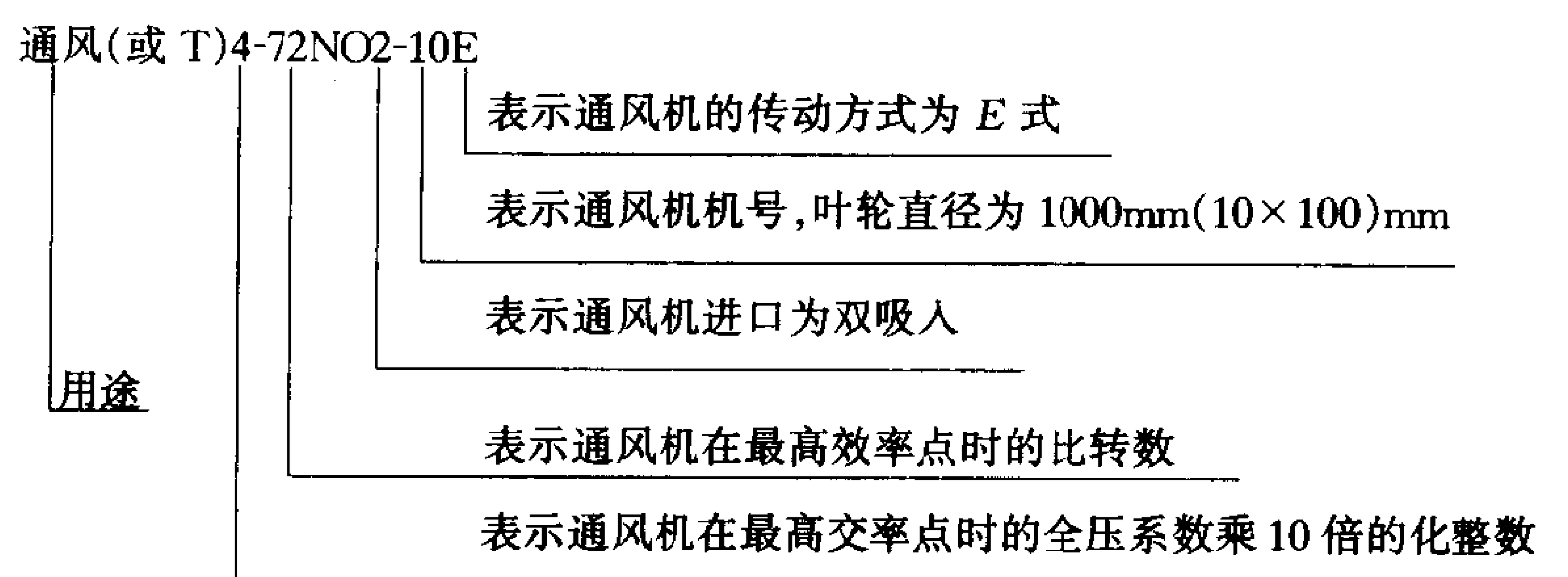


图 13-26　离心式风机的流量—静压曲线与流量—静压效率曲线

四、离心通风机的命名

离心式通风机的完全称呼包括：名称、型号、机号、传动方式、旋转方向和出风口位置计六个部分，一般书写顺序如下：



离心通风机出风口位置如图 13-27。

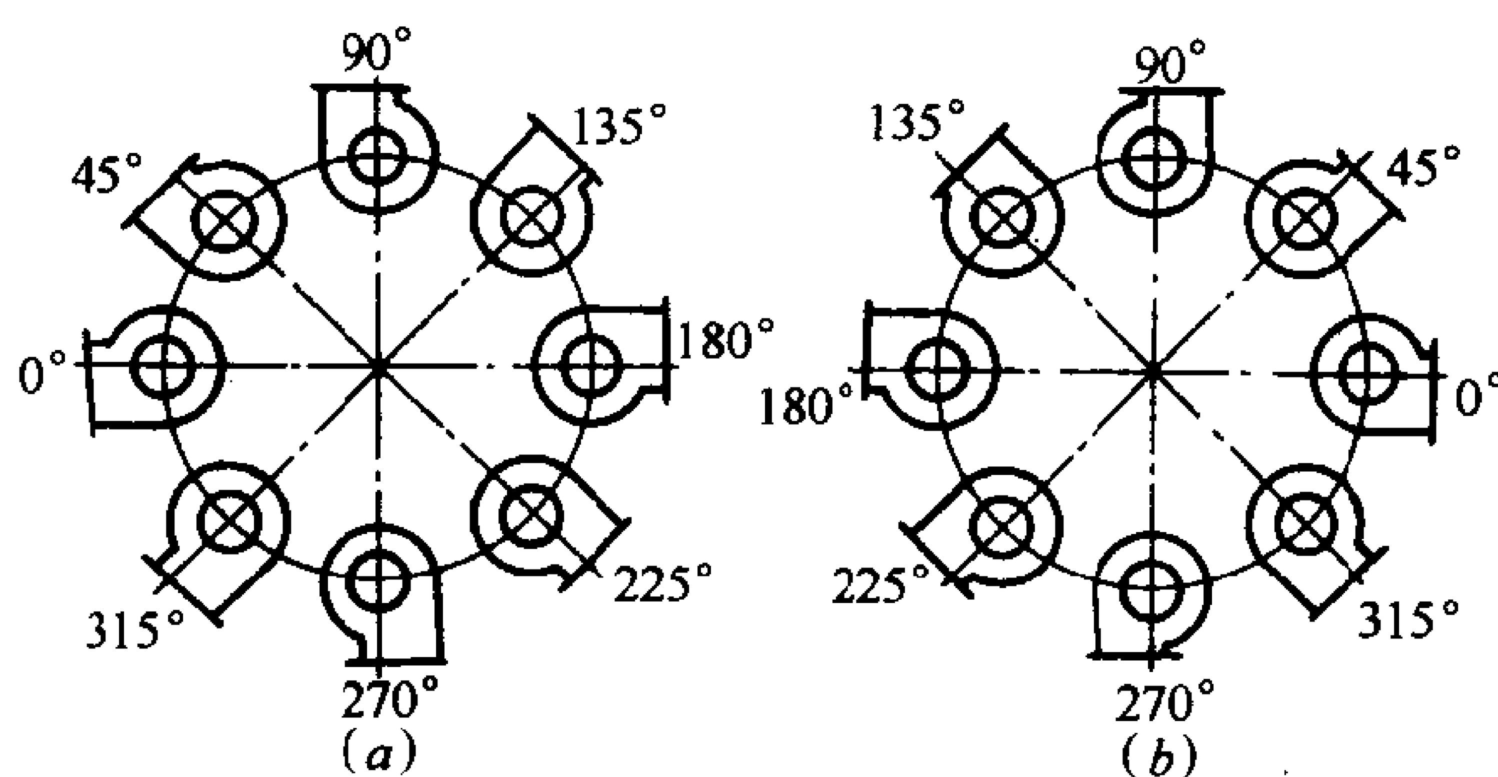


图 13-27 出风口位置

(a)右转风机;(b)左转风机

叶轮旋转方向代号从传动轮或电机位置看轮子顺时针转为“右”,否则为“左”。

第七节 泵或风机的选择

由于泵或风机装置的用途和使用条件千变万化,而泵或风机的种类又十分繁多,故合理地选择其类型或型式及决定它们的大小,以满足实际工程所需的工况是很重要的。

在选用时应同时满足使用与经济两方面的要求。具体方法步骤归纳如下:

一、选类型

首先应充分了解整个装置的用途,管路布置、地形条件、被输送流体的种类、性质以及水位高度等原始资料。

例如,在选风机时,应弄清被输送的气体性质(如清洁空气、烟气、含尘空气或易燃易爆及腐蚀性气体等),以便选择不同用途的风机。

同理,在选水泵时,也应弄清被输送液体的性质,以便选择不同用途的水泵(如清水泵、污水泵,锅炉给水泵、冷凝水泵、氨水泵等)。

常用各类水泵与风机性能及适用范围,见表 13-4 及表 13-5。

常用水泵性能及适用范围表(示例) **表 13-4**

型号	名称	扬程范围 (m)	流量范围 (m^3/h)	电机功率 (kW)	介质最高温度(℃)	适用范围
BG	管道泵	8~30	6~50	0.37~7.5	4~2m	输送清水或理化性质类似的液体,装于水管上
NG	管道泵	2~15	6~27	0.20~1.3	95~150	输送清水或理化性质类似的液体,装于水管上

续表

型号	名称	扬程范围(m)	流量范围(m^3/h)	电机功率(kW)	介质最高温度(℃)	适用范围
SG	管道泵	10～100	1.8～400	0.50～26		有耐腐型、防爆型、热水型,装于水管上
XA	离心式清水泵	25～96	10～340	1.50～100	105	输送清水或理化性质类似的液体
IS	离心式清水泵	5～25	6～400	0.55～110	气蚀余量 2m	输送清水或理化性质类似的液体
BA	离心式清水泵	8～98	4.5～360	1.5～55	80	输送清水或理化性质类似的液体
BL	直联式离心泵	8.8～62	4.5～120	1.5～18.5	60	输送清水或理化性质类似的液体
Sh	双吸离心泵	9～140	126～12500	22～1150	80	输送清水,也可作为热电站循环泵
D,DG	多级分段泵	12～1528	12～700	2.2～2500	80	输送清水或理化性质类似的液体
GC	锅炉给水泵	46～576	6～55	3～185	110	小型锅炉给水
N,NL	冷凝泵	54～140	10～510		80	输送发电厂冷凝水
J,SD	深井泵	24～120	35～204	10～100		提取深井水
4PA-6	氨水泵	86～301	30	22～75		输送20%浓度的氨水,吸收式冷冻设备主机

常用通风机性能及适用范围表(示例) **表 13-5**

型号	名称	全压范围 Pa	风量范围(m^3/h)	功率范围(kW)	介质最高温度(℃)	适用范围
4-68	离心通风机	170～3370	565～79000	0.55～50	80	一般厂房通风换气、空调
4-72-11	塑料离心风机	200～1410	991～55700	1.10～30	60	防腐防爆厂房通风排气
4-72-11	离心通风机	200～3240	991～227500	1.1～210	80	一般厂房通风换气
4-79	离心通风机	180～3400	990～17720	0.75～15	80	一般厂房通风换气
7-40-11	排尘离心通风机	500～3230	1310～20800	1.0～40		输送含尘量较大的空气
9-35	锅炉通风机	800～6000	2400～150000	2.8～570		锅炉送风助燃
Y4-70-11	锅炉引风机	670～1410	2430～14360	3.0～75	250	用于1～4t/h的蒸汽锅炉
Y9-35	锅炉引风机	550～4540	4430～473000	4.5～1050	200	锅炉烟道排风
G4-73-11	锅炉离心式通风机	590～7000	15900～680000	10～1250	80	用于2～670t/h汽锅或一般矿井通风
30K4-11	轴流通风机	26～516	550～49500	0.09～10	45	一般工厂、车间办公室换气

二、确定选机流量及压头

根据工程计算所确定的最大流量 Q_{max} 和最高扬程 H_{max} 或风机的最高全压 p_{max},然后分别加10%～20%的安全量(考虑计算误差及管网漏耗等)作为选泵或风机的依据,即

$$Q=1.1Q_{max}(m^3/h)$$

$$H=1.1\sim1.2H_{max}(m)\text{或}\ p=1.1\sim1.2p_{max}(Pa)$$

三、确定型号大小和转数

当泵或风机的类型选定后,要根据流量和扬程或风机全压,查阅样本或手册,选定其大小(型号)和转数。

本书已将 BA、BL、SG 及 IS 型离心式泵和 KT4-68-22 型离心风机性能表摘录于附录中。

现行的样本有几种表达泵或风机性能的曲线和表格。一般可先用综合“选择曲线图”(见图 13-23),进行初选。此种选择曲线已将同一类型各种大小型和转数的性能曲线,绘在一张图上,使用方便。对于风机还可用“无因次性能曲线”进行选择工作。

选择泵或风机的出发点,是把工程需要的工作点(即 Q、H)选落在机器性能的哪根曲线上的哪一点的问题。回答是:工作点应落在机器最高效率(η 线的顶峰值)的 ±10% 的高效区,并在 Q—H 曲线的最高点的右侧下降段上,以保证工作的稳定性和经济性。

目前,生产厂家多用表格给出该机在高效率和稳定区的一系列数据点,选机时,应使所需的 Q 和 H 与样本给出值分别相等,不得已时,允许样本值稍大于需要值(多指扬程值)。

四、选电动机及传动配件或风机转向及出口位置

用性能表选机时,在性能表上附有电机功率及型号和传动配件型号,可一并选用。

用性能曲线选机时,因图上只有轴功率 N,故电机及传动件需另选。

配套电机功率 N_m 可按下式计算

$$N_m = K \cdot \frac{N}{\eta_i} = K \cdot \frac{\gamma QH}{\eta_i \eta} = K \cdot \frac{QP}{1000\,\eta_i \eta}(\mathrm{kW})$$

式中 Q——流量(m^3/s);

H——扬程(m);

p——风机全压(Pa);

K——电机安全系数见表 13-6。

电动机安全系数 **表 13-6**

电动机功率(kW)	>0.5	0.5~1.0	1.0~2.0	2.0~5.0	>5.0
安全系数 K	1.5	1.4	1.3	1.2	1.15

η_i——传动效率。电机直联 $\eta_i = 1.0$;联轴器直联传动 $\eta_i = 0.95 \sim 0.98$;三角皮带传动 $\eta_i = 0.9 \sim 0.95$;

γ——容重。按 SI 制为 kN/m^3,而 ρ 密度为 kg/m^3(数值上等于工程制中的 γ 值)。

另外,泵或风机转向及进、出口位置应与管路系统相配合(风机叶轮转向及出口位置按图 13-27 代号表达)。

五、几点注意事项

(一) 当选水泵时,应注意防止“气蚀”发生。从样本上查出标准条件下的允许吸上真空高度$[H_s]$或临界气蚀余量 Δh_{min},按(13-3-4)或(13-3-6)式验算其几何安装高度。

此时,如输送液体温度及当地大气压强与标准条件(20℃ 清水,$p = 101.325$kPa)不同时,还须对$[H_s]$按(13-3-5)式进行修正。

(二) 对非样本规定条件下的流体参数之换算

泵或风机样本所提供的数据(Q、H)是在规定的条件下得出的,当所输送的流体温度或密度以及当地大气压强与规定条件不同时,应按第十一章第九节公式进行参数换算。

一般风机的标准条件是大气压强为 101.325kPa,空气温度为 20℃,相对湿度为 50%;

锅炉引风机的标准条件是大气压强为 101.325kPa,气体温度为 200℃,相应的容重 $\gamma =$

$0.745(kN/m^3)$。

（三）必要时尚需进行初投资与运行费的综合经济、技术比较。

【例 13-4】 某工厂供水系统由清水池往水塔充水，如图 13-28 所示。清水池最高水位标高为 112.00，最低水位为 108.00，水塔地面标高为 115.00，最高水位标高为 140.00。水塔容积 $40m^3$，要求一小时内充满水，试选择水泵。已知吸水管路水头损失 $h_{w1}=1.0m$，压水管路水头损失 h_{w2} 为 2.5m。

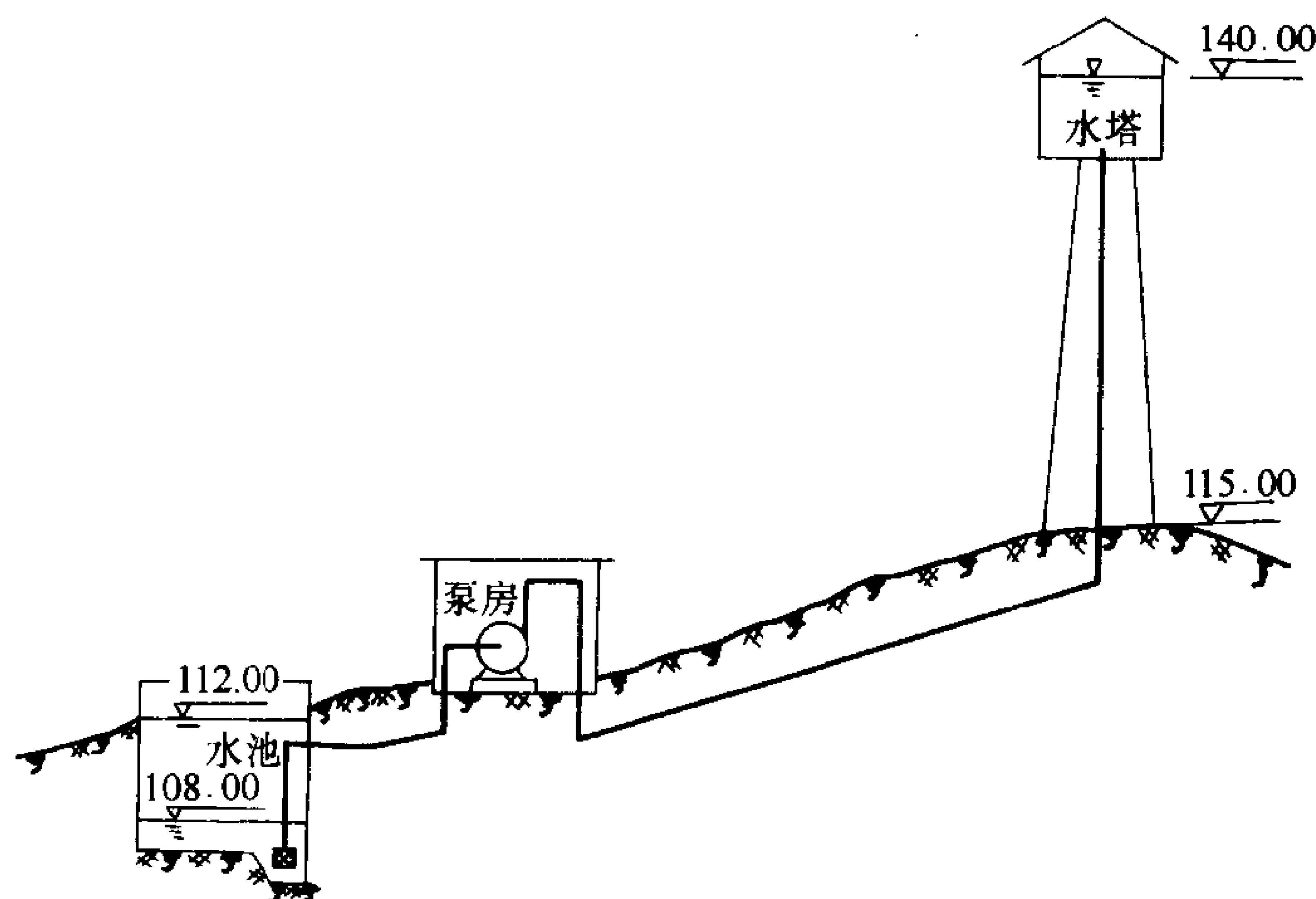


图 13-28　水塔充水工程

【解】 选择水泵的参数值应按工况要求的最大流量和最大扬程再乘以附加安全系数的数值作为依据。附加值取 10%，即

$$Q=1.1\times40=44m^3/h$$

$$\begin{aligned}H&=1.1\times[(140-108)+h_{w1}+h_{w2}]mH_2O\\&=1.1\times(32+1.0+2.5)\\&=39.05mH_2O\end{aligned}$$

考虑选用 BL 型水泵，查附录二性能表：3BA-6A 型的流量为 $40m^3/h$ 时，扬程为 $45mH_2O$，适合本工况要求。

从性能表可以看出，该泵的轴功率范围为 6.65kW。根据表 13-6 选电动机备用系数 $k=1.15$，则所需配用电动机功率 $N_m=6.65\times1.15=7.6kW$。样本配电机功率 13kW。

该泵的效率 $\eta=55\%$，允许吸上真空高度 $H_s=7.5m$，转速 $n=2900r/min$。

【例 13-5】 某空气调节系统需要从冷水箱向空气处理室供水，最低水温为 10℃，要求供水量 $35.8m^3/h$，几何扬水高度 10m，处理室喷嘴前应保证有 20m 的压头。供水管路布置后经计算管路损失达 $7.1mH_2O$。为了使系统能随时启动，故将水泵安装位置设在冷水箱之下。试选择水泵。

【解】 根据已知条件可知，要求泵装置输送的液体是温度不高的清水，且泵的位置较低，不必考虑气蚀问题，可以采用占地较少、价格较廉的 BL 型直联式离心泵。选用时所依据的参数计算如下：

$$Q=1.1\times35.8=39.38m^3/h$$

$$H=1.1\times(10+20+7.1)=40.81m$$

查附录二，可选用 3BL-6A 型水泵一台，当 $n=2900\text{r/min}$ 时，其泵效率 $\eta=62\%$，于是轴功率 N：

$$N=\frac{\gamma QH}{\eta}=\frac{9.8\times39.38\times40.81}{3600\times0.62}=7.06[\text{kW}]$$(厂配电机 13kW 偏大)

【例 13-6】 某地大气压为 98.07kPa，输送温度为 70℃的空气，风量为 $11500\text{m}^3/\text{h}$，管道阻力为 2000Pa，试选用风机、应配用的电机及其它配件。

【解】 将输送风量增加 10%作为选用时的依据。由于风管系统压头不太高，风压也只增加 10%作为选用的依据，即：

$$Q=1.1\times11500=12650\text{m}^3/\text{h}$$

$$p=1.1\times2000=2200\text{Pa}$$

由于使用地点大气压及输送气体温度与样本数据采用的标准不同，应予换算。按十一章九节的公式可得：

$$p_0=p\,\frac{101.325}{98.07}\cdot\frac{273+70}{273+20}$$

$$=2200\times1.033\times\frac{343}{293}=2662\text{Pa}$$

$$Q_0=Q=12650\text{m}^3/\text{h}$$

从附录四，选用 4-72-11No.5A 高效率离心式风机。该机性能表中序号 6 工况点参数为 $n=2900\text{r/min}$，$p_0=2600\text{Pa}$，$Q_0=12630\text{m}^3/\text{h}$；

配用电机型号 Y 160M_1-2，$N=11\text{kW}$；配用地脚螺栓 4 套，代号为 F2120，规格 M12×250。

如果采用无因次性能曲线选用风机时，可以从图 11-26 查出 4-72-11 型风机在最高效率下有以下的无因次参数：

$$\bar{p}=0.416$$

$$\bar{Q}=0.212$$

根据式(11-8-15)可算出风机的圆周速度：

$$u=\sqrt{\frac{p}{\rho\cdot\bar{p}}}=\sqrt{\frac{2600}{1.2\times0.416}}=72.2\text{m/s}$$

如选用 $n=2900\text{r/min}$ 的风机，叶轮直径应为：

$$D_2=60\,\frac{u}{\pi n}=\frac{60\times72.2}{3.14\times2900}=0.476\text{m}$$

由式(11-8-16)可以计算相应的风量为：

$$Q=\bar{Q}u\,\frac{\pi D_2^2}{4}=0.212\times72.3\times\frac{3.14\times(0.476)^2}{4}=2.73\text{m}^3/\text{s}=9810\text{m}^3/\text{h}$$

可见所选定的叶轮直径的风机不能在给定的转速下提供所要求的流量。同时，如果考虑到制造厂通常是按“cm”来生产风机的，故可采用 $D_2=0.5\text{m}$ 的风机，即 No.5 风机，则其圆周速度为：

$$u=\frac{n\pi D_2}{60}=\frac{2900\times3.14\times0.5}{60}=76\text{m/s}$$

据此按式(11-8-16)计算无因次流量为：

$$\overline{Q}=\frac{Q}{u\frac{\pi D_2^2}{4}}=\frac{(4\times 12650)/3600}{76\times 3.14\times(0.5)^2}=0.234$$

再查无因次性能曲线，在相当于 $\overline{Q}=0.234$ 处的压力系数为 $\overline{p}=0.386$，功率系数 $\overline{N}=0.101$。

用所得无因次量验算风压，可得：

$$p=\overline{p}\rho u^2=0.386\times 1.2\times(76)^2=2677.5\text{Pa}$$

验算轴功率，用式(11-8-17)：

$$N=\overline{N}\rho u^3\frac{\pi D_2^2}{4}=0.101\times 1.2\times(76)^3\times\frac{3.14}{4}\times(0.5)^2$$

$$=10460\text{W}=10.46\text{kW}$$

上述验算结果均证明所选风机能满足预定要求，且和按性能表选用的结果完全吻合。

此外，还可以按式(11-8-18)算出其效率为：

$$\eta=\frac{\overline{Q}\overline{p}}{\overline{N}}=\frac{0.234\times 0.386}{0.101}=89.5\%$$

从本例可以看出，采用无因次性能曲线选用风机时，需要反复换算，显然比较麻烦。利用选择性能曲线进行选用，非常便利。选择性能曲线图又叫组合性能曲线图。13 章 6 节绘有 6-46-11 型离心式通风机的选择性能曲线图，并对该图的结构和使用方法有所介绍。

泵类也有类似的组合曲线图，尽管在型式上可能略有区别，但正如以前提到的，它们都源自固定转速下的性能曲线，使用的方法也相似，不难举一反三，故不再一一介绍。

习　题

13-1　试简述泵产生气蚀的原因和产生气蚀的具体条件。

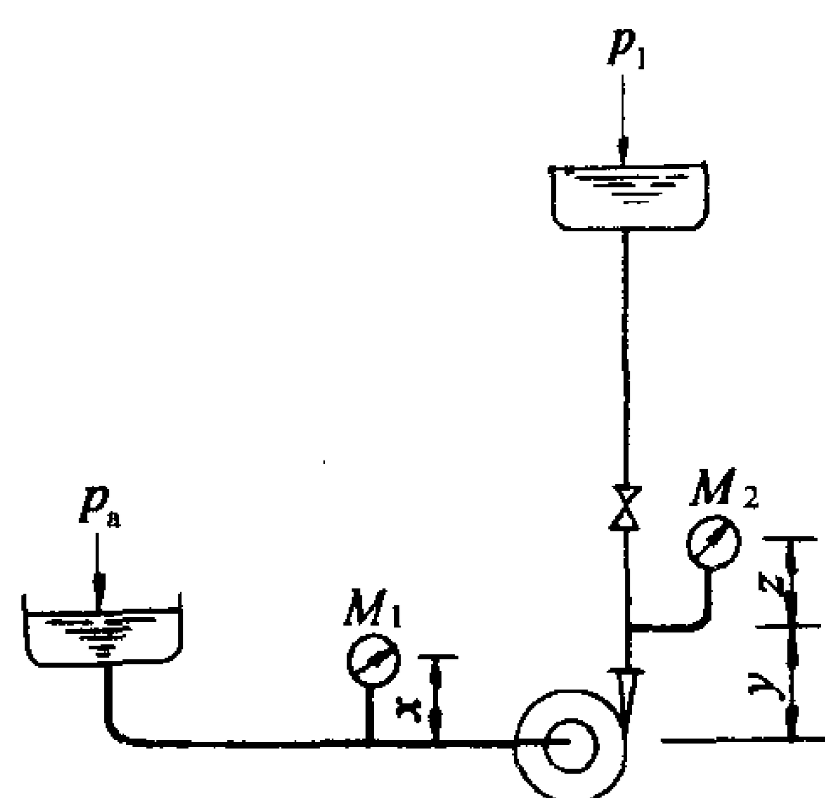
13-2　为什么要考虑水泵的安装高度？什么情况下，必须使泵装设在吸水池水面以下？

13-3　水泵性能曲线中的 Q—$[H_s]$和 Q—$[\Delta h]$曲线都与泵的气蚀有关，试简述其区别。

13-4　已知下列数据，试求泵所需的扬程。

水泵轴线标高 130m，吸水面标高 126m，上水池液面标高 170m，吸入管段阻力 0.81m，压出管段阻力 1.91m。

13-5　如图所示的泵装置从低水箱抽送容重 $\gamma=980\text{kgf/m}^3$ 的液体，已知条件如下：



题 13-5　图

$x=0.1\text{m}$,

$y=0.35\text{m}$,

$z=0.1\text{m}$,

M_1 读数为 124kPa,

M_2 读数为 1024kPa,

$Q=0.025\text{m}^3/\text{s}$,

$\eta=0.80$。

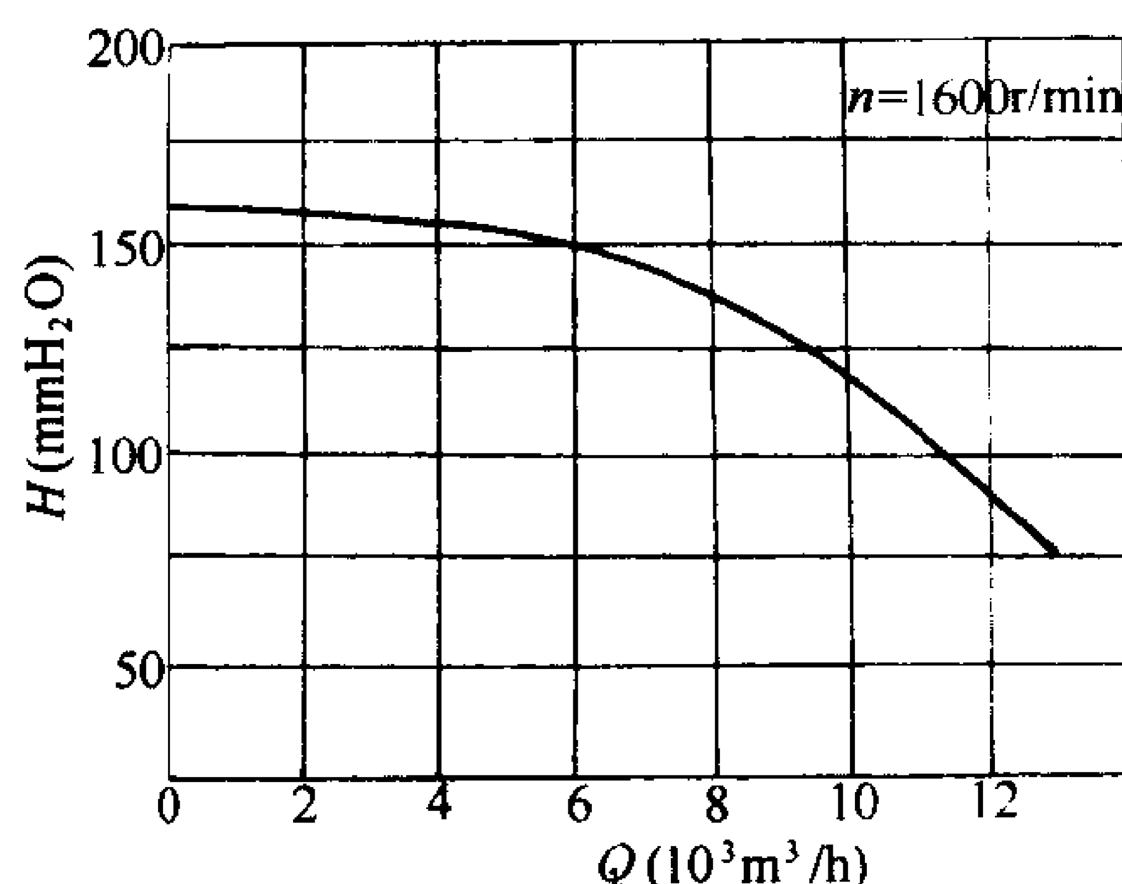
试求此泵所需的轴功率为多少？

（注：该装置中两压力表高差为 $y+z-x$）

13-6　有一泵装置的已知条件如下：$Q=0.12\text{m}^3/\text{s}$，吸入管径 $D=0.25\text{m}$，水温为 40℃（容重 $\gamma=992\text{kgf/m}^3$），$[H_s]=5\text{m}$，吸水面标高 102m，水面为大气压，吸入管段阻力为 0.79m。

试求：泵轴的标高最高为多少？如此泵装在昆明地区，海拔高度为 1800m，泵的安装位置标高应为多少？设此泵输送水温不变，地区仍为海拔 102m，但系一凝结水泵，制造厂提供的临界气蚀余量为 Δh_{min} = 1.9m，冷凝水箱内压强为 9kPa，泵的安装位置有何限制？

13-7　某一离心式风机的 Q—H 性能曲线如图所示。试在同一坐标图上作两台同型号的风机并联运行和串联运行的联合 Q—H 性能曲线。设想某管路性能曲线，对两种联合运行的工况进行比较，说明两种联合运行方式各适用于什么情况。



题 13-7　图

13-8　利用第十一章习题 11-1 的数据绘出4-72-11No.6 号风机在 n_1 = 1000、n_3 = 1250 及 n_3 = 1800r/min 的三条 Q—H 性能曲线(绘在同一坐标图上)。然后用圆滑曲线将三条曲线上的相似工况点连接起来，每一条曲线都是等效率曲线。

可以看出等效率曲线是一簇交于原点的抛物线。将所得结果与图 13-23 中的风机通用性能曲线相比较，说明其异同，分析其原因。

13-9　某工业用气装置要求输送空气 1m^3/s，H = 3677.5N/m^2，试用选择性能曲线图选用风机，并确定配用电机和配套用的选用件。

13-10　某工厂集中式空气调节装置要求 Q = 24000m^3/h，H = 980.7Pa，试根据无因次性能曲线图选用高效率 KT4-68 型离心式风机一台。

第十四章　其它常用泵及压气(缩)机

第一节　往　复　式　泵

往复式泵是最早发明的提升液体的机械。目前由于离心式泵具有显著优点,往复式泵的应用范围已逐渐缩小。但由于往复式泵在压头剧烈变化时仍能维持几乎不变的流量的特点,故往复式泵仍有所应用。它还特别适用于小流量、高扬程的情况下输送粘性较大的液体,例如机械装置中的润滑设备和水压机等处。在小型锅炉房和采暖锅炉房中,常装设利用锅炉饱和蒸汽为动力的蒸汽活塞泵作为锅炉补给水泵。

往复式泵属于容积泵,主要结构包括泵缸、活塞或柱塞、连杆、吸水阀和压水阀等。图 14-1 是双作用活塞式往复泵的工作原理图。

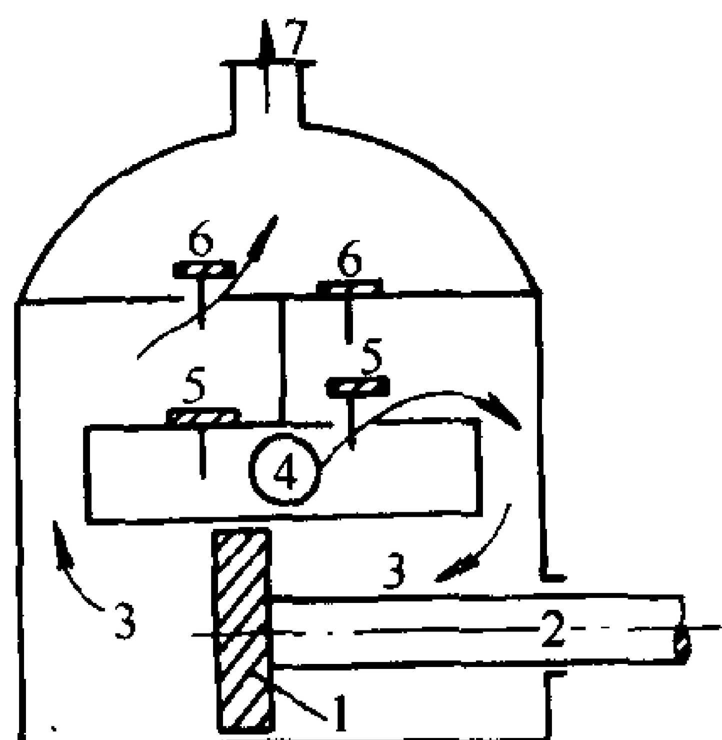


图 14-1　双作用活塞式往复泵工作原理
1—活塞;2—连杆;3—泵缸或工作室;4—进水管;5—吸水阀;6—压水阀;7—排水管

当活塞 1 与连杆 2 受原动机驱动作往复运动时,左右两工作室 3 的容积交替发生变化。左工作室容积受压缩时,其中液体推开压水阀 6 被排向排水管 7;与此同时,右工作室膨胀而形成真空,于是打开右吸水阀 5 从进水管 4 吸水。然后活塞向右运动,两工作室交替进行上述相似的工作,完成吸水、排水的输水过程。

活塞式往复泵的理论流量与活塞面积 A、活塞行程 S 及活塞在单位时间内往复次数 n 有关。单作用往复泵的理论流量可按下式计算:

$$Q_T = ASn \tag{14-1-1}$$

双作用泵的理论流量是单作用泵的两倍。

往复泵的吸入性能应当考虑流量实际上的非恒定性带来的附加损失。所以它的允许几何安装高度较离心式泵为低。

往复泵的实际流量由于液体的漏损和吸水阀与压水阀动作的滞后而有所减少,通常用容积效率 η_v 乘以理论流量得出。η_v 值大约在 85%～99%之间。

理论上来说,往复泵的扬程与流量无关,这就是说,这种泵可以达到任意大的扬程,它的 $Q_T—H_T$ 曲线是一条垂直于横坐标 Q 轴的直线(图 14-2 中的虚线)。实际上由于受泵的部件机械强度和原动机功率的限制,泵的扬程不可能无限增大。同时在较高的增压下,漏损会加大,以致实际 $Q—H$ 曲线向左略有偏移。应当指出往复泵的流量是不均匀的,因为活塞在一个行程中的位移速度总是从零到最大再减少到零,然后重复,如此往复循环。在图 14-2 中

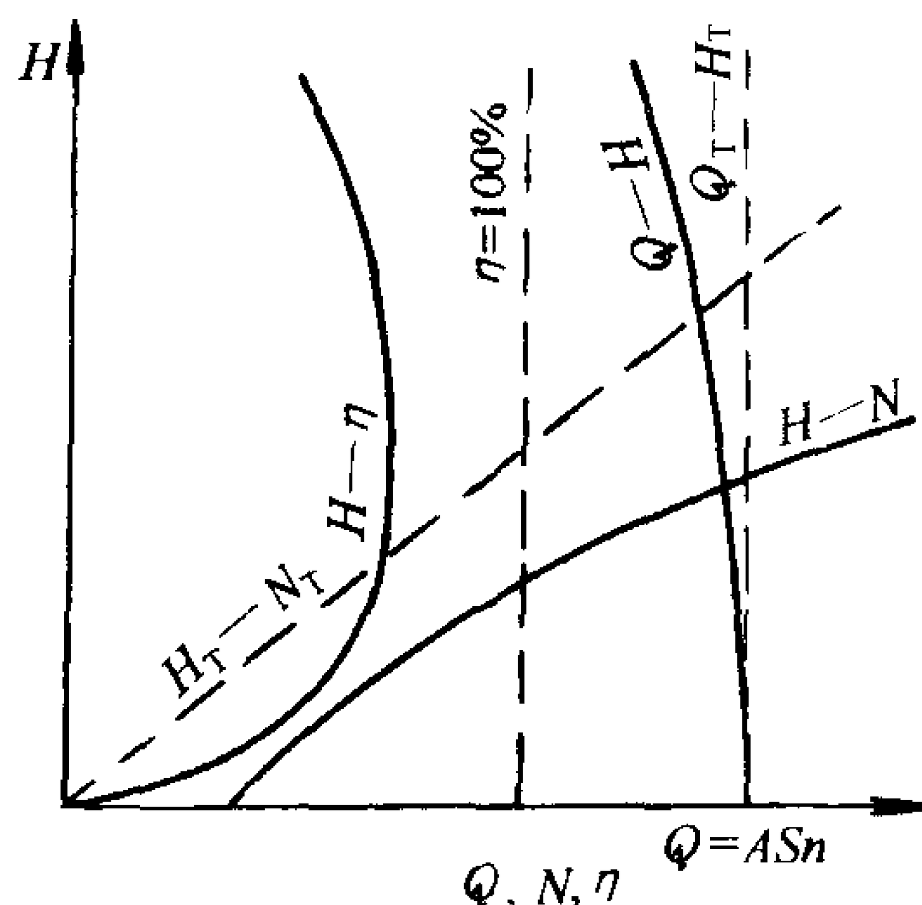


图 14-2　往复泵的性能曲线

Q—H曲线是按平均流量绘制的。

往复泵在一定的往复次数工作时，理论流量 $Q_T = ASn$ 为定值，理论轴功率 $N_T = \gamma Q_T H_T$，H_T 只与 N_T 有关，故 H_T—N_T 是一条通过原点的直线。实际的 H—N 曲线因高压头下流量有所减少而稍微向下弯曲，如图 14-2 中所示。注意该图 N 和 η 尺度都标注在横坐标轴上。

效率曲线一般随 H 值的增加而下降。此外当 H 很小时，由于有效功率很小而机械损失基本未变，以致效率下降很快。H—η 曲线也绘于图 14-2。

图 14-3 是以饱和蒸汽为动力的蒸汽活塞泵的结构简图。图的右方是往复作用的柱塞泵，左方是蒸汽机的配汽滑阀与汽缸。来自锅炉的饱和蒸汽通过左右移动的滑阀依次进入汽缸的两方推动活塞。活塞的往复作用由活塞杆带动柱塞工作。

这种泵的流量是由滑阀控制每分钟活塞往复次数来进行调节的。我国生产的 2QS 系列蒸汽活塞泵的流量范围为 0.5～120m³/h。能输送温度低于 105℃的介质。如 2QS-53/17 型蒸汽活塞泵是一种双缸清水泵，活塞每分钟往复次数可在28～58次之间调节，相应的流量为 25～53m³/h，扬程可达 170m，允许吸上真空高度为 4m。

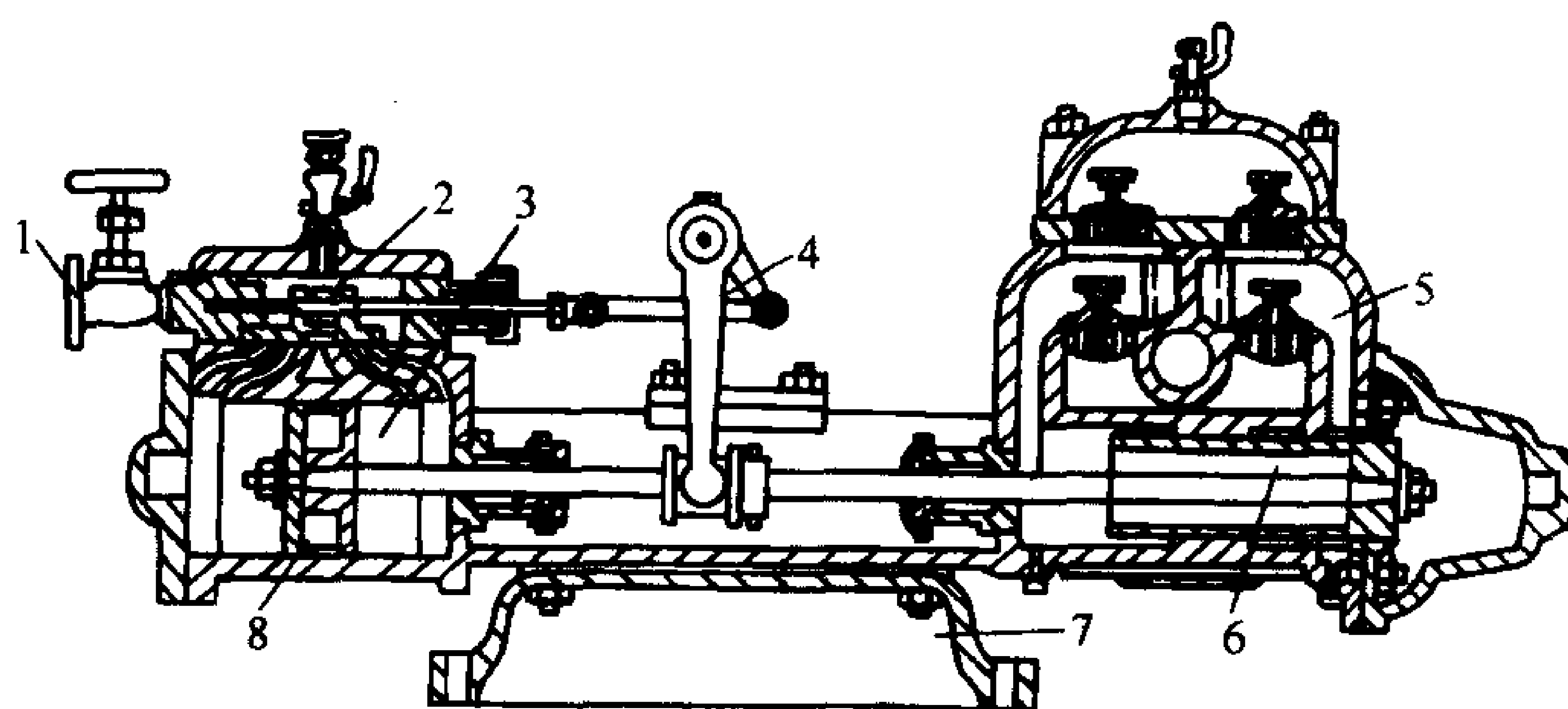


图 14-3　蒸汽活塞泵结构简图
1—蒸汽阀；2—蒸汽滑阀；3—蒸汽缸；4—滑阀牵动臂；5—水泵；6—柱塞；7—底座；8—活塞

第二节　真　空　泵

真空式气力输送系统中，要利用真空泵在管路中保持一定的真空度。有吸升式吸入管段的大型泵装置中，在启动时也常用真空泵抽气充水。常用的真空泵是水环式真空泵。

水环式真空泵实际上是一种压气机，它抽取容器中的气体将其加压到高于大气压，从而能够克服排气阻力将气体排入大气。

水环式真空泵的构造简图示于图 14-4。有 12 个叶片的叶轮 1 偏心地装在圆柱形泵壳 2 内。泵内注入一定量的水。叶轮旋转时，将水甩至泵壳形成一个水环，环的内表面与叶轮轮毂相切。由于泵壳与叶轮不同心，右半轮毂与水环间的进气空间 4 逐渐扩大，从而形成真空，使气体经进气管 3 进入泵内进气空间 4。随后气体进入左半部，由于毂环之间容积被逐渐压缩而增高了压强，于是气体经排气空间 5 及排气管 6 被排至泵外。

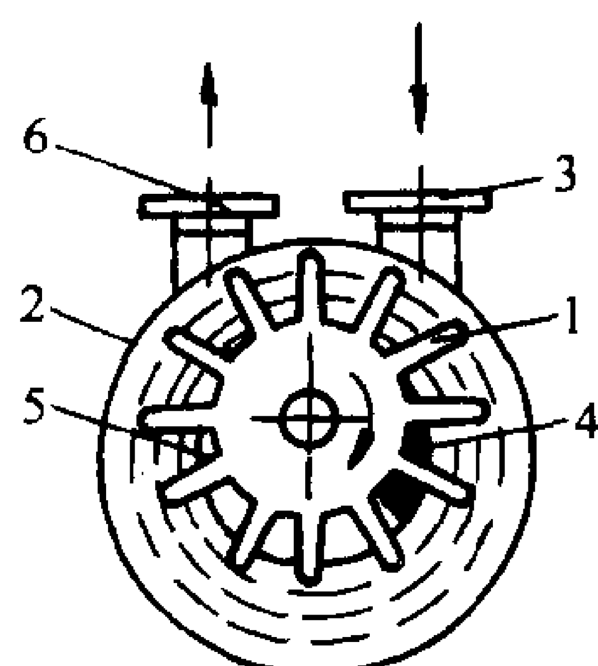


图 14-4　水环式真空泵结构示意图
1—叶轮；2—泵壳；3—进气管；4—进气空间；5—排气空间；6—排气管

真空泵在工作时应不断补充水，用来保证形成水环和带走摩擦引起的热量。

我国生产的水环式真空泵有 SZ 型和 SZB 型，前者最高压强

可达205.933kPa(作为压气机用时)。SZB是悬臂式的小型真空泵。表14-1是SZ型水环式真空泵的性能简表。

SZ型水环式真空泵的工作性能 **表14-1**

型 号	下列压强下的抽气量(m^3/min)					极限压强 (kPa)	电机功率 (kW)	转 数 (r/min)	耗水量 (l/min)
	760	456	304	152	76				
	(kPa)								
SZ-1	0.2	0.085	0.05	0.016	—	16.3	4	1450	10
SZ-2	0.45	0.22	0.13	0.33	—	13.1	10	1450	30
SZ-3	1.53	0.91	0.48	0.20	0.067	8	30	975	70
SZ-4	3.60	2.35	1.47	0.40	1	7.1	70	730	100

第三节 深 井 泵

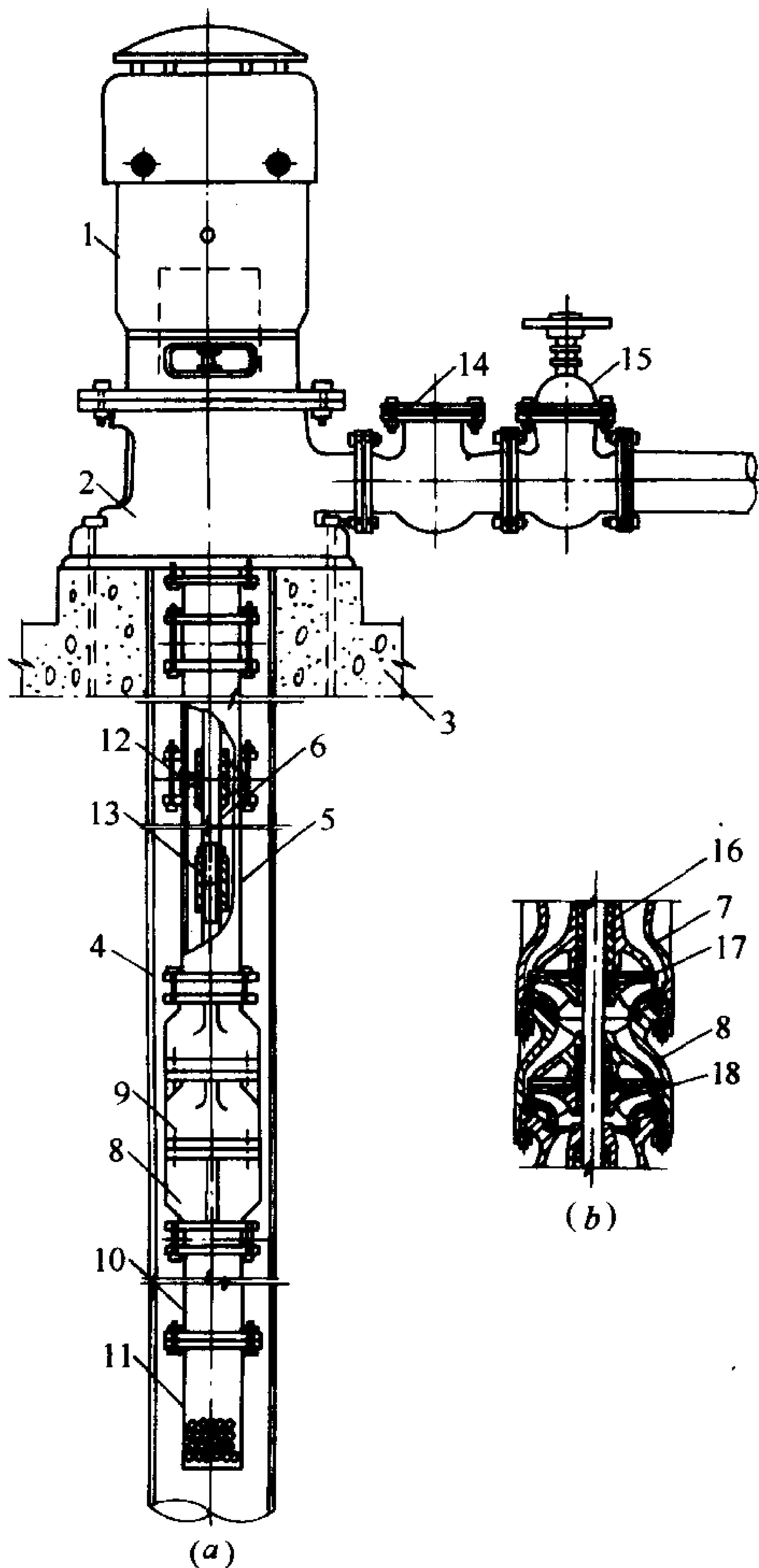


图14-5 SD型深井泵的结构图
(a)整机外形;(b)泵体结构
1—电动机;2—泵座;3—基础;4—井管;5—扬水管;6—传动轴;7—上壳;8—下壳;9—中壳;10—吸水管;11—滤水网;12—轴承体;13—螺纹联轴器;14—止回阀;15—截止阀;16—轴承衬套;17—锥形套;18—叶轮

近年来利用温度较低的地下水作为空气调节装置的冷源已经比较普遍,但由于降低了地下水位故已停止推广。后来,发展为"冬灌夏用"和"夏灌冬用"的方式,进一步利用地下水库的良好隔热性能储存一定温度的水量,作为空调装置的冷源和热源。这些装置都要使用深井泵来抽取地下水。

深井泵是一种立式多级泵。我国生产的深井泵有SD型、J型和JD型等多种。图14-5是SD型深井泵的结构图。它由以下几个主要部分组成:(一)装于上壳7、中壳9和下壳8中的泵本体,它的叶轮18是混流式多级叶轮;(二)扬水管5和传动轴6;(三)装在地面的电动机1和泵座2;(四)滤水网11与吸水管10。深井泵的埋深要使泵在工作时间内至少有二至三个叶轮浸没于水中。表14-2是SD10型深井泵的性能简表。

为了抽取地下水,还可以采用潜水电泵。这是一种将电机与泵装在一起沉入于深井中的泵装置,省去了泵座和长长的传动轴。除

对电机绝缘要采取特殊措施外，大大简化了泵的结构。

SD10 型深井泵性能简表 **表 14-2**

叶轮级数	流　量 (m^3/h)	扬　程 (m)	叶轮平均直径 (mm)	扬水管节数	传动轴直径 (mm)	轴功率 (kW)	电机功率 (kW)	效　率 (%)	转　数 (r/min)
3	70	24	168.8	8	30	7.6	10	67	1460
5		40		15	30	12.2	14		
7		56		21	30	17.1	20		
10		80		31	36	24.0	28		
15		100		44	36	36.5	40		

第四节　旋　涡　泵

旋涡泵在性能上的特点是小流量、高扬程和低效率，但具有只需在第一次运转前充液的自吸式优点。目前，大都用于小型锅炉给水和输送无腐蚀性、无固体杂质的液体。

图 14-6*a* 是旋涡泵的叶轮。叶轮圆盘外周两侧加工成许多凹槽，凹槽之间铣成叶片 4。

在图 14-6*b* 中可以看出泵壳的吸入口与排出口之间，设有隔离壁 1，隔离壁与叶轮间的缝隙很小，这就使泵内分隔为吸水腔 2 与压水腔 3。吸水腔与压水腔外侧，绕叶轮周边有不大的混合室，见图 14-6*c*。

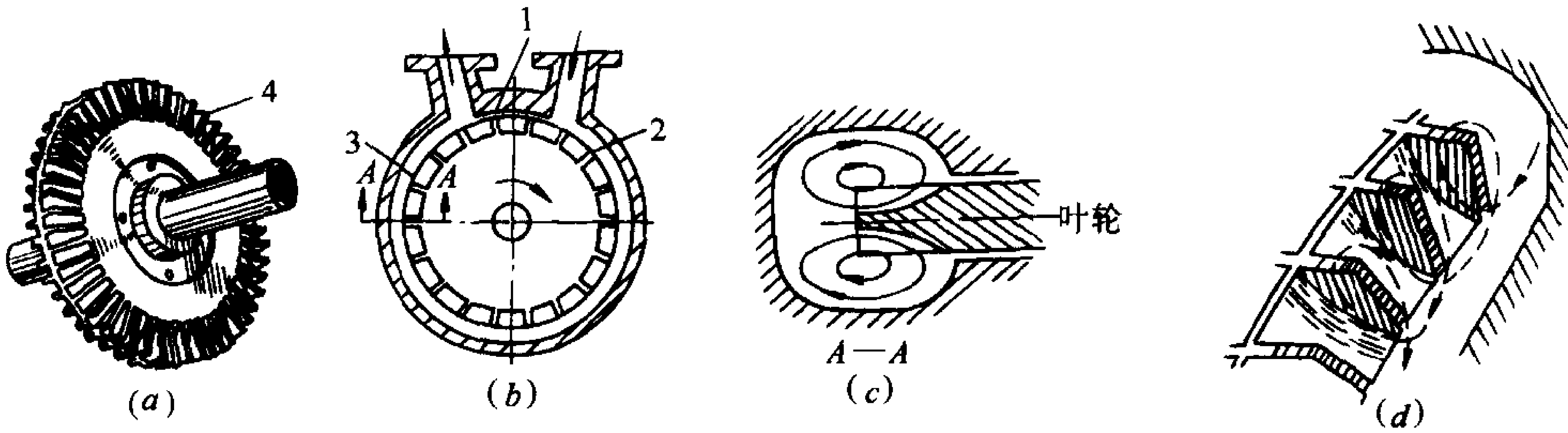


图 14-6　旋涡泵的结构与工作原理

(*a*)叶轮；(*b*)泵内结构示意图；(*c*)混合室；(*d*)流体在泵内的运动

1—隔离壁；2—吸水腔；3—压水腔；4—叶片

叶轮旋转时带动来自吸入口的液体前进，同时液体在叶片间的流道内借离心力加压后到达混合室，在混合室内部分地转换为压力能，然后又被叶轮带动向前重新进入叶片流道内加压。所以流体可以看作受多级离心泵的作用被多次增压，直到压水腔的末端引向排出口。流体在泵内流动情况见图 14-6*d*。

我国生产的 W 系列旋涡泵可以输送 −20～80℃ 的液体，流量范围为 0.36～16.9m^3/h，扬程最高可达 132m。

表 14-3 是 1W2.4-10.5 型旋涡泵的性能表。该泵可汲送清水或化学物理性能类似清水的液体。

1W2.4-10.5 型旋涡泵性能表 **表 14-3**

流　量(m^3/h)	扬　程(m)	转　数(r/min)	轴功率(kW)	效　率(%)
2.4	105	2900	2.4	28

第五节　活塞式压缩机

一、工作原理

在活塞式压缩机中，气体是依靠在气缸内做往复运动的活塞进行加压的。图14-7是单级单作用活塞式压缩机的示意图。

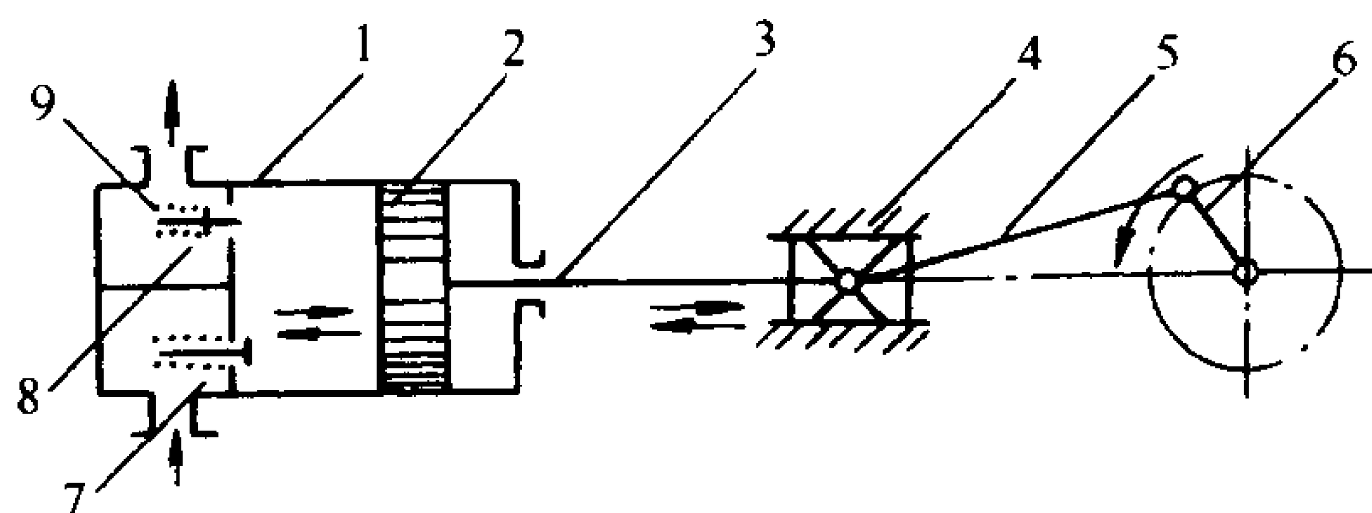


图14-7　单级单作用活塞式气体压缩机示意图

1—气缸；2—活塞；3—活塞杆；4—十字头；5—连杆；6—曲柄；7—吸气阀；8—排气阀；9—弹簧

当活塞2向右移动时，气缸1中活塞左端的压力略低于低压燃气管道内的压力 p_1 时，吸气阀7被打开，燃气在 p_1 的作用下进入气缸1内，这个过程称为吸气过程；当活塞返行时，吸入的燃气在气缸内被活塞挤压，这个过程称为压缩过程；当气缸内燃气压力被压缩到略高于高压燃气管道内压力 p_2 后，排气阀8即被打开，被压缩的燃气排入高压燃气管道内，这个过程称为排气过程。至此，已完成了一个工作循环。

压缩机的排气量，通常是指单位时间内压缩机最后一级排出的气体量换算到第一级进口状态时的气体体积值。常用单位为"m^3/min"或"m^3/h"。

压缩机的理论排气量：

对于单作用式压缩机

$$Q_l = ASn \tag{14-5-1}$$

对于双作用式压缩机

$$Q_l = (2A - f)Sn \tag{14-5-2}$$

式中　f——一级活塞杆面积(m^2)；其余代表符号同往复式泵。

压缩机实际排气量由下式确定：

$$Q = \lambda_v \lambda_p \lambda_t \lambda_l Q_l = \lambda_0 Q_l \tag{14-5-3}$$

式中　Q——压缩机实际排气量(m^3/min)；

λ_0——排气系数；

λ_v——考虑余隙容积影响的容积系数；

λ_p——考虑由于吸气阀的压力损失使排气量减少的压力系数；

λ_t——由于吸入气体在气缸内被加热，使实际吸入气体减少的温度系数；

λ_l——考虑机器泄漏影响的泄漏系数。

二、压缩级数的确定

所谓多级压缩就是将气体依次在若干级中进行压缩，并在各级之间将气体引入中间冷却器进行冷却。多级压缩除了能降低排气温度，提高容积系数之外，还能节省功率的消耗和降低活塞上的气体作用力。

多级压缩时，级数越多，越接近等温过程，越节省功率的消耗。但是结构也越复杂，造价也越高，发生故障的可能性也就越大。表14-4是当进气压力为大气压时，终了压力和级数

的统计值，可供参考。

进气压力 p_1 为大气压时，终了压力 p_2 与级数 z 的关系　　表 14-4

P_2	5～6	6～30	14～150	36～400	150～1000
z	1	2	3	4	5

多级压缩节省的功，随着中间压力的不同而改变。显然，最有利的中间压力应是使各级所消耗的功的总和为最小时的压力。对于多级压缩机，各级压力比相等时，所消耗的总功最少。对于 z 级压缩机来说，压缩比 ε 应满足下式：

$$\varepsilon=\sqrt[z]{\frac{p_2}{p_1}} \tag{14-5-4}$$

式中　ε——为每一级出口压力与进口压力之比。

三、活塞式压缩机的变工况工作与流量调节

每台压缩机都是根据一定条件设计的，运转过程中某些参数或者是气体组成的变化，都会对压缩机的性能产生影响。此外，在燃气输配系统中，要求压缩机的负荷经常变化，因此对流量要进行调节。

（一）变工况对压缩机性能的影响

1. 吸气压力改变　随着吸气压力的降低，活塞完成一个循环后所吸入的气体体积（折算为标准状况下）就减少。此外当吸气压力降低，排气压力不变时，压缩比升高，使容积系数 λ_v 下降，排气量降低。

2. 排气压力改变　如果吸气压力不变，而排气压力增加，则压缩比上升，容积系数 λ_v 减小。

3. 压缩介质改变　压缩不同绝热指数的气体时，压缩机所需要的功率随着绝热指数的增加而增大。另一方面，在相同的相对余隙容积下，压缩机的容积系数 λ_v 随着绝热指数增加而增大，因此排气量也将有所增加。

气体容重的改变对容积型压缩机的压缩比没有很大影响，对于低分子量的气体压缩来说，这是它的一个重要优点。另一方面，容重大的气体，在经过管道和气阀时，压降较大，使气缸吸气终了压力下降，排气量略有降低，轴功率有所增加。

导热系数大的气体，吸气过程受热强烈，温度系数 λ_t 降低，使压缩机排气量减少。

（二）活塞式压缩机排气量的调节

1. 停转调节　根据用气工况来决定压缩机的停转和启动的时间和台数。这种方法只能用于功率较小的电动机带动的压缩机上。对于中等功率压缩机，可以采用离合器使原动机和压缩机脱开，避免频繁地启动原动机。

2. 改变转数的调节　通过改变转数来改变单位时间的排气量。这种方法用于由蒸汽机、内燃机驱动的压缩机。以直流电机作为原动机时，改变转数也比较方便。这种调节方法的优点是：转数降低时，气体在气阀及管路上的速度相应减小，气体在气缸中停留时间增长，因而获得较好的冷却效果，使功率消耗降低。

3. 停止吸入的调节　所谓停止吸入，即压缩机后的高压管道压力超过允许值时，自动关闭吸入通道。停止吸入在中型压缩机上采用较多。当停止吸入时，压缩机处于空转，因而实际上是间断调节。停止吸入的调节对于无十字头的单作用压缩机是不适用的，因为气缸内形成真空，润滑油会从曲轴箱吸入气缸。

4．旁路调节　采用这种方法调节排气量，从装置的结构上来说是简便易行的，但功率的消耗是巨大的。

旁路调节方式，亦可作为压缩机卸荷之用，所以压缩机启动时经常采用此种方式。所采用的旁通管线有两种形式如图14-8所示。

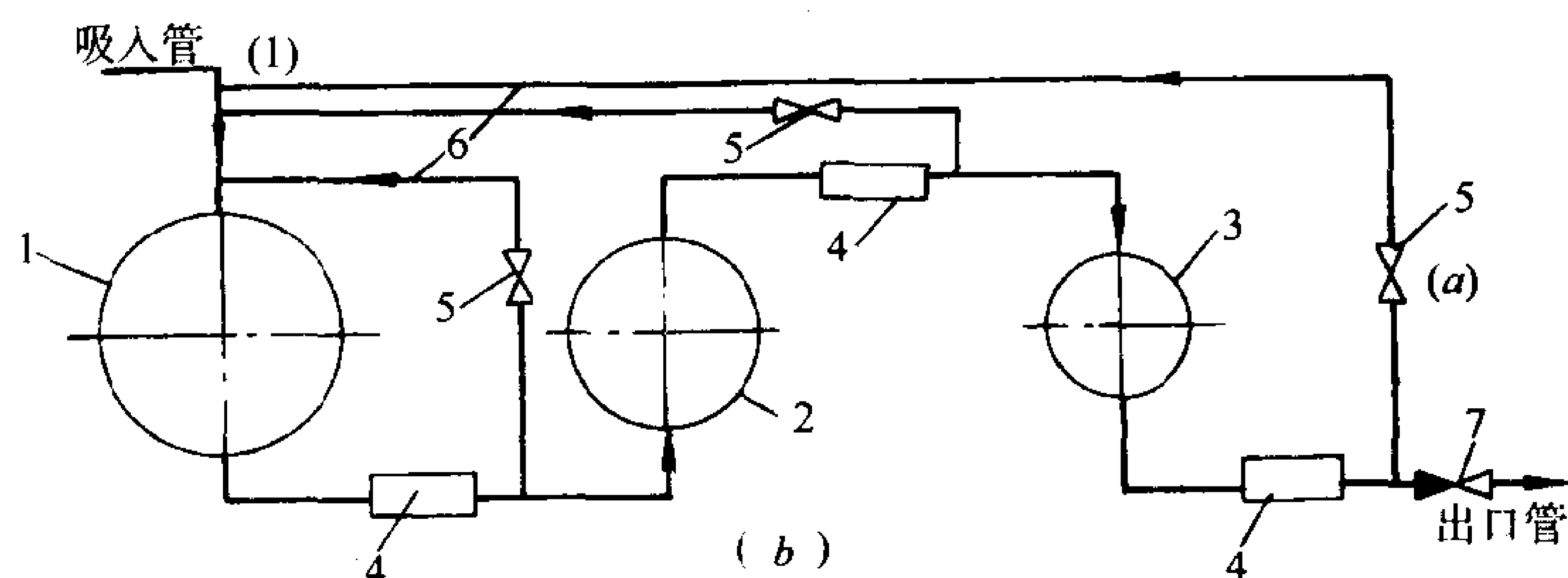


图14-8　旁通管线的连接形式

(a)末级与第一级旁通；(b)各级均与第一级旁通

1—Ⅰ级缸；2—Ⅱ级缸；3—Ⅲ级缸；4—冷却器；

5—旁通阀；6—旁通管；7—止回阀

图14-8(a)，为末级与第一级节流旁通，它能在保证各级的工况(压力、温度)均不改变的情况下工作，而且可以连续地调节气量。此种调节一般在短期运转下以及作为辅助微量调节之用。但是采用这种调节方法，在高压时旁通阀在高速气流的冲击下经常损坏，会影响正常工作时管线的严密性。此外，在旁通阀处节流可能产生冻结现象。

在大型多级压缩机中，经常配置如图(b)型旁通管路，可作为压缩机启动时卸荷之用，也可用来调节各级压缩比。用作气量调节时，当第Ⅰ级导出部分气量至吸入管以后，第Ⅰ级压缩比降低，中间各级压缩比保持原状，而末级压缩比会随着排气量的降低程度成比例上升，所以当排气量降低得太大时，末级中的温度会上升到不允许的范围。

5．打开吸气阀的调节　这种方法目前采用得较普遍，主要用在中型和大型压缩机上，除调节流量外也可作为卸荷空载启动之用。

打开吸气阀的调节作用是：气体被吸入气缸后，在压缩行程时，又将部分或全部已吸入缸内的气体通过吸气阀推出气缸。这样可以通过改变推出气体量实现压缩机排气量的调节。

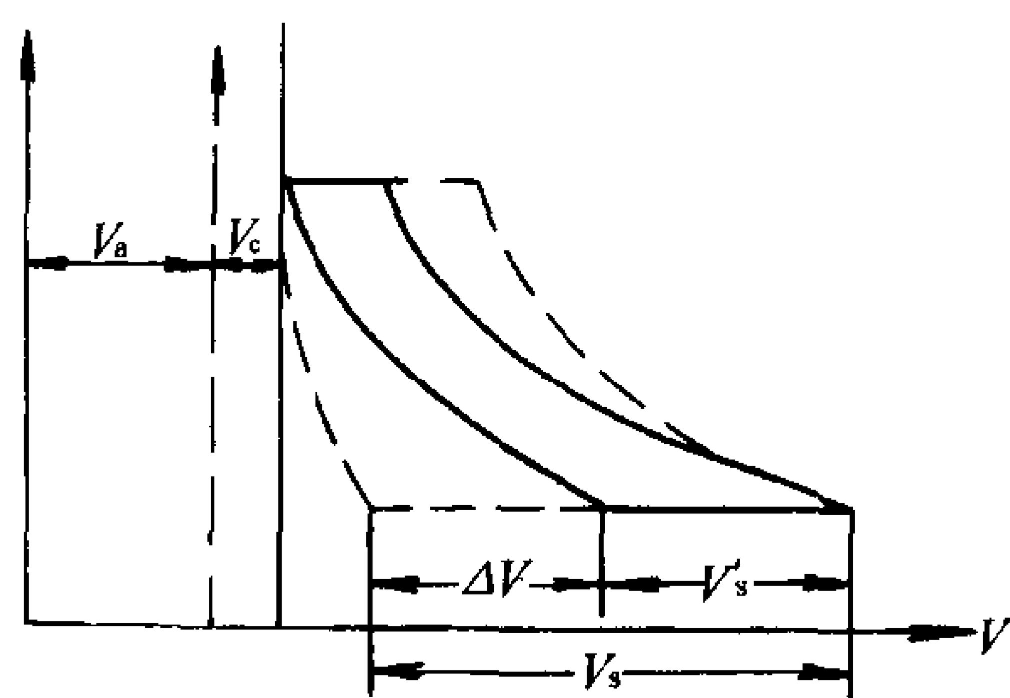


图14-9　增加补助容积后的示功图

6．连接补助容积的调节　这种方法是借助于加大余隙，使余隙内存有的已被压缩了的气体在膨胀时压力降低，体积增加，从而使气缸中吸入的气体减少，排气量降低。图14-9中的虚线表示全排气量时的示功图，V_c为气缸原有的余隙容积，此时吸入容积为V_s；连通补助容积V_a后的示功图如实线所示，吸入容积由V_s减少到V'_s，压缩机吸入的气量减少了ΔV。

利用这种补助容积以降低排气量的装置，有固定余隙腔和可变余隙腔两种，都称为余隙调节。前者的排气量只能调到一个固定的值，后者可以分级调节。补助容积的大小是由需要调节的排气量来决定，近年来采用部分行程中连通补助容积的调节装置，更进一步改善了调节工况。

在实际应用中，将根据对压缩机的使用要求、驱动方式、操纵条件的不同，来选择各种调节方法。确定调节方法时应尽可能满足所要求的调节特性(间歇调节，分级或无级调节)、经济性及可操作性。

第六节　回转式压缩机

一、滑片式气体压缩机

滑片式气体压缩机是由气缸部件、壳体和冷却器等主要部分组成，如图 14-10 所示。

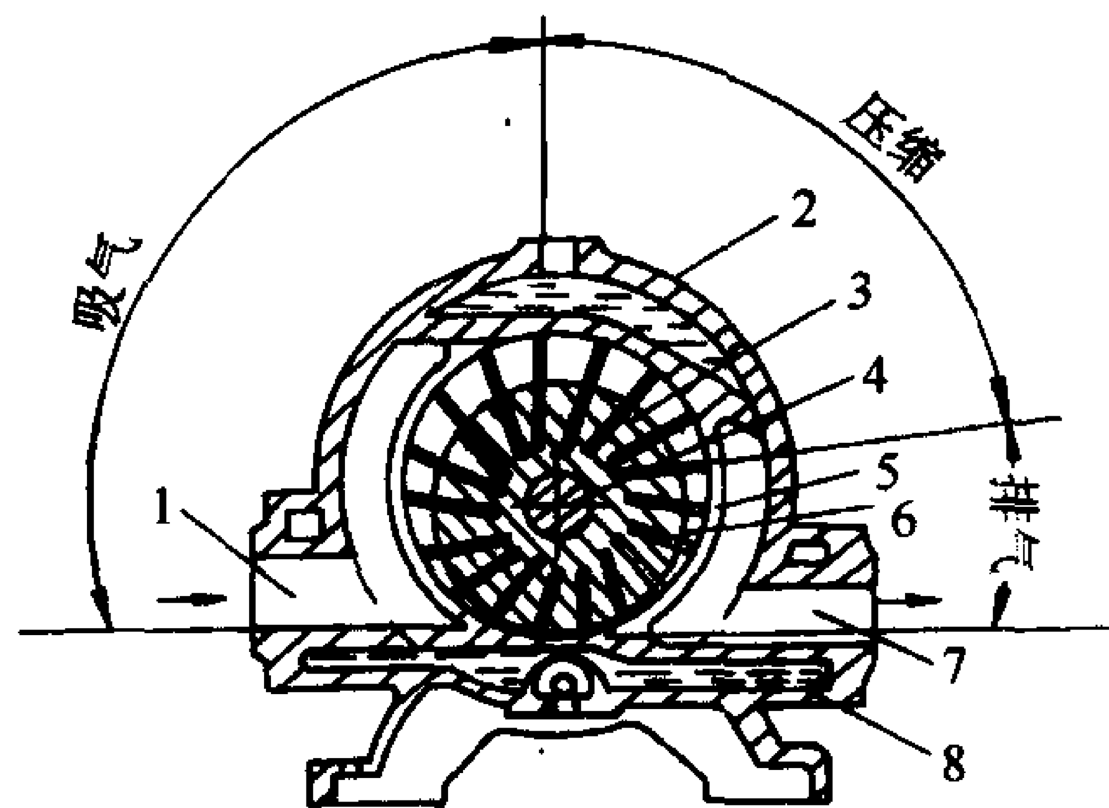


图 14-10　滑片式气体压缩机
1—吸气管；2—外壳；3—转子；4—转子轴；5—转子上的滑片；6—气体压缩室；7—排气管；8—水套

气缸部件主要由气缸、转子和滑片等组成。气缸呈圆筒形，上面开有进、排气孔口。转子偏心安置在气缸内，在转子上开有若干径向的滑槽，内置滑片。当通过联轴节和电机轴直联的转子轴旋转时，滑片在离心力的作用下，紧压在气缸的内壁上。气缸、转子、滑片及前后气缸盖组成了若干封闭小室，依靠这些小室容积的周期性变化，完成压缩机几个基本工作过程：吸气、压缩、排气和可能发生的膨胀过程。

滑片式压缩机的理论排气量可用下式确定：

$$Q_l = 2ml\pi Dn \tag{14-6-1}$$

式中　Q_l——理论排气量(m^3/min)；

m——偏心距(m)；

l——气缸长度(m)；

$2ml$——气体流通的小室最大截面积(m^2)；

D——气缸直径(m)；

n——转数(r/min)。

滑片式压缩机实际排气量为

$$Q = 2ml\pi Dn\lambda_1\lambda_2 \tag{14-6-2}$$

式中　Q——实际排气量(m^3/min)；

λ_2——考虑漏气的修正系数；

λ_1——考虑滑片占有容积的系数。

$$\lambda_1 = \frac{\pi D - Z\delta}{\pi D} \tag{14-6-3}$$

式中　Z——滑片数；

δ——滑片厚度(mm)；

其它符号同前。

通常取偏心距 $m=(0.05\sim0.1)D$；气缸长度 $l=(1.5\sim2.0)D$；滑片数 $Z=8\sim24$；滑片厚度 $\delta=1\sim3$mm。

取决于排气量和压力的系数值 $\lambda=\lambda_1\lambda_2$，在估算时可用下式

$$\lambda = \lambda_1\lambda_2 = 1 - 0.01k\frac{P_2}{P_1} \tag{14-6-4}$$

式中　λ——取决于排气量和压力的系数；

k——取决于压缩机排气量的系数，一般 $k=5\sim10$，若排气量低，则相应的 k 值大；

$\frac{P_2}{P_1}$——终压与初压的比值。

这种压缩机有单级压缩和二级压缩。通常压力不高，流量较小，可做为中、低压压缩机。机器的润滑是采用粘度较高的润滑油，就同一容量来说，比往复式压缩机耗油量多。

二、罗茨式回转压缩机

罗茨式回转压缩机，一般习惯称为罗茨式鼓风机。它是利用一对相反旋转的转子来输送气体的设备，其工作情况如图 14-11 所示。

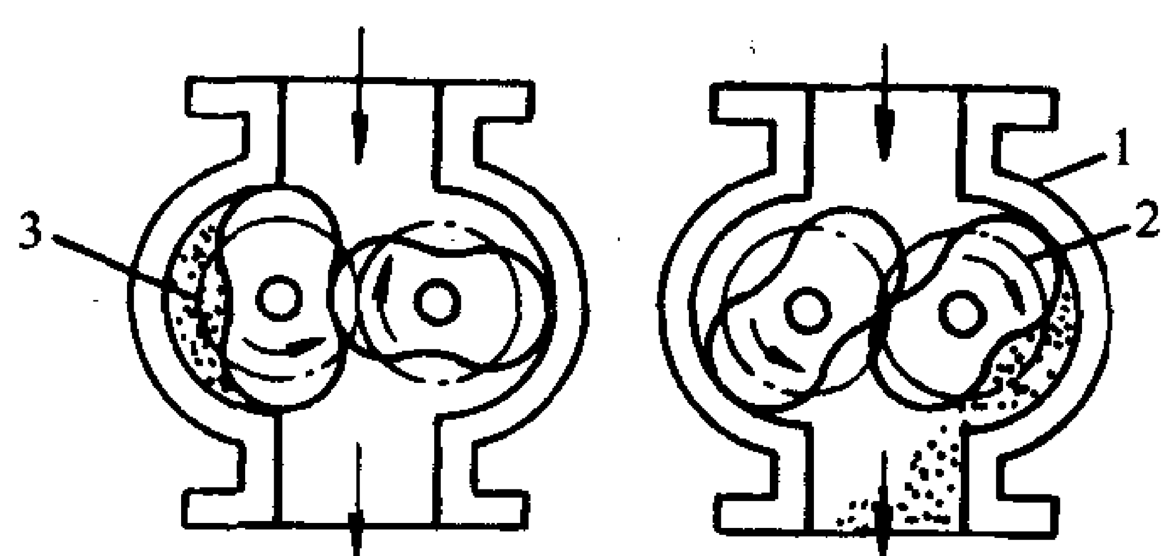


图 14-11　罗茨式回转压缩机
1—机壳；2—转子；3—压缩室

在椭圆形机壳内，有两个铸铁或铸钢的转子，装在两个互相平行的轴上，在轴端装有两个大小及式样完全相同的齿轮配合传动，由于传动齿轮作相反的旋转而带动两个转子也作相反方向的转动。两转子相互之间有一极小的间隙，使转子能自由地运转，而又不引起气体过多地泄漏。如图所示，左边转子作逆时针旋转，则右边的转子作顺时针方向旋转，气体由上边吸入，从下部排出。利用下面压力较高的气体抵消一部分转子与轴的重量，使轴承受的压力减少，因此也减少磨损。

此种压缩机每旋转一周的理论排气量为图 14-11 所示的压缩室容积的四倍，而每一个压缩室的截面积与转子横截面之半略等。故压缩机每转一周的排气量近似等于以转子长径为直径所作之圆与转子的厚度的乘积。故排气量为

$$Q = \lambda_v \cdot n \cdot \pi R^2 B \tag{14-6-5}$$

式中　Q——排气量(m^3/min)；

n——转数(r/min)；

R——转子长半径(m)；

B——转子的厚度(m)；

λ_v——容积系数，一般取 0.7～0.8。

罗茨式回转压缩机的转速一般是随着尺寸的加大而减小。小型压缩机的转数可达 1450r/min，大型压缩机的转数通常不大于 960r/min。转子的厚度 B 通常等于转子长径 D。

目前国产罗茨式回转压缩机的排气量，最大为 $160m^3/min$；排气压力为 35～100kPa。

罗茨式回转压缩机的优点是当转数一定而进口压力稍有波动时，排气量不变，转数和排气量之间保持恒正比的关系，转数高、没有气阀及曲轴等装置，重量较轻，应用方便。

罗茨式回转压缩机的缺点是当压缩机有磨损时，影响效率颇大；当排出的气体受到阻碍，则压力逐渐升高。为了保护机器不被损坏，在出气管上必须安装安全阀。

三、螺杆式气体压缩机

螺杆式气体压缩机的气缸成 8 字形，内装两个转子——阳转子(或称阳螺杆)和阴转子

（或称阴螺杆）。

目前转子采用对称型线和非对称型线两种，国内多用钝齿双边对称圆弧型线为转子的端面型线，如图 14-12 所示。阳转子有四个凸而宽的齿，为左旋向；阴转子有六个凹而窄的齿，为右旋向。阳转子和阴转子的转数比为 1.5:1。压缩机外壳的两端，设有进气口和排气口，它们分别设在阴阳转子啮合线（密封线）的两侧，成对角线设置。阴阳转子的啮合点随着转子的回转而移动，因此每一对啮合的沟槽和外壳之间形成的密封空间的容积，也随着转子的回转而时刻变化。吸气过程开始时，气体经过吸气口进入上述空间，随着转子的回转，空间容积逐渐增大，这个容积达最大值时，吸入口被遮断。转子继续旋转，容积逐渐减小，气体被压缩。当此空间和排气口接通时开始排气过程，排气过程一直进行到此空间容积为零时为止。因此，螺杆式压缩机没有余隙容积。

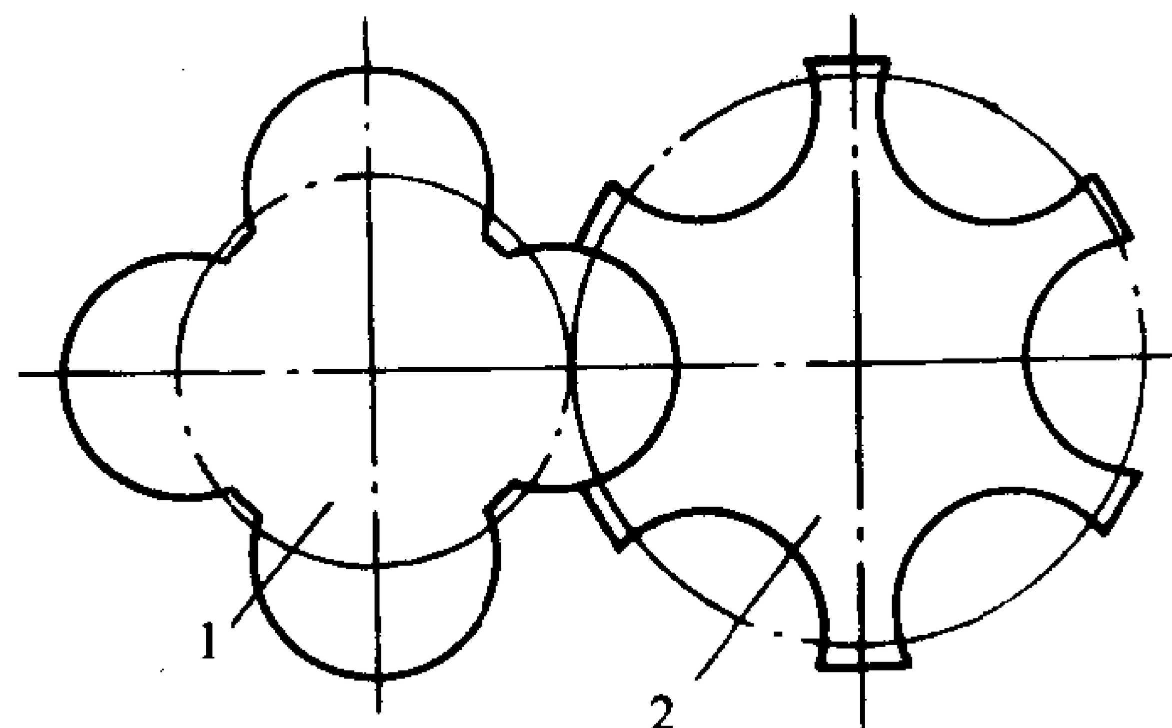


图 14-12 转子端面型线
1—阳转子；2—阴转子

螺杆式气体压缩机排气量为

$$Q=(F_1Z_1n_1+F_2Z_2n_2)L\lambda \tag{14-6-6}$$

式中 Q——压缩机排气量（m^3/min）；

F_1——阳转子两个齿间面积（m^2）；

F_2——阴转子两个齿间面积（m^2）；

Z_1、Z_2——阳、阴转子齿数；

L——转子长度（m）；

n_1、n_2——阳、阴转子每分钟转数；

λ——考虑泄漏的供气系数，一般情况下取 $\lambda=0.85\sim0.92$。

螺杆式压缩机的特点是排气连续，没有脉动和喘振现象；排气量容易调节；可以压缩湿气体和有液滴的气体。在构造上由于没有金属的接触摩擦和易损件，因此，转数高、寿命长、维修简单、运行可靠，一般不设备机。该压缩机构造较复杂，制造较困难，噪声较大（达 90dB 以上），噪声属于中高频，对人体危害较大。

目前国产螺杆式压缩机的排气量为 10～400m³/min；压力为 100～700kPa。

第七节 离心式压缩机

离心式压缩机的工作原理及构造如图 14-13 所示。

压缩机的主轴带动叶轮旋转时，气体自轴向进入并以很高的速度被离心力甩出叶轮，进入扩压器中。在扩压器中由于有宽的通道，气体的部分动能转变为压力能，速度降低而压力提高。接着通过弯道和回流器又被第二级吸入，通过第二级进一步提高压力。依此逐级压缩，一直达到额定压力。

气体经过每一个叶轮，相当于进行一级压缩，单级叶轮的叶顶速度越高，每级叶轮的压

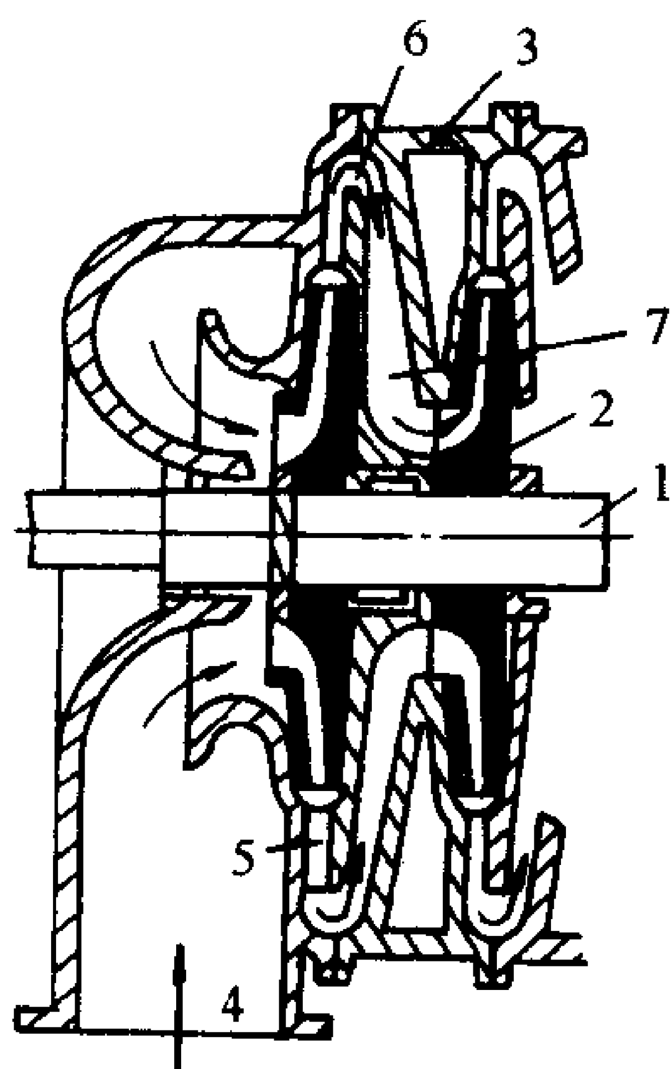


图 14-13　离心压缩机
1—主轴；2—叶轮；3—固定壳；4—气体入口；5—扩压器；6—弯道；7—回流器

缩比就越大，压缩到额定压力所需的级数就越少。由于材料极限强度的限制，用普通钢制造的叶轮，其叶顶速度为200～300m/s；用高强度钢制造的叶轮，叶顶速度在300～450m/s。为了得到较高的压力，需将多个叶轮串联起来压缩。通常在一个缸内叶轮级数不应超过10级，如果叶轮级数较多时，可用两个或两个以上的缸串联。

离心式压缩机的优点是输气量大而连续，运转平稳；机组尺寸小，易损部件少，维修工作量小，使用年限长，广泛用于制冷压缩机及天然气远距离输气干管的压气站。

离心式压缩机的缺点是高速下的气体与叶轮表面摩擦阻力损失大，气体在流经扩压器、弯道和回流器也有压头损失，因此效率比活塞式低，对压力的适应范围也较窄，有喘振可能。

第八节　压缩机的排气温度及功率计算

一、压缩机的排气温度

容积式(活塞式和回转式)压缩机的排气温度

容积式压缩机的排气温度可按绝热压缩公式计算

$$T_2 = T_1 \varepsilon^{\frac{k-1}{k}} \tag{14-8-1}$$

式中　T_2——排气温度(K)；

T_1——吸气温度(K)；

ε——压缩比；

k——绝热指数。

二、压缩机的功率

容积式压缩机的功率

根据绝热压缩功公式，通过单位换算，对于有中间冷却器的多级压缩容积式压缩机，各级入口温度相同，各级压缩比相同时，其理论功可按下式计算

$$N = 1.634 F z p_1 V_1 \frac{k}{k-1}\left[\varepsilon^{\frac{k-1}{zk}} - 1\right] \tag{14-8-2}$$

式中　N——压缩机理论功率(kW)；

F——中间冷却器压力损失校正系数，对于二段压缩 $F=1.08$，三段压缩 $F=1.10$；

p_1, V_1——第一级进口气体绝对大气压和气体流量，m^3/min；

z——压缩级数；

ε——实际总压缩比。

压缩机实际功率消耗可按下式计算：

$$N_s = \frac{N}{\eta_q \cdot \eta_c} \tag{14-8-3}$$

式中　N_s——压缩机实际功率(kW)；

η_q——机械效率，对于大、中型压缩机 $\eta_q=0.9\sim0.95$；对于小型压缩机 $\eta_q=0.85\sim0.90$；

η_c——传动效率，对于皮带传动 $\eta_c=0.96\sim0.99$；对于齿轮传动 $\eta_c=0.97\sim0.99$；对于直联 $\eta_c=1.0$。

选原动机的功率时，应留10%～25%的裕量

$$N_d=1.10\sim1.25N_s \tag{14-8-4}$$

式中　N_d——原动机功率(kW)。

【例14-1】 压缩机型号为DA220-72，气体入口压力为1.15绝对大气压，出口压力为9.5绝对大气压，气体工作状态的绝热指数 $k=1.130$，计算压缩机的功率。

【解】 此机的压缩比　$\varepsilon=\dfrac{p_2}{p_1}=\dfrac{9.5}{1.15}=8.26$

根据 $k=1.130$，$\varepsilon=8.26$，由公式(14-8-2)，其中 $Z=1$，$F=1$(一级压缩)

从压缩机型号可知其排气量为 $220m^3/min$。压缩机的理论功率为

$$N=3.91\ p_1V_1=3.91\times1.15\times220=989.23(kW)$$

DA220-72压缩机与汽轮机通过齿轮连接，取传动效率 $\eta_c=0.93$，机械效率 $\eta_q=0.96$，则压缩机实际功率为

$$N_s=\frac{N}{\eta_q\eta_c}=\frac{989.23}{0.93\times0.96}=1180(kW)$$

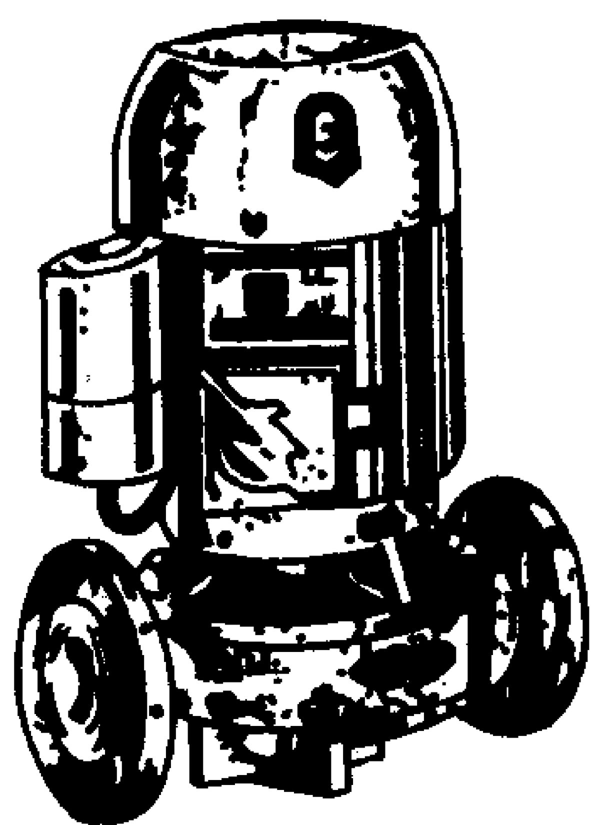
附　录

附录一　BA、BL 型离心泵及 SG 型管道泵性能示例

BA、BL 型离心式泵性能表　　**附表 1-1**

型号		流量 Q		扬程 H (m)	转速 n (r/min)	轴功率 N (kW)	效率 η (%)	允许吸上真空高度 H(m)	叶轮直径 D (mm)
BA	BL	(m^3/h)	(l/s)						
2BA-6	2BL-6	10～30	2.8～8.3	34.5～24	2900	1.86～3.09	50.6～63.5	8.7～5.7	162
2BA-6A	2BL-6A	10～30	2.8～8.3	28.5～20	2900	1.43～2.55	54.5～64.1	8.7～5.7	148
2BA-6B		10～25	2.8～6.9	22～16.3	2900	1.1～1.73	54.5～64	8.7～6.6	132
2BA-9	2BL-9	11～25	3～7	21～16	2900	1.12～1.66	56～66	8～6	127
2BA-9A	2BL-9A	10～22	2.8～6.1	16.8～13	2900	0.85～1.23	54～63	8.1～6.5	117
2BA-9B		10～20	2.8～5.6	13～10.3	2900	0.7～0.89	51～62	8.1～6.8	106
3BA-6	3BL-6	30～70	8.3～19.5	62～44.5	2900	9.3～13.3	54.4～64	7.7～4.7	218
3BA-6A	3BL-6B	30～60	8.3～17.7	45～30	2900	6.65～8.3	55～59	7.5	192
3BA-9	3BL-9	30～55	8.3～15.1	35.5～28.8	2900	4.6～6.32	62.5～68.2	7～3	168
3BA-9A	3BL-9A	25～45	7～12.5	26.2～22.5	2900	2.83～3.87	63.7～71.2	7～5	145
3BA-13	3BL-13	32.4～52.2	9～14.5	21.5～15.6	2900	2.5～2.96	76～75	6.5～5	132
3BA-13A	3BL-13A	29.5～48.6	8.2～13.5	17.4～12	2900	1.86～2.15	75～74	6～4	120
3BA-13B	3BL-13B	28～41.5	7.5～11.5	13.5～9.5	2900	1.63～1.73	63～62	5.5～4	110
4BA-6		65～135	18～37.5	98～72.5	2900	27.6～40.4	63～66	7.1～4	272
4BA-6A		65～125	18～34.7	82～61.5	2900	22.9～31.7	63.2～66	7.1～4.6	250
4BA-8		70～120	19.4～33.4	59～43	2900	17.5～21.4	64.5～66	5～3.5	218
4BA-8A		70～109	19.4～30.4	48～36.8	2900	13.6～16.8	67～65	5.38	200
4BA-12	4BL-12	65～120	18～33.3	37.7～28	2900	9.25～12.3	72～74.5	6.7～3.3	178
4BA-12A	4BL-12A	60～110	16.7～30.6	31.6～23.3	2900	7.4～9.5	70～73.5	6.9～4.5	163

SG 型管道泵适用于高层建筑、园林喷灌、管道增压、冷热水循环、易燃易爆液体与腐蚀性液体输送及各种锅炉、供水、暖通、化工、石油管道设备配套。其规格见附表 1-2。



附录 1 图

附表 1-2

规格 口径—流量—扬程	电 压 (V)	出厂单价(元台/套)				
		普通型	热水型	耐腐型	防爆型	防腐防爆
15—1.8—10	220	365	510	700	/	/
20—2—8	220	375	520	750	/	/
20—3—14	220	445	600	1300	/	/
25—2.5—15	220	465	670	1320	/	/
25—4—20	220	680	890	1420	/	/
32—5—20	220	690	920	1470	/	/
40—5—8	220	550	735	1380	/	/
40—6—20	220	715	950	1480	/	/
50—10—15	220	730	960	1490	/	/
25—4—20	380	580	790	1300	1600	2080
25—6.5—30	380	870	1130	2010	2400	3120
32—5—20	380	600	810	1320	1660	2120
32—8—30	380	880	1150	2030	2430	3130
40—6—20	380	635	850	1340	1680	2230
40—9—30	380	850	1170	2050	2450	3150
40—15—50	380	1780	2180	3390	3420	4590
50—10—15	380	660	860	1350	1690	2280
50—15—30	380	880	1190	2100	2480	3310
50—16—50	380	1800	2230	3460	3450	4670
50—20—65	380	2650	3320	4920	4920	6780
50—25—80	380	4560	5220	7185	6880	8860
50—30—100	380	6255	7450	8930	9790	13280
65—30—15	380	870	1150	2020	2430	3240
65—30—27	380	1590	1920	3300	3270	4520

续表

规格 口径—流量—扬程	电　压 (V)	出厂单价(元台/套)				
		普通型	热水型	耐腐型	防爆型	防腐防爆
65—30—50	380	2545	3140	4750	4890	6590
65—40—80	380	5510	6260	8320	7850	9630
80—35—20	380	1540	1980	3100	3360	4530
80—50—30	380	2360	2890	4530	4820	6410
80—60—50	380	4240	4860	6570	6770	8430
80—55—100	380	8140	9260	9850	12180	14520
100—40—18	380	1665	2080	3320	3440	4550
100—50—30	380	2440	2970	4670	4860	6480
100—60—50	380	4345	4920	6890	6820	8520
100—75—78	380	7210	8220	9380	9880	13150
100—100—60	380	8585	9210	9610	11600	13820
100—55—100	380	8352	9340	9920	12330	14670
125—80—18	380	2450	3150	5350	4930	6870
150—100—15	380	2620	3230	5670	4990	6950
150—140—26	380	4865	5720	8280	7570	9780
150—200—50	380	8850	9380	15320	16720	19270
200—200—20	380	5090	5880	8570	7620	9960
200—220—44	380	8810	9450	15800	16170	17950
250—380—22	380	8820	9620	15400	16250	19200
250—400—20	380	8850	9810	15660	16980	19720

注：热水型使用温度 140℃。

附录二　BL 型水泵性能表(摘录)和水泵型号举例

BL 型水泵性能表(摘录)　　　　**附表 2**

型　号	流　量 (m^3/h)	扬　程 (m)	转　数 (r/min)	功　率(kW)		效　率 (%)	吸上真空度 (m)	叶轮直径 (mm)
				轴功率	电机功率			
2BL-6A	10	28.5	2900	1.43	3	54.5	8.7	148
	20	25.2		2.08		65.6	7.2	
	30	20		2.55		64.1	5.7	
2BL-9	11	21	2900	1.12	2.2	56	8.0	127
	20	18.5		1.48		68	6.8	
	25	16		1.66		66	6.0	

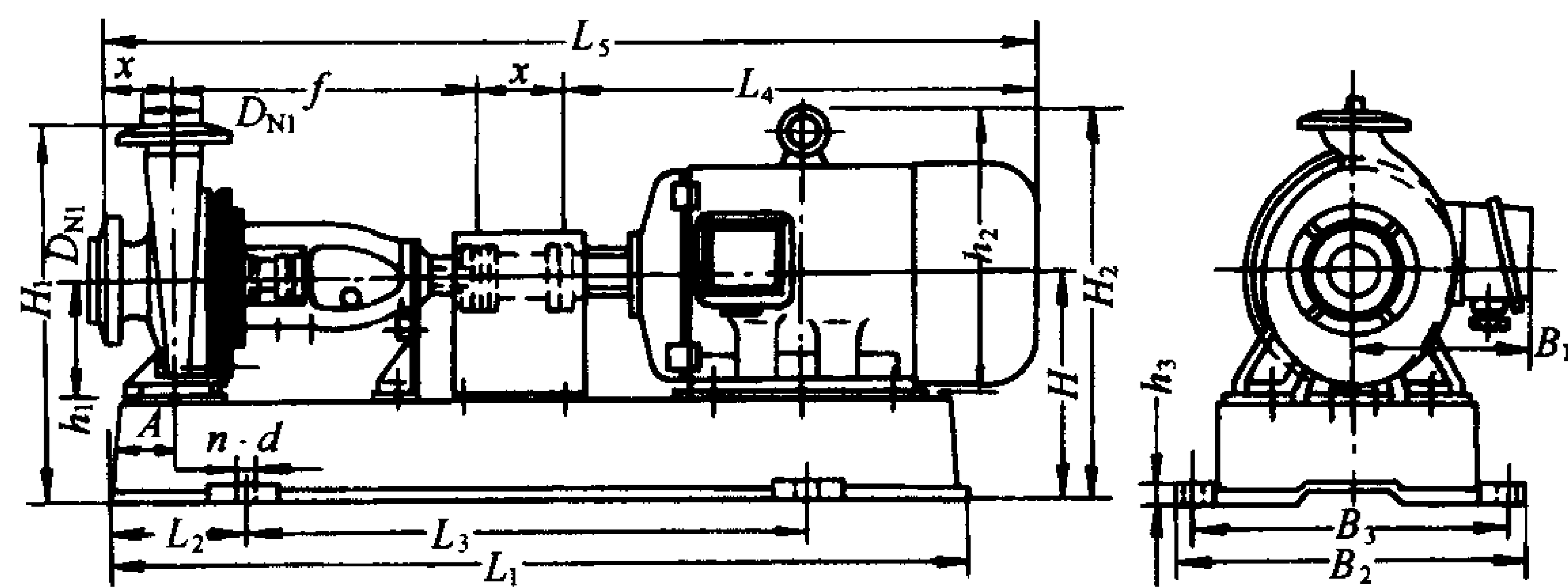
续表

型　号	流　量 (m^3/h)	扬　程 (m)	转　数 (r/min)	功　率(kW) 轴功率	功　率(kW) 电机功率	效　率 (%)	吸上真空度 (m)	叶轮直径 (mm)
2BL-9A	10	16.8	2900	0.85	1.5	54	8.1	117
	17	15		1.07		65	7.3	
	22	13		1.23		63	6.5	
3BL-6	30	62	2900	9.3	17	54.4	7.7	218
	45	57		11.0		63.5	6.7	
	60	50		12.3		66.3	5.6	
	70	44.5		13.3		64	4.7	
3BL-6A	30	45	2900	6.65	13	55	7.5	192
	40	41.5		7.30		62	7.1	
	50	37.5		7.98		64	6.4	
	60	30		8.30		59		
3BL-9	30	35.5	2900	4.64	7.5	62.5	7.0	168
	45	32.6		5.56		71.5	5.0	
	55	28.8		6.32		68.2	3.0	
3BL-9A	25	26.2	2900	2.83	5.5	63.7	7.0	145
	35	25		3.35		70.8	6.4	
	45	22.5		3.87		71.2	5.0	
3BL-13	32.4	21.5	2900	2.5	4	76	6.5	132
	45	18.8		2.88		80	5.5	
	52.2	15.0		2.96		75	5.0	
3BL-13A	29.5	17.4	2900	1.86	3	75	6.0	120
	39.6	15.0		2.02		80	5.0	
	48.6	12.0		2.15		74	4.5	
3BL-13B	28.0	13.5	2900	1.63	2.2	63	5.5	110
	34.2	12.0		1.72		65	5.0	
	41.5	9.5		1.73		62	4.0	
4BL-12	65	37.7	2900	9.25	17	72	6.7	178
	90	34.6		10.8		78	5.8	
	120	28		12.3		74.5	3.3	
4BL-12A	60	31.6	2900	7.4	13	70	6.9	163
	85	28.6		8.7		76	6.0	
	110	23.3		9.5		73.5	4.5	

附录三　IS 型单级离心泵

该泵是采用 ISO2858 国际标准生产的。比 BA 型的效率平均提高 1%～7%，拆卸时可不需动管路系统，泵的轴封为填料密封，自电动机端向泵看，泵轴顺时针方向旋转。

外形构造见附录三图。性能及外形安装尺寸见附表 3。



附录三图　IS 型单级离心泵外形图

IS 型离心泵规格性能表　　附表 3

泵型号	n=1450r/min						n=2900r/min					
	流量 G (m³/h)	扬程 H (m)	效率 η (%)	气蚀余量 (m)	电机 功率 N (kW)	电机 型号	流量 G (m³/h)	扬程 H (m)	效率 η (%)	气蚀余量 (m)	电机 功率 N (kW)	电机 型号
IS50-32-125	6.3	5	54	2.0	0.55	Y801-4	12.5	20	60	2.0	2.2	Y90L2-2
IS50-32-160	6.3	8	48	2.0	0.55	Y801-4	12.5	32	54	2.0	3	Y100L-2
IS50-32-200	6.3	12.5	42	2.5	0.75	Y802-4	12.5	50	48	2.0	5.5	Y132S1-2
IS65-50-125	12.5	5	64	2.0	0.55	Y801-4	25	20	69	2.0	3	Y100L-2
IS65-50-160	12.5	8	60	2.0	0.75	Y802-4	25	32	65	2.0	5.5	Y132S1-2
IS65-40-200	12.5	12.5	55	2.0	1.1	Y90S-4	25	50	60	2.0	7.5	Y132S2-2
IS80-65-125	25	5	71	2.5	0.75	Y802-4	50	20	75	3.0	5.5	Y132S1-2
IS80-65-160	25	8	69	2.5	1.5	Y90L-4	50	32	73	2.5	7.5	Y132S2-2
IS80-50-200	25	12.5	65	2.5	2.2	Y100L1-4	50	50	69	2.5	15	Y160M2-2
IS100-80-125	50	5	75	2.5	1.5	Y90L-4	100	20	78	4.5	11	Y160M1-2
IS50-32-250	6.3	20	32	2.0	1.5	Y90L-4	12.5	80	38	2.0	11	Y160M1-2
IS65-40-250	12.5	20	48	2.0	2.2	Y100L1-4	25	80	53	2.0	15	Y160M2-2
IS65-40-315	12.5	32	37	2.5	4	Y112M-4	25	125	40	2.5	30	Y200L1-2
IS80-50-250	25	20	60	2.5	3	Y100L2-4	50	80	63	2.5	22	Y180M-2
IS80-50-315	25	32	52	2.5	5.5	Y132S-4	50	125	54	2.5	37	Y200L2-2
IS100-65-200	50	12.5	73	2.0	4	Y112M-4	100	50	76	3.6	22	Y180M-2
IS100-65-250	50	20	68	2.0	5.5	Y132S-4	100	80	72	3.8	37	Y200L2-2
IS100-80-160	50	8	75	2.5	2.2	Y100L₁-4	100	32	78	4.0	15	Y160M2-2

续表

泵型号	n = 1450r/min						n = 2900r/min					
	流量 G (m^3/h)	扬程 H (m)	效率 η (%)	气蚀余量 (m)	电机 功率 N (kW)	电机 型号	流量 G (m^3/h)	扬程 H (m)	效率 η (%)	气蚀余量 (m)	电机 功率 N (kW)	电机 型号
IS125-100-200	100	12.5	76	2.5	7.5	Y132M-4	200	50	81	4.5	45	Y225M-2
IS100-65-315	50	32	63	2.0	11	Y160M-4	100	125	66	3.6	75	Y280S-2
IS125-100-250	100	20	76	2.5	11	Y160M-4	200	80	78	4.2	75	Y280S-2
IS125-100-315	100	32	73	2.5	15	Y160L-4	200	125	75	4.5	110	Y315S-2
IS125-100-400	100	50	65	2.5	30	Y200L-4						
IS150-125-250	200	20	81	3.0	18.5	Y180M-4						
IS150-125-315	200	32	79		30	Y200L-4						
IS150-125-400	200	50	75	2.8	45	Y225M-4						
IS200-150-250	400	20	82		37	Y225S-4						
IS200-150-315	400	32	82	3.5	55	Y250M-4						
IS200-150-400	400	50	81	3.8	90	Y280M-4						

注:兰州水泵厂生产。

附录四　T4-72 型离心通风机

T4-72 型离心通风机是原 QDG 型离心通风机的改进型,保留原 QDG 型离心通风机的优点,提高了性能,改善了噪声。本系列产品共 3,3.5,4,4.5,5,6,7,8,10,12,14,16,18,20 等 14 种,其中 10,12,14,16,18,20 等六种有双进风型式。

其性能见表 4,№3~6 离心通风机安装及外形尺寸见样本资料。

T4-72 型离心通风机性能表　　**附表 4**

转数 (r/min)	序号	出口风速 (m/s)	全压 (Pa)	流量 (m^3/h)	电动机 型号	电动机 (kW)	地脚螺栓(四套) 代号 F2120
T4-72　№.5A							
2900	1	13.8	3200	7942	Y160M_1-2(B35)	11	M10×250
	2	15.5	3120	8860			
	3	17.2	3030	9840			
	4	18.8	2960	10804			
	5	20.7	2800	11830			
	6	22.0	2600	12630			
	7	23.9	2340	13700			
	8	25.5	2010	14620			

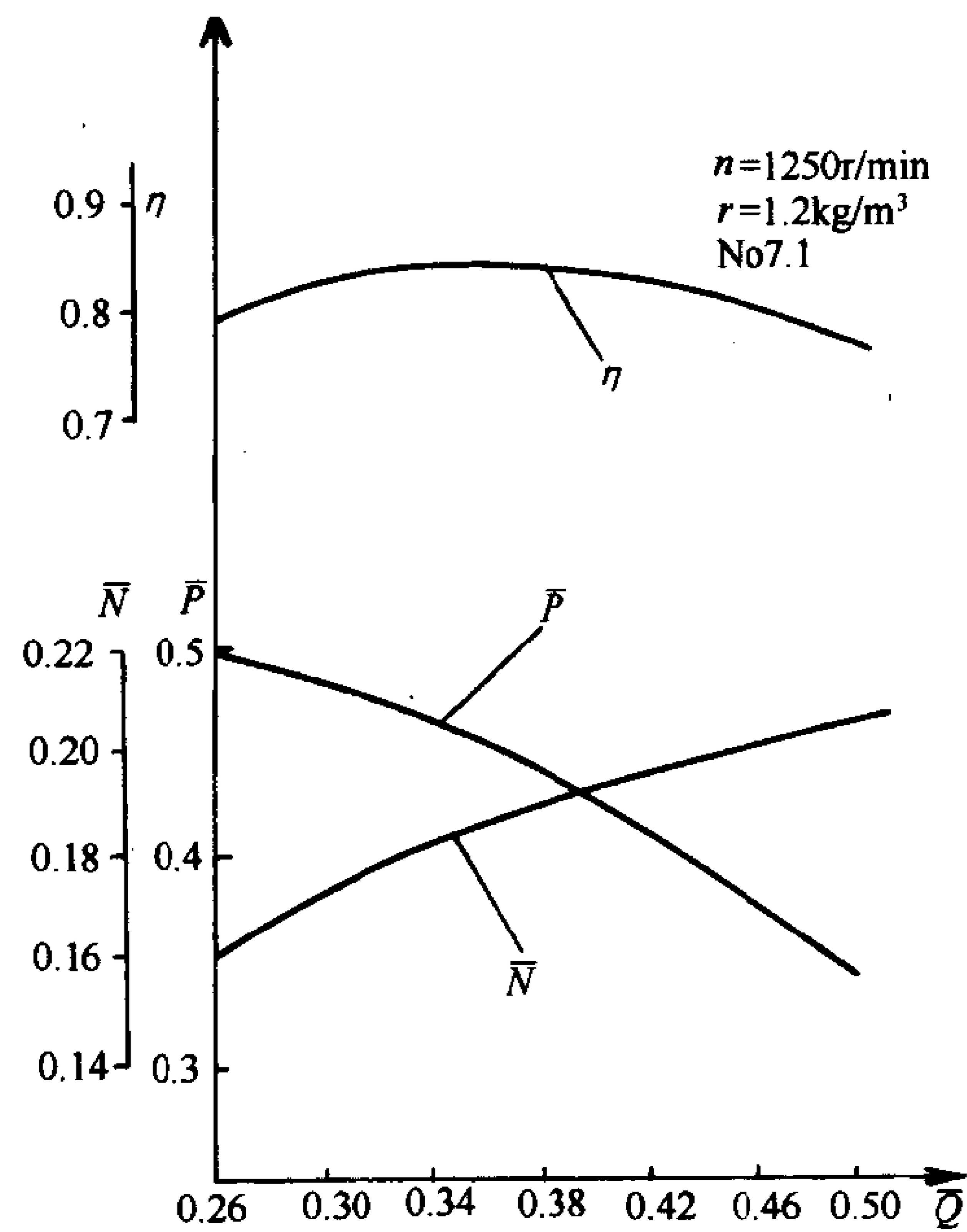
续表

转数 (r/min)	序号	出口风速 (m/s)	全压 (Pa)	流量 (m^3/h)	电动机 型号	电动机 (kW)	地脚螺栓(四套) 代号 F2120
T4-72 №.5A							
1450	1	6.9	800	3976	$Y100L_1$-4 (B35)	2.2	M10×250
	2	7.7	780	4430			
	3	8.6	760	4918			
	4	9.4	740	5402			
	5	10.3	690	5914			
	6	11.0	650	6315			
	7	12.0	580	6850			
	8	12.7	500	7310			
T4-72 №.6A							
1450	1	8.3	1150	6860	Y112M-4 (B35)	4	M10×250
	2	9.3	1120	7660			
	3	10.3	1090	8550			
	4	11.3	1060	9360			
	5	12.4	990	10200			
	6	13.2	940	10900			
	7	13.4	840	11840			
	8	15.3	720	12620			
960	1	5.5	500	4540	Y100L-6 (B35)	1.5	M10×250
	2	6.2	490	5070			
	3	6.8	480	5630			
	4	7.5	460	6220			
	5	8.2	430	6760			
	6	8.8	410	7220			
	7	9.5	370	7840			
	8	10.1	320	8360			

附录五　KT4-68-22№6.3E 型风机性能表

附表 5

主轴转数 (r/min)	序 号	全 压 (mmWg)	流 量 (m^3/h)	所需功率 (kW)	电动机		主轴皮带轮	
					型 号	功率(kW)	代 号	规 格
1800	1	214	17650	15.18	Y180L-4	22		200×48×C_4
	2	209	20320	16.66				
	3	201	22980	17.91				
	4	192	25650	19.10				
	5	179	28310	19.88				
	6	166	30980	20.42				
	7	144	33640	20.73				
1600	1	169	15690	10.66	Y160L-4	15		200×48×C_4
	2	165	18060	11.69				
	3	158	20430	12.51				
	4	152	22730	13.39				
	5	141	25160	13.92				
	6	131	27530	14.32				
	7	114	29900	14.59				
1400	1	129	13730	7.12	Y160M-1	11		200×48×B_4
	2	127	15800	7.87				
	3	121	17870	8.38				
	4	116	19950	8.97				
	5	108	22020	9.33				
	6	100	24090	9.56				
	7	87	26170	9.71				



附录五图　KT4-68-22 型离心风机无因次性能曲线

附录六　T40 型轴流通风机

T40 型轴流通风机系 $30K_4$ 型(又称 03-11 型)通风机的改进型。

本系列产品,按叶轮直径不同共分成№2 $\frac{1}{2}$、3、3 $\frac{1}{2}$、4,5,6,7,8,9,10 等十种。每一种机号叶片又可安装成 15°,20°,25°,30°,35°等五种角度。

风机均采用叶轮直接装在电机轴上的直联结构。在叶轮圆周速度不超过 60m/s 条件下配用三种转数:2900,1450,960r/min。面对进风口方向看叶轮为逆时针转动。

风机性能请参看附表 6。此外,通过通风机的气体应无腐蚀性及显著粉尘,其温度不得超过 45℃。

T40-11 型№2 $\frac{1}{2}$～10 轴流通风机性能　　　　附表 6

机号	叶轮			主轴转速	叶片数 4							
					叶片角度 θ			流量系数 $\bar{Q}$		压力系数 $\bar{H}$		
					15　20 25　30 35			0.168　0.215 0.277　0.300 0.338		0.0724　0.0800 0.0810　0.0861 0.1068		
	直径 (mm)	当量面积 (m²)	周速 (m/s)	(r/min)	叶片角度	风量 (m³/h)	全压 (Pa)	效率	轴功率 (kW)	采用轴功率(kW)	配用电机 型号	功率 (kW)
2½	250	0.0492	38.0	2900	15	1130	128	78	0.0502	0.0578	2AO5022	0.090
					20	1450	141	81	0.0681	0.0783	2AO5022	0.090
					25	1860	143	84	0.0862	0.0992	2AO5612	0.120
					30	2010	152	83	0.0995	0.1145	2AO5612	0.120
					35	2270	188	80	0.1440	0.1657	2AO5622	0.180
			19.0	1450	15	564	32	78	0.0063	0.0072	2AO5014	0.040
					20	723	35	81	0.0035	0.0098	2AO5014	0.040
					25	931	36	84	0.0108	0.0124	2AO5014	0.040
					30	1010	38	83	0.0124	0.0143	2AO5014	0.040
					35	1140	47	80	0.0180	0.0207	2AO5014	0.040
3	300	0.0707	45.5	2900	15	1950	184	78	0.125	0.144	2AO5622	0.180
					20	2500	203	81	0.170	0.195	2AO6312	0.250
					25	3220	206	84	0.214	0.247	2AO6312	0.250
					30	3480	219	83	0.248	0.285	2AO6322	0.370
					35	3930	271	80	0.358	0.413	2AO6332	0.550

机号	叶轮			主轴转速	叶片数 4							
	直径	当量面积	周速		叶片角度 θ			流量系数 $\bar{Q}$			压力系数 $\bar{H}$	
					15 20 25 30 35			0.168 0.215 0.277 0.300 0.338			0.0724 0.0800 0.0810 0.0861 0.1068	
	(mm)	(m^2)	(m/s)	(r/min)	叶片角度	风量 (m^3/h)	全压 (Pa)	效率	轴功率 (kW)	采用轴功率(kW)	配用电机 型号	配用电机 功率 (kW)
					15	970	46	78	0.0155	0.0130	2AO5614	0.090
					20	1250	51	81	0.0212	0.0244	2AO5614	0.090
3	300	0.0707	22.6	1450	25	1610	52	84	0.0268	0.0368	2AO5614	0.090
					30	1740	55	83	0.0310	0.0356	2AO5614	0.090
					35	1960	68	80	0.0448	0.0516	2AO5614	0.090
					15	3100	250	78	0.270	0.311	2AO6322	0.370
					20	3970	277	81	0.367	0.422	2AO6332	0.550
3½	350	0.0690	53.1	2900	25	5120	280	84	0.463	0.533	2AO6332	0.550
					30	5520	298	83	0.535	0.615	2AO7112	0.750
					35	6240	370	80	0.775	0.892	JO212-2	1.100

轴流式风机型号含义举例：

30 K 4 — 1 1 №3 A

- A：风机传动方式为电机直联式
- №3：表示风机机号，叶轮直径的分米数
- 1：表示该型风机为第一次设计结构
- 1：表示该型风机叶轮为1级
- 4：表示该型叶片第4次设计
- K：表示该型风机的叶型为等厚板型的扭曲叶片
- 30：表示该型风机的毂比(0.30)100倍后的整数—轮毂直径比叶轮外径

附录七 部分习题答案

1-2 9.807kN/m^3, 1kg, 9.807N

1-4 $0.605\times10^{-6}m^2/s$

1-5 $0.0183\times10^{-3}Pa\cdot s$

1-6 3.5%

1-7 9.807N/m^2

1-8 $4.3\times10^{-5}N$

1-9 0.105Pa·s

1-10　39.5N·m

1-12　0.026%

1-13　$0.51\times10^{-9}m^2/N$，　$E=1.96\times10^9N/m^2$

1-14　$0.2m^3$

1-15　$7.65N/m^3$，　$0.78kg/m^3$

2-1　(a) $68.65kN/m^2$，　(b) $28.1kN/m^2$，　(c) $-29.42kN/m^2$，　0,$19.614kN/m^2$

2-2　$6.67kN/m^2$，　680mm

2-4　(1) $19.63kN/m^2$，　$2mH_2O$,(2) $166.67kN/m^2$，　(3) $29.57kN/m^2$

2-5　$-4.9kN/m^2$，　$4.9kN/m^2$

2-6　(1) $115.55kN/m^2$，　$17.48kN/m^2$，　(2) 1.78m，　6.78m
(3) $9.63kN/m^2$，　1.21m

2-7　$37.84kN/m^2$，　1.36m

2-8　402mmHg，　328mmHg

2-9　$-9.807kN/m^2$，　$2mH_2O$

2-10　$27kN/m^2$，　$-38kN/m^2$

2-11　(1) 4.6m，　(2) 0.812m，　(3) 0.3m

2-14　0.137m

2-15　$2.042kN/m^2$，　$2.942kN/m^2$

2-16　5.61m

2-19　$15kN/m^2$，　$1630mmH_2O$

2-20　(1) $1.867kN/m^2$，　(2) $0.785kN/m^2$。p_B 均大于 p_A

2-21　(1) $16.05kN/m^2$，　(2) $17.32kN/m^2$。p_A 均大于 p_B

2-22　$476.8kN/m^2$

2-23　$5.29N/m^3$

2-24　$271N/m^2$

2-25　$\gamma'=(1-a/b)\gamma$，　$p_A-p_B=\frac{a}{b}\gamma H$

2-26　(1) 10.79kN，　(2) 1.96kN

2-27　59kN 作用于闸门中心

2-28　34.65kN，　2.46m

2-29　45.2kN，　2.26m

2-30　9.15kN，　0.01m

2-31　$F=24kN$

2-32　101.31kN

2-33　$h>1.33m$

2-34　225kN，　$y_D-y_C=0.05m$

2-35　水面下 1.15m，　2.11m，　2.73m

2-36　590kN，　920kN

2-37　24.5kN，　120kN

2-38　329kN

2-40　1.2kN

2-41　45.2kN

2-42　$a=1.635m/s^2$

2-44　1.15mH_2O

2-45　46.31kN

2-46　427rpm

2-47　178rpm

2-48　16.5s^{-1}，　1.15mH_2O,0，　1.65mH_2O，　0.4mH_2O

3-1　1.59m/s

3-2　6.25m/s，　12.5m/s

3-3　(1) 0.0049m^3/s 及 4.9kg/s，　(2) 0.625m/s 及 2.5m/s

3-4　300mm，　1.18m/s

3-5　450mm，　17.5m/s

3-6　$\frac{d}{2\sqrt{10}}$，　$\frac{\sqrt{3}d}{2\sqrt{10}}$，　$\frac{\sqrt{5}d}{2\sqrt{10}}$，　$\frac{\sqrt{7}d}{2\sqrt{10}}$，　$\frac{3d}{2\sqrt{10}}$，　$\rho\frac{\pi d^2}{20}(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)$

3-7　干:18m/s，　支:22.2m/s

3-8　2.64kg/m^3

3-9　$A\rightarrow B$，　2.834m

3-10　1.86m

3-11　0.12m

3-12　(1) 3.85m/s，　(2) 4.31m/s

3-13　H11.8m，　p79kN/m^2

3-14　0.0174m^3/s，　68.1kN/m^2，−481N/m^2，　−20.1kN/m^2,0

3-15　0.00815m^3/s，　395mm

3-17　$p_0 \geqslant \gamma_{水} h \Big/ \left[\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 - 1\right]$

3-18　8.74m/s

3-19　(1) 4.43m/s，　8.85m/s，　29.4kN/m^2

　　　(2) 2.00m/s，　3.96m/s，　33.2kN/m^2 及 12kN/m^2

3-20　44.7mm

3-21　63.68N/m^2

3-22　≥32.6m，　−63.5N/m^2

3-23　6.03m/s 流出，　2.58m/s 流入

3-24　178.5N/m^2

3-25　31m/s

3-28　12kN

3-29　(1) 3.269kN，　(2) 5.24kN

3-30　$F_{上}$=8.3N，　$F_{下}$=159.3N

3-31　2.326kN

3-32　8.69kN，　14.98kN

3-33　523N

3-34　1405J/s

3-35　$x^2+y^2=c$

3-36　$t=0$，　$xy=1$；

　　　$t=1$，　$(x+1)(y-1)=0$

4-2　Re=84000 紊流，　Re=1314 层流

4-3　保持层流的最大流量 32kg/h，流量为 200kg/h 为紊流

4-4　$Re_1/Re_2=2$

4-5　保持紊流最小 Re 取 4000，$d=7.75$mm；若最小 Re 取 2000，则 $d=15.6$mm

4-6　$Q=40$l/s 时 $h_f=16.5$m

4-7　19.4mm

4-8　(1) 层流，(2) $\nu=7.9\times10^{-5}m^2/s$，(3) 反向流读数无变化

4-9　$h=30$cm 时，$\nu=8.6\times10^{-6}m^2/s$，$\mu=7.75\times10^{-3}Pa\cdot s$

4-11　$k=0.2$mm

4-12　$Q=0.154m^3/s$

4-13　光滑区 $\lambda_1=0.027, h_{f1}=0.0057$m；过渡区 $\lambda_2=0.026, h_{f2}=0.088$m；
粗糙区 $\lambda_3=0.024, h_{f3}=8.15$m

4-14　$h_f=22.69$m

4-15　0.157～9.1l/s

4-16　过渡区 $\lambda=0.018$

4-17　0.118mm，0.116mm

4-18　0.2mm

4-19　$\lambda=0.014$

4-20　$h_f=73.7$m

4-21　层流区 $d_2/d_1=1.19$ 增大 19%；光滑区 $d_2/d_1=1.16$ 增大 16%
阻力平方区 $d_2/d_1=1.14$ 增大 14%

4-22　$K/d=0.0174$

4-23　$H=26.7$m

4-24　$\zeta=0.33$

4-25　$\zeta=0.763$

4-26　76.5mm，102mm，115mm，203mm

4-27　$\frac{1}{2}(v_1+v_2)$，$\frac{1}{2}(v_1-v_2)^2/2g$

4-28　右侧水银液面较左侧高 0.219mHg

4-29　0.54 或 8.64

4-30　$H=5.44$m

4-31　圆管为方管流量的 1.08 倍

4-32　$h_{md,b}=0.171$m，$h_{mb,d}=0.657$m，$h_{mb,d}/h_{md,b}=3.85$

5-2　(1) 6.0m/s，$4.82\times10^{-4}m^3/s$，(2) 8.12m/s，$6.38\times10^{-4}m^3/s$

5-3　(2) 1.85m，(3) $3.58\times10^{-3}m^3/s$

5-5　0.707

5-6　$1.08kN/m^2$

5-7　219 个

5-8　(1) $3.72\times10^{-2}m^3/s$，(2) $2.16\times10^{-2}m^3/s$，(3) $2.36\times10^{-2}m^3/s$

5-9　8.96kg/s

5-11　$Q=0.2m^3/s$

5-14　$H=14.45$m

5-15　$0.05m^3/s$，-2.75m

5-16　$S_1=118s^2/m^5$，$S_2=2100s^2/m^5$，23.54m

5-17 $2500N/m^2$, $2830N/m^2$

5-20 $Q_1=0.05m^3/s$, $Q_2=0.045m^3/s$, $h=3.72m$

5-22 $7.67m+11.15m+5.3m=24.12m$

5-25 $4.46\times10^{-3}m^3/s$, $2.41\times10^{-3}m^3/s$, $0.63\times10^{-3}m^3/s$

5-27 $60.25\times10^{-3}m^3/s$, 256

5-28 $1.86m^3/s, 0.69m^3/s$, $1.17m^3/s$, $44.1kN/m^2$

6-1 $R=0.72m$, $v_m=5.32m/s$, $v_1=1.05m/s$, $v_2=2.5m/s$

6-2 $3.03m^3/s$

6-3 $d_0=0.14m$, $Q_0=0.1m^3/s$

6-4 $v_m=4m/s$, $v_2=2.78m/s$, $Q=3.6m^3/s$

6-5 $v_m=5.18m/s$, $v_2=2.43m/s$, $D=1m$

6-6 $h_2=1.88m$, $Q_0=13.93m^3/s$, $Q=37.9m^3/s$

6-7 $b_0=0.17m$, $s=1.695m$

6-8 $y=0.0336x^3+0.0288x^2$

6-9 $v_2=0.18m/s$, $t_2=23.7℃$, $x=3m$, $y=-4.3m$

6-10 $v_2=1m/s$, $t_2=12.5℃$, $x=6m, y=-2.6m$

6-11 $b_0=0.014m$, $H_m=0.09mg/l$

6-12 $Q/Q_0=21.23$

6-13 $r_0=0.49m$

6-14 $v/v_0=0.239$

6-15 $Q_0=16100m^3/h$

6-16 $T=290.5k$

6-17 $\alpha=15.2°$, $x_0=0.276m$, $s_n=0.629m$

7-1 $Q_x=1, Q_y=1$; $\varepsilon_z=\frac{3}{2}$; $\omega_z=\frac{1}{2}$。

7-2 $\omega_x=\omega_y=\omega_z=\frac{1}{2}$; $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\frac{5}{2}$; $y=x+c_1, z=x+c_2$

7-3 $\Omega_x=0$, $\Omega_y=cz/\sqrt{y^2+z^2}$, $\Omega_2=-cy/\sqrt{y^2+z^2}$; $y^2+z^2=c_1$

7-4 (1) 0; (2) $-\pi Ab^2$; (3) $2\pi A$

7-6 $a_x=27$, $a_y=9$, $a_z=64$

7-7 $a_x=3$, $a_y=-1$

8-2 $(a),(f),(h),(L),(m)$为无旋流动，$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial x}$或$\frac{\partial u_r}{\partial \theta}=\frac{\partial u_\theta r}{\partial r}$

8-4 (a) $Q=c\text{Ln}(r_1/r_2)$; (b) $Q=\frac{\omega^2}{2}(r_1^2-r_2^2)$

8-5 $u=\left[\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}=3(x^2+y^2)=3r^2$

8-7 轮廓线 $x^2+16y^2=1$

8-8 $\psi=v\left(r-\frac{4}{r}\right)\sin\theta, \varphi=v\left(r+\frac{4}{r}\right)\cos\theta$

8-9 叠加前驻点(0,0)

叠加后驻点$\left(-\frac{1}{2\pi v}\left[q-\sqrt{q^2+(2a\pi v)^2}\right],0\right)$

$\left(-\frac{1}{2\pi v}\left[q+\sqrt{q^2+(2a\pi v)^2}\right],0\right)$

8-10 原点流速 $u_x=6.37\text{m/s}, u_y=0$

(0,4)点流速 $u_x=\frac{180}{25\pi}=2.29\text{m/s}, u_y=0$

流函数 $\psi=\frac{\theta}{\pi}\text{arctg}\,\frac{4}{3}$

8-11 偶极矩 $M=500\pi$， 流函数 $\psi=-50$

8-12 (1,0.5)点， $u_r=0.0284\text{m/s}$， $u_\theta=0.142\text{m/s}$

8-13 (1) 轮廓线方程 $\text{tg}\pi(5-2y)=\frac{y-2}{x}$

(2) 新驻点 $x=\frac{-q\mp\sqrt{q^2-16\pi^2v^2}}{2\pi v}, y=0$

8-14 $\psi=-\frac{Q}{2\pi T}\left(\text{arctg}\frac{y-b}{x-a}+\text{arctg}\frac{y+b}{x-a}+\text{arctg}\frac{y-b}{x+a}+\text{arctg}\frac{y+b}{x+a}\right)$

$\varphi=-\frac{Q}{2\pi T}(\ln\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}-\ln\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}+\ln\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}-\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})$

8-15 $p=-\frac{\rho}{2}(a\frac{\pi}{\alpha}\cdot r^{\frac{\pi}{\alpha}-1})^2$

8-18 层流 5.6m， 紊流 5m

8-19 3680N

8-20 $D_f=228.6\text{N}$， $(C_D)_f=2.86\times10^{-3}$

8-21 (1) 0.55m； (2) 57.2mm； (3) $C_f=3.196\times10^{-3}$ $D_f=16.57\text{N}$

8-23 $6.02\times10^{-2}\text{mm}$

8-24 10.5m/s

8-25 $u=0.154\text{m/s}$ 大于悬浮速度，被烟气带走

9-12 242m/s

9-13 $c_0=343\text{m/s}$， $c=323\text{m/s}$， $v=258.4\text{m/s}$， $p=3.28\times98100\text{N/m}^2$

9-14 $N=G\left\{\left[c_pT_2+\frac{1}{2}\left(\frac{GRT_2}{p_2A_2}\right)^2\right]-\left(c_pT_1+\frac{v_1^2}{2}\right)\right\}$

9-15 $M=0.71$， $v=241.5\text{m/s}$， $p_0=58260\text{N/m}^2$

9-16 $T_0=287\text{K}$

9-17 (1) $v=236.8\text{m/s}$， (2) $v=252.8\text{m/s}$

9-18 $M=0.311$， $\text{Re}=48485\times10^3$

9-19 $G=2.31\text{kg/s}$

9-20 5.17kg/s

9-21 0.427kg/s

9-22 (1) $\Delta p=3.42\times10^5\text{N/m}^2$， (2) $\Delta p=4.4\times10^5\text{N/m}^2$， (3) $\Delta p=4.03\times10^5\text{N/m}^2$

10-1 不可能实现，200km/h，384km/h

10-2 阻力为 3.88N，相似板尺寸为 $b_1=0.75\text{m}, l_1=3.75\text{m}$

10-3 绝对压强为 15at(abs)。

10-4 (a) 33.9km/h，1125kN， (b) 0.672km/h，450kN，(c) 0.1km/h，9N

10-5 $\lambda_l=\lambda_v^{2/3}$， $\lambda_1=\frac{\lambda_c}{\lambda_v^{2/3}}$

10-6 0.69m/s

10-7　$-37.5N/m^2$，　$62.5N/m^2$

10-8　$537m^3/s$，　2400kN

10-9　$\frac{M}{\rho\omega^2 d^5}=f\left(\frac{l}{d},\frac{\nu}{d^2\omega}\right)$

10-10　(*b*) $\frac{Q}{v_0 H^2}=f_1\left(\frac{Hg}{v_0^2}\right)$，　(*a*) $\frac{Q}{\sqrt{gH^5}}=f_2\left(\frac{v_0}{\sqrt{Hg}}\right)$

10-11　$\frac{\Delta p}{\rho v^2}=f\left(\frac{l_1}{l},\frac{l_2}{l},\frac{lg}{v^2},\frac{\mu}{\rho vi},\frac{\sigma}{\rho l v^2},\frac{E}{\rho v^2}\right)$

10-12　$\frac{y}{d}=f_1(\frac{x}{d},\theta,\alpha,\frac{\rho_2}{\rho_1},\frac{v_2}{v_1})$

$\frac{y}{d}=f_2\left(\frac{x}{d},\theta,\alpha_2,\frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_1 v_1^2}\right)$

11-1　82.1%，　85.8% 89.5%，　91.2%，　90.9%，　88.3%，　85.6%，　82.2%，　$\eta=91.4\%$，
$H=79mmH_2O$，　$Q=8300m^3/h$，　$N=2kW$

11-3　$\eta=91.4\%$，　$\overline{Q}=0.212$，　$\overline{H}=0.416$，　$\overline{N}=0.0965$，　$Q=11800m^3/h$，
$H=294mmH_2O$，　$N=10.2kW$，　$\eta=91.4\%$，　$n_s=74$

11-4　$n_{sp}=85$，　双吸 $n_{sp}=60$，　八级 $n_{sp}=405$

11-5　$Q=0.0751m^3/s$，　$H=15.3m$，　$N=3.51kW$

11-6　$Q=1.02m^3/s$，　$H=234m$，　$N=2482kW$

11-7　$v_{r2}=3.62m/s$，　$u_2=27.88m/s$，　$H_{T\infty}=61.5m$，　$H_T=47.4m$

11-8　10级，　49.75kW

13-4　$46.72mH_2O$

13-5　$H=92.19m$，　$N=27.6kW$

13-6　(*a*) 泵轴标高不超过 105.31m;
(*b*) 在 1800m 海拔处,泵轴标高＜1801.37m;
(*c*) 用冷凝水泵时,水箱液面至少高出泵轴 2.83m 以上

13-10　KT4-68-22 型 NO6.3E，　$n=1100r/min$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝流体力学泵与风机（第四版）
作者＝请自己补充
页数＝请自己补充
ＳＳ号＝１００７５１４９
出版日期＝请自己补充
出版社＝请自己补充